3 Metódy bodovej aproximácie minima funkcie jednej premennej (Interpolačné metódy)

Vo svojom priečinku `Cvicenie3` nájdete v podpriečinku `Matlab` všetky predprogramované kódy potrebné k vypracovaniu tohto zadania.

3.1 Testovanie Newtonovej metódy. Vo funkcii `newton(f,df,d2f,a,b,x0,eps,n)` je predprogramovaná Newtonova metóda. Vstupmi tejto funkcie sú:

`f`	–	predpis účelovej funkcie f,
`df`	–	predpis derivácie účelovej funkcie f,
`d2f`	–	predpis druhej derivácie účelovej funkcie f,
`a,b`	–	krajné body daného intervalu,
`x0`	–	štartovací bod Newtonovej metódy,
`eps`	–	tolerancia pre hodnotu derivácie,
`n`	–	maximálny počet povolených iterácií.

Výstupom funkcie je vektor x_iter obsahujúci postupnosť aproximácií minima x v jednotlivých iteráciách a ich vykreslenie.

Otestujte Newtonovu metódu pri hľadaní minima funkcií f_1 a f_2 na daných intervaloch:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x, & I_1 &= [0.1, 1], \\ f_2(x) &= \ln^2(x-2) + \ln^2(10-x) - x^{0.2}, & I_2 &= [8,\ 9.5]. \end{aligned}$$

Pri testovaní využite predprogramované skripty `Testovanie_f1.m` a `Testovanie_f2.m`. Získané výsledky vpíšte do odpoveďového hárku. Po spustení funkcie si všímajte grafický výstup, ktorý zobrazuje aproximácie danej funkcie a jej minima v jednotlivých iteráciách.

3.2 Kvadratická interpolácia. V súbore `kvadint1` je predprogramovaná metóda kvadratickej interpolácie s dvomi interpolačnými uzlami a so zadanými hodnotami $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_1' = f'(x_1) < 0$, ktorú chceme otestovať. Podobne ako pri Newtonovej metóde je výstupom funkcie vektor x_iter.

Doplňte do predprogramovaných funkcií `kvadint2` a `kvadint3` interpolačné formuly pre minimum a kritérium optimality tak, aby ste získali ďalšie varianty metódy kvadratickej interpolácie:

`kvadint2`	–	metóda kvadratickej interpolácie s dvomi interpolačnými uzlami a so zadanými hodnotami $f_1' = f'(x_1) < 0$ a $f_2' = f'(x_2) > 0$,
`kvadint3`	–	metóda kvadratickej interpolácie s tromi interpolačnými uzlami a so zadanými hodnotami $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$.

Detaily k týmto interpoláciám nájdete v modrej knižke (ak ju nemáte, potrebné strany som naskenovala do podpriečinku `Teória`).

Funkcie opäť volajte v skriptoch `Testovanie_f1.m` a `Testovanie_f2.m`. Výsledky získané jednotlivými metódami vpíšte do odpoveďového hárka a metódy navzájom porovnajte. Pri spúšťaní jednotlivých funkcií si opäť všímajte grafický výstup.

3.3 Kubická interpolácia. V priečinku nájdete aj funkciu `kubint(f,df,a,b,eps,n)`, v ktorej je naprogramovaná metóda kubickej interpolácie. Otestujte ju na funkciách f_1 a f_2 v skriptoch `Testovanie_f1.m` a `Testovanie_f2.m` a výsledky vpíšte do odpoveďového hárku. Porovnajte kubickú interpoláciu s kvadratickými interpoláciami z predošlej úlohy.

3.4 Interpolácia konvexnou funkciou. Uvažujme funkciu jednej premennej $f(x)$ definovanú pre kladné x. Zadané sú dva interpolačné uzly $0 < x_1 < x_2$, funkčné hodnoty $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ a hodnota derivácie $f_1' = f'(x_1) < 0$. Pre $f_{12} := \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$ predpokladáme platnosť $f_{12} > f_1'$. Interpolačná funkcia má tvar

$$\varphi(x) = ax + b - c\ln(x),$$

kde $a, c > 0$ a $b \in \mathbb{R}$.

(a) Odvoďte interpolačnú formulu pre minimum $\hat{x}$. Nájdené minimum upravte na tvar:

$$\hat{x} = x_1\psi\left(\frac{f_{12} - f_1'}{f_{12} - \beta f_1'}\right)$$

a určte β a predpis funkcie ψ.

(b) Ukážte, že platí $\hat{x} > x_1$.

(c) Doplňte interpolačnú formulu pre interpoláciu funkciou $\varphi(x)$ do predpripravenej funkcie `kvxint(f,df,a,b,eps,n)` a testujte ju na funkciách f_1 a f_2 v skriptoch `Testovanie_f1.m` a `Testovanie_f2.m` a výsledky vpíšte do odpoveďového hárku.

Vzorové riešenie takejto úlohy pre iný tvar interpolačnej funkcie $\varphi(x)$ nájdete v priečinku `Teória`.

3.5 Interpolácia stredovým splajnom. Využite funkciu `splajn(f,df,a,b,eps,n)`, v ktorej je naprogramovaná metóda interpolácie stredovým kvadratickým splajnom. Otestujte ju na funkciách f_1 a f_2 v skriptoch `Testovanie_f1.m` a `Testovanie_f2.m`. Pozorujte grafický výstup a výsledky vpíšte do odpoveďového hárku.

3.6 Grafické porovnanie metód (Bonusová úloha). Naprogramujte grafický výstup porovnania konvergencie metód pre funkcie f_1 a f_2, pre každú funkciu vykreslite osobitný graf. Na x-ovej osi nech je poradové číslo iterácie a na y-ovej osi hodnota $|f(x_k) - f^*|$, kde x_k je aproximácia minima v k-tej iterácii a f^* je hodnota funkcie vo výslednom ε-presnom riešení. V grafe farebne rozlíšte jednotlivé metódy. Nezabudnite na legendu a slovnú interpretáciu týchto grafov.

Poznámka: Pre lepšiu prehľadnosť môže byť výhodné na osi y použiť logaritmickú mierku. Takýto graf vykreslíte tak, že namiesto `plot(x,y)` použijete `semilogy(x,y)`. Kvôli logaritmickej transformácii budú vykreslené iba kladné zložky vektora y.