Lineárne programovanie (cvičenia): Príklady na precvičenie pred písomkou

Terézia Fulová

26. novembra 2019

Grafické riešenie úloh LP

a) Graficky znázornite množinu prípustných riešení $\mathcal{P}$.

b) Nájdite vrcholy množiny prípustných riešení $\mathcal{P}$.

c) Načrtnite vrstevnice účelovej funkcie f.

d) Nájdite minimálnu/maximálnu hodnotu účelovej funkcie f na $\mathcal{P}$, prípadne zdôvodnite neohraničenosť či neprípustnosť úlohy LP.

e) Nájdite takú lineárnu účelovú funkciu, aby množina optimálnych riešení bola jednobodová/viacbodová.

Vzorové príklady:

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 + x_2 & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad (1)$$

$$[x^* = (3, 3/2)^T, f(x^*) = 9/2]$$

$$\begin{array}{llll} \max & 4x_1 + x_2 & & \\ & 4x_1 + 3x_2 & \geq & 120 \\ & 2x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ & 2x_1 - 3x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad (2)$$

[neohraničená úloha]

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 - 5x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 & \geq & 12 \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \end{array} \qquad (3)$$

[neprípustná úloha]

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 - 2x_2 & & \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & \leq & 2 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad (4)$$

$$[x^* = (t, 3 + t)^T, t \in [0, 1], f(x^*) = -6]$$

Formulácia úloh LP zo slovného zadania

a) Zapíšte daný problém v tvare úlohy LP t.j. nájdite príslušnú lineárnu účelovú funkciu a všetky lineárne ohraničenia.

b) Slovne popíšte premenné, ktoré budú v úlohe vystupovať.

c) Overte, či je daný bod prípustným riešením navrhnutej úlohy LP.

Vzorové príklady:

1. Malá firma vyrába dva druhy drevených hračiek: skladací vláčik a stavebné kocky, ktoré predáva za 20 resp. 16 eur. Na výrobu jedného vláčika potrebujú 2,4 kg dreva, 50 ml farby a 2 h práce. Výroba jednej sady stavebných kociek zas vyžaduje 1,8 kg dreva, 42 ml farby a 90 min práce. Na daný týždeň má firma k dispozícii 195 kg dreva, 4,2 l farby a 160 h pracovného času. Firma chce zistiť, koľko má vyrobiť z jednotlivých hračiek, aby maximalizovala svoj zisk. Keďže ide o malú firmu a dopyt je dostatočný, predpokladáme, že všetok vyrobený tovar dokážu predať. Sformulujte túto úlohu v tvare úlohy LP. Bola by daná firma schopná uspokojiť dopyt po 40 skladacích vláčikoch a 35 stavebných kockách?

2. Na prikrmovanie ošípaných sa v danom družstve používa kukurica, pšenica a sója. Tie obsahujú živiny v takomto množstve:

krmivo (100g)	kukurica	pšenica	sója
bielkoviny (g)	9,4	12,6	13
sacharidy (g)	74	71	11
sodík (mg)	35	2	15

Správna výživa ošípanej vyžaduje denne aspoň 200 g bielkovín, aspoň 350 g sacharidov a aspoň 0,25 g, no najviac 0,4 g sodíka. V družstve je 1000 ošípaných. Sformulujte úlohu LP, keď družstvo chce minimalizovať náklady na výživu ošípaných. Cena kukurice je 149 €/t, cena pšenice je 211 €/t a cena sóje je 383 €/t.

3. Spoločnosť vlastní dve konzervárne. Pestovatelia sú ochotní dodávať čerstvé ovocie v nasledovných množstvách za uvedené ceny:

dodávateľ	množstvo	cena
S1	200 t	11€/t
S2	310 t	10€/t
S3	420 t	9€/t

Náklady na dopravu v eurách za tonu ovocia prevezenú po danej trase sú:

od/k	konzerváreň A	konzerváreň B
dodávateľ 1	3	3.5
dodávateľ 2	2	2.5
dodávateľ 3	6	4

Konzerváreň A môže spracovať najviac 460 t ovocia, pričom cena pracovnej sily je 26 €/t a konzerváreň B najviac 560 t s cenou pracovnej sily 21 €/t.

Konzervované ovocie sa predáva distribútorom za 50 €/t. Sformulujte problém v tvare úlohy LP za predpokladu, že spoločnosť chce maximalizovať zisk, minimalizovať náklady a je schopná za danú cenu predať všetko skonzervované ovocie.

Riešenie špeciálnych úloh LP

a) Grafické riešenie úloh LP s parametrom v účelovej funkcii.

$$\begin{array}{lllll} \max & ax_1 + x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{5}$$

b) Riešenie úloh LP so separovateľnou účelovou funkciou a ohraničeniami.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ & 3 \leq x \leq 5 \end{array} \tag{6}$$

Transformácia úloh LP

a) Prepis ľubovoľnej úlohy LP do tvaru (LP1), (LP2), (LP3) pomocou ekvivalentných úprav:
   i) úprava maximalizačnej úlohy na minimalizačnú,
   ii) úprava ohraničenia v tvare rovnosti na ohraničenie v tvare nerovnosti (ľubovoľný počet vs. čo najmenší počet ohraničení v úlohe),
   iii) úprava ohraničenia v tvare nerovnosti na ohraničenie v tvare rovnosti (zavedenie doplnkových premenných),
   iv) úprava voľnej premennej na nezápornú (rozdiel nezáporných premenných/ substitúcia),
   v) zápis úlohy v maticovom tvare.

b) Transformácia úlohy zlomkového lineárneho programovania na štandardnú úlohu LP.

c) Transformácia úlohy so sumou absolútnych hodnôt lineárnych funkcií v účelovej funkcii a v ohraničení.

d) Transformácia úlohy s maximom/minimom z množiny lineárnych funkcií v účelovej funkcii a v ohraničení.

Vzorové príklady

1. Zapíšte dané úlohy v tvare (LP1), (LP2), (LP3):

$$\begin{array}{llll} \min & c^T y & & \\ & Ay & = & b, \\ & y & \geq & 0, \end{array} \quad \text{(LP1)} \qquad \begin{array}{llll} \min & c^T y & & \\ & Ay & \geq & b, \\ & y & \geq & 0, \end{array} \quad \text{(LP2)} \qquad \begin{array}{llll} \min & c^T y & & \\ & Ay & \geq & b. \end{array} \quad \text{(LP3)}$$

$$\begin{array}{lr} \min & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 = 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & -3x_1 + x_2 \geq -13 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2 \leq 5 \end{array} \tag{7}$$

$$\begin{array}{lr} \max & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ & 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ & 5x_1 - 2x_3 = 6 \\ & x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq -3 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_3 \leq 3 \end{array} \tag{8}$$

2. Transformujte danú úlohu zlomkového programovania na štandardný tvar úlohy LP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{x_1 + x_2 + 3}{2x_1 + 3x_2 - 2} \\ & x_1 - 6x_2 = 2 \\ & 3x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

3. Transformujte danú úlohu na štandardný tvar úlohy LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & min\{x_1, ..., x_n\} \\ & \|Ax - b\|_1 \leq 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Základy konvexnej analýzy množín

a) Pomocou definície konvexnej množiny/afinnej množiny/konvexného kužeľa ukážte, že daná množina je konvexnou množinou/afinnou množinou/konvexným kužeľom.

b) Napíšte danú afinnú množinu $\mathcal{A}$ ako súčet vektorového podpriestoru a vektora posunutia t.j. $\mathcal{A} = V + x_0$.

c) Vyjadrite danú afinnú množinu $\mathcal{A} = V + x_0$ ako riešenie systému lineárnych rovníc.

d) Nájdite afinný, konvexný a kónický obal danej množiny.

e) Aplikujte definície afinnej, konvexnej a kónickej kombinácie bodov, krajného bodu, relatívneho vnútra.

Vzorové príklady

1. Ukážte, že množina $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq a^T x \leq \beta, \alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ je konvexná.

2. Ukážte, že množina $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_3 = 4, x_2 = 1\}$ je afinná. Vyjadrite ju v tvare $\mathcal{A} = x_0 + V$, t.j. nájdite x_0 a vektorový podpriestor V.

3. Ukážte, že $C = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq t\}$ je konvexným kužeľom.

4. Nech $V = span[(-1,0,-1,0,1)^T, (-1,1,0,0,0)^T]$ a $x_0 = (2,-1,3,0,1)^T$. Vyjadrite afinnú množinu $A = x_0 + V$ ako množinu riešení nejakého systému lineárnych rovníc.

5. Nájdite $convS$, $affS$, $coneS$ množín

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 0\}, \tag{11}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}, \tag{12}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (1,0,1)^T, (-1,0,1)^T, (0,0,-1)^T\}. \tag{13}$$

Bázické riešenia

a) Nájdite všetky bázické riešenia a príslušné bázy daného systému.

b) Nájdite všetky prípustné bázické riešenia vzhľadom na danú prípustnú množinu.

c) Využitím základnej vety lineárneho programovania a vzťahu bázických riešení a krajných bodov množiny prípustných riešení nájdite účelovú funkciu maximalizačnej/minimalizačnej úlohy tak, aby množina optimálnych riešení spĺňala danú vlastnosť.

d) Analyzujte maximá a minimá lineárnej funkcie $c^T x$ v závislosti od zložiek vektora c, ak je zadaná množina prípustných riešení.

Vzorové príklady

1. Daný je systém rovníc $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite všetky bázické riešenia a príslušné bázy.

b) Nájdite všetky prípustné bázické riešenia pre $\mathcal{P} = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$.

c) Nájdite vektor c účelovej funkcie tak, aby optimálna hodnota minimalizačnej úlohy bola 2 a aby množina optimálnych riešení bola viacbodová.

2. Analyzujte minimá a maximá lineárnej funkcie $c^T x$ v závislosti od zložiek vektora c, ak je množina prípustných riešení daná ohraničeniami:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Simplexová metóda

a) Vyriešte danú úlohu simplexovou metódou t.j. nájdite všetky optimálne riešenia a optimálnu hodnotu účelovej funkcie.

b) Graficky znázornite množinu prípustných riešení a vyznačte jednotlivé bázické riešenia pre každú iteráciu simplexovej metódy.

c) Riešte simplexovou metódou bez tabuľkového zápisu.

Vzorové príklady

1. Riešte danú úlohu simplexovou metódou, graficky znázornite množinu prípustných riešení a vyznačte jednotlivé bázické riešenia pre každú iteráciu:

$$\begin{array}{lll} \max & -x_1 + 3x_2 & \\ & -x_1 + x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 12 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \tag{14}$$

$[x^* = (1,4)^T, f(x^*) = 11]$

2. Riešte simplexovou metódou:

$$\begin{array}{lll} \min & -6x_1 - 3x_2 + 2x_3 & \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 & \leq 6 \\ & 3x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \tag{15}$$

$[x^* = (0, 28, 11)^T, f(x^*) = -62]$

$$\begin{array}{lll} \max & 5x_1 + 4x_2 - x_3 & \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 6 \\ & -3x_1 - x_2 + 5x_3 & \leq 5 \\ & x_1 & \leq 0 \\ & x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \tag{16}$$

$[x^* = (-16/3, 11, 0)^T, f(x^*) = 52/3]$

$$\begin{array}{lll}
\max & 2x_1+3x_2-x_3 & \\
 & 2x_1-x_2-x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1+3x_2-2x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1-4x_2+3x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1,x_2,x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{17}$$

$$\left[x^*=\left(10-\frac{t}{4},4+\frac{t}{4},10+\frac{t}{4}\right)^T,t\in[0,40],f(x^*)=22\right]$$

$$\begin{array}{llll}
\min & -4x_1+3x_2+8x_3 & & \\
 & x_1+3x_2-2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1+x_2-5x_3 & \leq & 2 \\
 & -3x_1+7x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1,x_2,x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{18}$$

$$\left[x^*=(16+2t,0,6+t)^T,t\in[0,7],f(x^*)=-16\right]$$

3. Riešte úlohu simplexovou metódou bez simplexovej tabuľky:

$$\begin{array}{llll}
\max & 3x_1+2x_2 & & \\
 & 2x_1+x_2 & \leq & 3 \\
 & 3x_1+3x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1,x_2 & \geq & 0
\end{array} \tag{19}$$

$$\left[x^*=(4/3,1/3)^T,f(x^*)=14/3\right]$$

Dvojfázová simplexová metóda

a) Vyriešte danú úlohu dvojfázovou simplexovou metódou t.j. nájdite všetky optimálne riešenia a optimálnu hodnotu účelovej funkcie.

Vzorové príklady

1. Vyriešte nasledujúce úlohy dvojfázovou simplexovou metódou. V prípade optimality nájdite všetky optimálne riešenia, v prípade neohraničenosti nájdite aj hranu, na ktorej je účelová funkcia neohraničená.

$$\begin{array}{llll}
\min & 2x_1+7x_2 & & \\
 & x_1+3x_2 & \geq & 4 \\
 & x_1+x_2 & \geq & 5 \\
 & x_1,x_2 & \geq & 0
\end{array} \tag{20}$$

$$\left[x^*=(5,0)^T,f(x^*)=10\right]$$

$$\begin{array}{llll}
\min & 2x_1+x_2 & & \\
 & 4x_1+x_2 & \geq & 8 \\
 & 2x_1+2x_2 & \geq & -1 \\
 & 3x_1+x_2 & \geq & 6 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \leq & 0
\end{array} \tag{21}$$

$$\left[x^*=(13/4,-15/4)^T,f(x^*)=11/4\right]$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 & \\
& 2x_1 - 3x_2 + x_3 & \leq \quad -1 \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_4 & = \quad -1 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq \quad 4 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq \quad 0
\end{array}
\tag{22}
$$

$[x^* = (2/5, 7/10, 0)^T, f(x^*) = -1/2]$

$$
\begin{array}{lll}
\max & x_1 + 2x_2 + 8x_3 & \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq \quad 10 \\
& x_1 + x_2 + 3x_3 & = \quad 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq \quad 5 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq \quad 0
\end{array}
\tag{23}
$$

$[x^* = (1 + 2t, 3 - 5t, t)^T, t \in [0, 3/5], f(x^*) = 7]$

$$
\begin{array}{lll}
\min & x_1 + x_2 + x_3 & \\
& 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = \quad 6 \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 & = \quad 5 \\
& x_1 & \leq \quad 3 \\
& x_1 & \geq \quad 1 \\
& x_2, x_3 & \geq \quad 0
\end{array}
\tag{24}
$$

[neprípustná úloha]