4 Gradientné metódy

Na stránke v súbore `Matlab` nájdete všetky predprogramované kódy potrebné k vypracovaniu tohto zadania. Vyplňte odpoveďový hárok vo vašom priečinku `Cvičenie4` a nahrajte sem aj svoje kódy.

4.1 Cauchyho metóda pre kvadratickú funkciu.

Doplňte funkciu `cauchy_kvadr(G,h,x0,eps,n)` tak, aby zodpovedala Cauchyho metóde pre kvadratickú funkciu. Vstupmi tejto funkcie sú matica G a vektor h, ktoré definujú danú kvadratickú funkciu $Q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + h^T x$, x_0 je štartovací bod, eps je zvolená tolerancia a n je maximálny počet povolených iterácií. Výstupom tejto funkcie je matica x_iter, ktorej stĺpce predstavujú aproximácie minima v jednotlivých iteráciách, a vektor Q_iter obsahujúci funkčné hodnoty účelovej funkcie v týchto bodoch.

Upravenú funkciu volajte v súbore `Pr1.m`. Tento súbor upravte tak, aby pomocou Cauchyho metódy hľadal minimum kvadratickej funkcie

$$Q_1(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} x.$$

Experimentujte s parametrom $a > 0$ a so štartovacím bodom x_0. Postupne voľte za a hodnoty $1, 3, 10$ a vyskúšajte štartovacie body $(a, 0)^T$, $(a, 1)^T$ a $(a, a)^T$. Výsledky zapíšte do odpoveďového hárku a porovnajte rýchlosť konvergencie Cauchyho metódy pre rôzne voľby štartovacieho bodu. Nezabudnite si všímať grafický výstup metódy.

4.2 Gradientná metóda pre všeobecnú funkciu.

V súbore `Pr2.m` porovnajte gradientné metódy s odlišnou voľbou kroku pre konvexnú funkciu

$$f_1(x_1, x_2) = 5x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 2x_1x_2 + 9x_1 - 5x_2$$

so štartovacím bodom $x_0 = (1, 0)^T$.

(a) Gradientná metóda s konštantným krokom.

Upravte funkciu `grad_const(f,gr,c,x0,eps,n)` tak, aby obsahovala gradientnú metódu s konštantným krokom. Do tejto funkcie vstupuje predpis konvexnej účelovej funkcie f, gradient účelovej funkcie gr, dĺžka konštantného kroku c, štartovací bod x_0, tolerančná konštanta eps a maximálny počet povolených iterácií n. Túto funkciu volajte v súbore `Pr2.m` a v každej iterácii kontrolujte, či hodnota účelovej funkcie skutočne klesne. Otestujte metódu pre rôzne dĺžky kroku c. Postupne voľte $c = 0.05, 0.1, 0.15$.

(b) Gradientná metóda s približne optimálnym krokom.

Upravte funkciu `grad_back(f,gr,x0,eps,n)` tak, aby zodpovedala gradientnej metóde s približne optimálnym krokom. Približne optimálny krok sa volí pomocou *backtrackingu*, ktorého algoritmus nájdete v prednáške. Do tejto funkcie vstupuje predpis konvexnej účelovej funkcie f, gradient účelovej funkcie gr, štartovací bod x_0, tolerančná konštanta eps a maximálny počet povolených iterácií n. Túto funkciu volajte v súbore `Pr2.m`.

(c) Gradientná metóda s optimálnym krokom, t.j. Cauchyho metóda.

Upravte funkciu `cauchy(f,gr,x0,eps,n)` tak, aby zodpovedala Cauchyho metóde. Do tejto funkcie vstupuje predpis konvexnej účelovej funkcie f, gradient účelovej funkcie gr, štartovací bod x_0, tolerančná konštanta eps a maximálny počet povolených iterácií n. Túto funkciu volajte v súbore `Pr2.m`.

Výpočet optimálnej dĺžky kroku zodpovedá riešeniu jednorozmerného problému

$$\text{Min}\left\{\varphi(\lambda) = f\left(x^k + \lambda s^k\right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Tento problém riešte metódou zlatého rezu, využite funkciu `zlatyrez(f,a,b,eps,n)`, ktorú sme programovali na druhom cvičení. Môžeme predpokladať, že $\lambda \in [0,1]$.

4.3 Konvergencia gradientnej metódy s konštantným krokom.

Podľa prednášky gradientná metóda s konštantným krokom c konverguje pre $0 < c < \frac{2}{L}$, kde L je Lipschitzovská konštanta pre gradient $\nabla f(x)$.

Ukážte, že pre kvadratickú funkciu $Q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + h^T x$ možno za L zvoliť najväčšiu vlastnú hodnotu μ_{max} matice G, t.j. ukážte, že pre ľubovoľné x, y z $\mathbb{R}^n$ platí

$$\|\nabla Q(x) - \nabla Q(y)\|_2 \leq \mu_{max}\|x - y\|_2.$$

V súbore `Pr3.m` overte konvergenciu tejto metódy pre $c = \frac{1.9}{L}$ na funkcii

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + x^T \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

so štartovacím bodom $x_0 = (3,2)^T$. Konverguje táto metóda aj pre $c = \frac{2.1}{L}$?