6 Metóda združených gradientov a kvázinewtonovské metódy

6.1 Metóda združených gradientov Fletchera a Reevesa.

Upravte funkciu $fletcher\_reeves()$ tak, aby obsahovala metódu združených gradientov Fletchera a Reevesa. V súbore $Pr1.m$ testujte túto metódu pre náhodnú kvadratickú funkciu

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + h^T x,$$

kde G je $m \times m$ kladne definitná symetrická matica a h je m-rozmerný vektor. Maticu G, vektor h aj štartovací bod x_0 generujte náhodne. Pozorujte, ako závisí potrebný počet iterácií od rozmeru úlohy m.

Poznámka: Ako docielime, aby náhodne generovaná matica bola kladne definitná? Spomeňte si na prvé cvičenie.

6.2 Kvázinewtonovské metódy pre náhodnú kvadratickú funkciu.

Upravte funkcie $DFP()$, $BFGS()$ a $SR1()$ tak, aby obsahovali:

- DFP metódu s korekčnou maticou

$$\Delta H_{DFP} = \frac{pp^T}{p^T y} - \frac{H y y^T H}{y^T H y},$$

- BFGS metódu s korekčnou maticou

$$\Delta H_{BFGS} = \left(1 + \frac{y^T H y}{p^T y}\right)\frac{pp^T}{p^T y} - \frac{H y p^T + p y^T H}{p^T y},$$

- SR1 metódu s korekčnou maticou

$$\Delta H_{SR1} = \frac{(p - Hy)(p - Hy)^T}{y^T (p - Hy)}.$$

Otestujte tieto funkcie v súbore $Pr2.m$ pre náhodne generovanú kvadratickú funkciu (generovanie skopírujte z prvého príkladu). Pozorujte, ako závisí potrebný počet iterácií od rozmeru úlohy m.

6.3 Kvázinewtonovské metódy pre všeobecnú konvexnú funkciu.

Upravte funkcie `DFP_num()`, `BFGS_num()` a `SR1_num()` tak, aby sme ich mohli aplikovať na ľubovoľnú konvexnú funkciu. Derivácie v gradiente aproximujte numericky (pozrite minulé cvičenie) a dĺžku kroku voľte optimálne (použite metódu zlatého rezu podobne ako v Cauchyho metóde v 4. cvičení).

6.4 Kvázinewtonovské metódy v porovnaní s Newtonovou metódou.

Použite svoj súbor `Pr4.m` z minulého cvičenia a porovnajte v ňom Newtonovu metódu (funkcia `newton_num` z minulého cvičenia) s kvázinewtonovskými metódami z predošlej úlohy pre funkciu

$$f_1(x_1, x_2) = x_2^4 + (x_1 - 2)^2(5 + x_2^2) - 2x_1x_2 + 9x_1 - 5x_2, \quad x_0 = (-3, 3)^T.$$

Voľte $n = 50$ a $eps = 10^{-3}$.