1 Generátor náhodných kvadratických funkcií

1.1 Kladne definitná matica. Matica G je kladne definitná, ak pre ľubovoľné x platí $x^T Gx \geq 0$, pričom rovnosť nastáva len pre $x = 0$. Ukážte, že pre ľubovoľnú maticu A a ľubovoľné $\varepsilon > 0$ je

$$G = AA^T + \varepsilon I,$$

kde I je identická matica, kladne definitná matica.

1.2 Generátor. Naprogramujte generátor náhodných kvadratických funkcií tvaru

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + h^T x,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor premenných, G je náhodne generovaná celočíselná symetrická kladne definitná matica rozmeru $n \times n$ a h je n-rozmerný vektor. Náhodne vygenerujte bod optima x_{opt} tak, aby jeho zložky boli celé čísla medzi -5 a 5. Vektor h dopočítajte tak, aby x_{opt} bol skutočne minimom funkcie $Q(x)$. Ako vyzerá $\nabla Q(x)$ a čo musí platiť v optime?

Funkciu v matlabe definujte ako *anonymous function* príkazom

```
Q = @(x) 1/2*x'*G*x + h'*x;
```

1.3 Dvojrozmerný prípad.

(a) Pre $n = 2$ vykreslite vygenerovanú funkciu Q na ploche $(x_1, x_2) \in [-10, 10]^2$ pomocou funkcie `surf`.
Poznámky
- Miesto `surf(X,Y,Z)` môžete použiť `surf(X,Y,Z,'EdgeColor','none')`, aby vám to nevykresľovalo hrany.
- Mrežu bodov z danej oblasti môžete vytvoriť pomocou `[X,Y] = meshgrid(linspace(-10,10,100))`.

(b) Do nového obrázku vykreslite vrstevnice funkcie Q pomocou funkcie `contour`. V obrázku vyznačte bod minima x_{opt}.

(c) Nájdite minimum vygenerovanej funkcie Q pomocou `fminsearch`, porovnajte to so skutočným minimom x_{opt} a odmerajte, ako dlho výpočet trval pomocou `tic` a `toc`. Ako štartovací bod pre `fminsearch` môžete použiť nulu (`zeros(n,1)`).

(d) Funkcia `fminsearch` v sebe zahŕňa iteračný algoritmus. Vyhľadajte túto funkciu v helpe a pokúste sa pomocou príkazu `options` vykresliť správanie sa funkčnej hodnoty účelovej funkcie v jednotlivých iteráciách tohto algoritmu.

Pravidlá vektorového derivovania

Vektorovému derivovaniu je venovaný Dodatok B v knihe (strana 273). Tu uvádzame len vybrané pravidlá derivovania.

Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Symbolom $\frac{df(x)}{dx}$ označujeme **riadkový** vektor

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

a symbolom $\nabla f(x) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^T$ označujeme **stĺpcový** vektor gradientu funkcie f.

Derivácia skalárneho súčinu

Nech

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \;\; v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \;\; f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

pričom $f(x) = u(x)^T v(x)$. Potom

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[u(x)^T v(x)\Big] = u(x)^T \frac{dv(x)}{dx} + v(x)^T \frac{du(x)}{dx},$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^T = \nabla v(x)\; u(x) + \nabla u(x)\; v(x).$$