2 Metódy intervalovej aproximácie minima funkcie jednej premennej

2.1 Metóda bisekcie.

Vytvorte funkciu `bisekcia(f,df,a0,b0,eps,n)`, ktorej vstupmi budú predpis funkcie f, predpis jej derivácie df, okrajové body intervalu neurčitosti $[a_0, b_0]$, požadovaná dĺžka ϵ výsledného intervalu neurčitosti a počet povolených experimentov n. Výstupom tejto funkcie nech je výsledný interval neurčitosti $[a, b]$, počet potrebných iterácií k a čas výpočtu t.

2.2 Metóda náhodnej bisekcie.

Vytvorte funkciu `nbisekcia(f,df,a0,b0,eps,n)` s rovnakými vstupmi a výstupmi ako pri metóde bisekcie.

2.3 Metóda zlatého rezu.

Vytvorte funkciu `zlatyrez(f,a0,b0,eps,n)` s rovnakými vstupmi a výstupmi ako pri metóde bisekcie.

2.4 Metóda Fibonacci.

Vytvorte funkciu `fibonacci(f,a0,b0,eps,n)` s rovnakými vstupmi a výstupmi ako pri metóde bisekcie.

2.5 Testovanie metód.

Otestujte vytvorené funkcie `bisekcia, nbisekcia, fibonacci, zlatyrez` na funkciách

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x, \quad I_1 = [0,\ 1], \\ f_2(x) &= -3x\sin(0.7x) + e^{-2x}, \quad I_2 = [0,\ 2\pi]. \end{aligned}$$

Dané funkcie a ich derivácie definujte ako *anonymous function* príkazom

```
f = @(x) .....
```

2.6 Porovnanie metód.

Vytvorte program, ktorý bude porovnávať uvedené metódy. Zvoľte fixnú toleranciu (napr. $\varepsilon = 10^{-6}$) a fixný počet povolených experimentov ($n = 50$) a pre jednotlivé funkcie porovnajte v tabuľke

- nájdené ε-presné riešenie pre danú metódu,
- počet iterácií potrebných na nájdenie tohto riešenia,
- trvanie výpočtu.

Na základe údajov z tabuliek vyvoďte závery k porovnaniu daných metód.

2.7 Niečo na zamyslenie.

Uvažujme funkciu

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x$$

na intervale $[0, 1000]$.

a) Pomocou derivácie funkcie f určte jej minimum.

b) Nájdite minimum funkcie f metódou bisekcie a náhodnej bisekcie. Porovnajte tieto metódy na základe kritérií z predošlej úlohy. Javí sa jedna z nich výrazne lepšia? Ak áno, napíšte ktorá a poskúste sa zdôvodniť prečo.

c) Pokúste sa upraviť Vaše funkcie tak, aby sa pri ich spustení vykreslila funkcia f a postupne na nej zobrazte krajné body intervalu neurčitosti v každej iterácii metódy bisekcie a náhodnej bisekcie.

2.8 Ukončenie zadania.

Vyplňte zadanie a nezabudnite ho uložiť. Do svojho priečinka nahrajte všetky matlabovské súbory t.j. funkcie `bisekcia, nbisekcia,fibonacci,zlatyrez` a skript, v ktorom tieto metódy porovnávate, prípadne vykresľujete.

Popis algoritmov

Bisekcia

Vstupy: $f(x), df(x), a, b, \epsilon, n$
Schéma algoritmu:

1. Vypočítame stred intervalu neurčitosti $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Ak $df(c) > 0$, tak $b = c$, inak (ak $df(c) \leq 0$) $a = c$.
3. Koniec, ak $b - a < \epsilon$.

Náhodná bisekcia

Rovnaký algoritmus ako v metóde bisekcie. Jediný rozdiel je v tom, že sa hodnota derivácie nevyhodnocuje v strede intervalu $[a, b]$, ale v náhodne zvolenom bode intervalu $[a, b]$ t.j.

$$c = rand(1) * (b - a) + a.$$

Metóda zlatého rezu

Vstupy: $f(x), a, b, \epsilon, n$
Schéma algoritmu:

1. Vypočítame $\rho = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $z_1 = 2 - \rho$, $z_2 = \rho - 1$.
2. Uzly $c_1 < c_2$ volíme podľa pravidla zlatého rezu:
$$c_1 = a + z_1(b - a), \quad c_2 = a + z_2(b - a).$$
3. Ak $f(c_1) < f(c_2)$, tak
$$b = c_2, \quad c_2 = c_1, \quad c_1 = a + z_1(b - a),$$
inak (ak $f(c_1) \geq f(c_2)$)
$$a = c_1, \quad c_1 = c_2, \quad c_2 = a + z_2(b - a).$$
4. Koniec, ak $b - a < \epsilon$.

Metóda Fibonacci - upravená

Vstupy: $f(x), a, b, \epsilon, n$
Schéma algoritmu:

1. Vypočítame
$$\begin{aligned} s &= (1 - \sqrt(5))/(1 + \sqrt(5)), \\ \varphi &= (\sqrt(5) + 1)/2, \\ \rho &= \frac{1}{\frac{\varphi(1-s^{n+1})}{1-s^n}}, \\ d &= \rho b + (1 - \rho)a, \\ yd &= f(d). \end{aligned}$$

2. V poslednej $(n-1)$-vej iterácii volím:

$$c = \epsilon a + (1-\epsilon)d,$$

inak

$$c = \rho a + (1-\rho)b.$$

4. Definujeme $yc = f(c)$.

3. Ak $yc < yd$, tak

$$b = d, \quad d = c, \quad yd = yc,$$

inak (ak $yc \geq yd$)

$$a = b, \quad b = c.$$

4. Koniec, ak $|b-a| < \epsilon$.