

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Obáľková analýza dát: aditívny versus SBM model

BAKALÁRSKA PRÁCA

2016

Denisa JANČOVIČOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Obáľková analýza dát: aditívny versus SBM model

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Denisa Jančovičová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Obáľková analýza dát: aditívny versus SBM model
Data Envelopment Analysis: Aditive versus SBM Model

Cieľ: Porovnať (analyticky príp. empiricky) vlastnosti aditívneho modelu pri rozličných typoch váh s SBM modelom. Empirické porovnania vykonať na vhodne zvolených súboroch rozličnej veľkosti.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 19.10.2015

Dátum schválenia: 19.11.2015
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Rada by som týmto spôsobom vyjadrila veľkú vĎaku svojej vedúcej bakalárskej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. najmä za ochotu, podnetné rady a cenné pripomienky, ktoré mi pri písaní tejto práce poskytla. Taktiež by som sa chcela poĎakovať svojim blízkym za trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

JANČOVIČOVÁ, Denisa: Obáľková analýza dát: aditívny versus SBM model [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2016

V tejto bakalárskej práci sa zameriavame na analytické porovnanie vlastností vybraných neorientovaných DEA modelov, presnejšie SBM modelu a aditívneho modelu s rôznym typom váh, a na následnú ilustráciu získaných poznatkov na konkrétnych príkladoch. V práci najprv uvádzame čitateľa do problematiky DEA a poskytujeme stručný prehľad kľúčových pojmov, pričom sa podrobnejšie venujeme najmä SBM modelu a aditívnemu modelu s rozličným typom váh. Teoretická časť práce ďalej ponúka súhrn už známych vlastností týchto modelov a zároveň odvodenia nových vlastností a vzťahov medzi vybranými modelmi. Analyzujeme taktiež dopad rôznej voľby váh v aditívnom modeli na výsledky. V praktickej časti práce následne demonštrujeme naše zistenia na rôzne veľkých súboroch dát, pričom využívame nami naprogramované modely v softvéri MATLAB.

Kľúčové slová: Data Envelopment Analysis (DEA), Aditívny model, Slacks Based Measure (SBM)

Abstract

JANČOVIČOVÁ, Denisa: Data Envelopment Analysis: Additive versus SBM Model [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2016

In this Bachelor thesis, we focus on the analytical comparison of non-oriented DEA models, precisely speaking, of SBM model and additive model with different types of weights, and then on the illustration of gained knowledge with concrete examples. In the work, we firstly introduce a reader into DEA issues and provide a brief summary of key terms, where we thoroughly deal especially with SBM and additive model with different types of weights. The theoretical part of the work then provides not only a summary of already well-known properties of these models but also a derivation of some new properties and relations between specific models. Furthermore we analyze the impact of different weights in additive model on the results. Afterwards, in the practical part of the work, we demonstrate our findings on datasets of various dimensions, where we use models programmed by ourselves in the solver MATLAB.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), Additive model, Slacks Based Measure (SBM)

Obsah

Úvod	8
1 Úvod do DEA modelov	10
1.1 Symbolika a základné pojmy	10
1.2 Aditívny model	14
1.2.1 Aditívny model s váhami	15
1.3 SBM model	17
2 Vlastnosti vybraných DEA modelov	20
2.1 Aditívny model	20
2.1.1 Aditívny model s váhami	22
2.2 SBM model	31
3 Porovnanie vybraných DEA modelov	35
3.1 Príklady	36
3.2 Zhrnutie	47
Záver	55
Zoznam použitej literatúry	57
Príloha A	59
A Zdrojové kódy programov pre MATLAB	59
A.1 Aditívny model	59
A.2 SBM model	65
Príloha B	69
B Dáta k príkladu s bankami	69

Úvod

V dnešnej dobe je efektívnosť jednou z podstatných vlastností, ktoré sledujeme nielen pri vlastnej práci alebo pri práci našich kolegov, ale aj pri narábaní s verejnými financiami či pri analyzovaní efektívnosti iných výrobných a nevýrobných procesov v rámci istej rozhodovacej jednotky. Pojem efektivita je teda čoraz viac skloňovaný v našich súkromných životoch, ale aj v podnikateľskej či štátnej sfére. Práve efektivita je kľúčovým bodom záujmu obálkovej analýzy dát (Data Envelopment Analysis).

DEA modely sa zaoberajú zisťovaním miery efektívnosti danej rozhodovacej jednotky (Decision Making Unit) vzhľadom na istú skupinu producentov pomocou lineárneho programovania. Zároveň pomáhajú aj pri hľadaní konkrétnych nedostatkov v premieňaní vstupov na výstupy voči efektívnemu vzoru, ktorý vznikol určitou kombináciou efektívnych jednotiek danej skupiny.

Priamej aplikácii DEA modelov na reálne situácie sa venujú tisíce článkov, ako napríklad [8], [13] a [15], čo je dôkazom ich značnej využiteľnosti a opodstatnenosti pri riadiacich a rozhodovacích procesoch.

V súčasnosti existujú v rámci teórie DEA rôzne modely, ktoré sú bohato prezentované v množstve kníh a článkov. Zrejme jedinou publikáciou v slovenskom jazyku je [7], ktorá spolu s [3], tvorili základný zdroj teoretických poznatkov potrebných pri tejto práci.

Medzi základné modely patria zaužívané CCR modely, pomenované podľa autorov Charnesa, Coopera, Rhodesa, a BCC modely, nazvané podľa autorov Bankera, Charnesa a Coopera. Zaraďujú sa do kategórie orientovaných modelov, čiže úlohu lineárneho programovania v tomto prípade tvorí minimalizácia vstupov pri konštantných výstupoch alebo maximalizácia výstupov pri konštantných vstupoch. Na druhej strane existujú modely, ktoré neuprednostňujú výstupy pred vstupmi ani vstupy pred výstupmi, a tie sa nazývajú neorientované. Do tejto kategórie patria napríklad aditívny a SBM model, na ktoré sa zameriame v našej práci. Vo všeobecnosti je SBM model v porovnaní s aditívnym modelom používanejší kvôli nedostatkom, ktorými aditívny model disponuje. Práve eliminácia jednej zo slabých stránok tohto modelu bola podnetom k vytvoreniu určitej modifikácie aditívneho modelu, konkrétne aditívneho modelu s váhami. Natískajú sa tak prirodzené otázky: Do akej miery sa touto modifikáciou po-

silnilo využitie aditívneho modelu voči SBM modelu? Aké následky má rôzna voľba váh v aditívnom modeli na výsledky? Vieme určiť váhy tak, aby sa odstránili aj ostatné nedostatky tohto modelu? Ak áno, aké sú potom rozdiely medzi výsledkami aditívneho modelu s váhami a SBM modelu? Získanie odpovedí nielen na tieto otázky bolo motiváciou k spracovaniu témy tejto práce.

Cieľom našej práce bolo teda teoreticky a empiricky porovnať vlastnosti SBM modelu a aditívneho modelu s rôznym typom váh. Teoretické poznatky z DEA modelov ilustrujeme na konkrétnych, vhodne zvolených súboroch dát rôznej veľkosti, čomu predchádzalo naprogramovanie jednotlivých modelov v softvéri MATLAB. Následne analyzujeme výsledky pozorovaní, na základe ktorých odvodíme nové vzťahy a vlastnosti uvedených modelov.

Našu prácu sme rozdelili do teoretickej a praktickej časti. Teoretická časť práce sa skladá z dvoch kapitol. V prvej kapitole vymedzíme symboliku, stručne vysvetlíme základné pojmy týkajúce sa obálkovej analýzy dát a uvedieme definície vybraných DEA modelov. Nasledujúcu kapitolu venujeme vlastnostiam aditívneho modelu a SBM modelu. V tejto kapitole uvádzame aj dôkazy ďalších vlastností týchto modelov, na ktoré sme prišli pri ich empirickom porovnávaní. Druhá, praktická časť práce je venovaná demonštrácii rozdielov vybraných modelov DEA. Na jednoduchých, vlastných príkladoch s vhodne zvolenými súbormi dát rozličnej veľkosti, ale aj na rozsiahlejšom príklade s reálnymi dátami sme ilustrovali rozdiely hodnôt účelových funkcií a mier efektívít, ďalej sme pozorovali rozdiely v ich efektívnych vzoroch, či v poradí útvarov zoradených na základe ich efektívít. Sledovali sme aj dopad rozlične nastavených váh aditívneho modelu na výsledky našich pozorovaní. Výsledky nami naprogramovaných modelov sme kontrolovali s výsledkami solvera [10].

1 Úvod do DEA modelov

Cieľom našej práce je demonštrovať rozdiely aditívneho a SBM modelu, v anglickej literatúre uvádzaný aj ako *Slacks Based Measure*. Z toho dôvodu venujeme úvodnú kapitolu predovšetkým základnej symbolike a definíciám potrebným k ďalšiemu použitiu teórie DEA modelov, pričom sa zameriame najmä na vybrané modely. Ako už je vyššie spomenuté, nasledujúca kapitola je spracovaná najmä podľa učebného textu [7], ale teoretické poznatky sme čerpali aj z publikácií [3], [11], [14] a zo stránky [5].

1.1 Symbolika a základné pojmy

V súčasnosti sa ľudia stále viac zaoberajú problematikou efektívneho využívania zdrojov či už v súkromnom sektore, vo verejných financiách alebo v mnohých iných oblastiach. Práve skúmaniu efektívnosti a efektivity sa primárne venuje obálková analýza dát prostredníctvom DEA modelov, ktoré sú postavené na teórii lineárneho programovania. Východiskovým bodom sú dáta o vstupoch a výstupoch porovnávaných útvarov.

Podstatu DEA modelov by sme mohli chápať ako určovanie relatívnej efektívnosti jednotlivých producentov v rámci určitej skupiny na základe hodnotenia a porovnávania ich *technológií*. Technológiou v tomto prípade rozumieme spôsob, akým subjekty vytvárajú výsledné produkty zo svojich zdrojov. Z toho dôvodu je dôležitým predpokladom DEA modelov homogénnosť danej skupiny producentov, ktorá hovorí o tom, že môžeme porovnávať len útvary s rovnakým druhom výrobnéj alebo nevýrobnéj činnosti, ako napríklad školy, pobočky obchodných reťazcov, nemocnice a mnohé iné. Modely DEA sa ale prevažne využívajú pri nevýrobných procesoch, ktorým sa budeme venovať aj v našej práci. Napríklad by sme sa mohli bližšie pozrieť na efektívnosť štátnych nemocníc v počte ošetrovaných pacientov, pričom by sme za vstupy charakterizujúce činnosť nemocníc označili výdavky spojené so zamestnávaním lekárov a s nemocničným vybavením.

V našej práci sa zaoberáme skúmaním n organizačných útvarov, ktoré sa označujú aj ako *DMU*, z anglického Decision Making Unit. Pre číslovanie jednotlivých DMU používame index $j \in \{1, \dots, n\}$. Avšak aby sme odlíšili práve skúmaný útvar od zvyšných v skupine, označujeme ho ako DMU_o , pre $o = 1, \dots, n$. Už z vyššie uvedeného

príkladu môžeme dedukovať, že činnosť všetkých DMU_j popisujeme hodnotami každého z m vstupov, resp. každého z s výstupov danej jednotky. Označme x_{ij} množstvo spotrebovaného i -teho vstupu j -teho subjektu a symbolom y_{rj} budeme rozumieť vyprodukované množstvo r -tého výstupu j -teho subjektu, pre $i \in \{1, \dots, m\}$ a $r \in \{1, \dots, s\}$. Všetky príklady v našej práci sa budú zaoberať len prípadmi, keď producent zužitkuje isté nezáporné množstvo vstupov, aby vytvoril nejaké nezáporné množstvo výstupov. Pričom budeme očakávať, že producent spotrebuje nenulové množstvo aspoň jedného vstupného faktora a zároveň vyrobí nenulové množstvo aspoň jedného výstupného faktora. Takto dostaneme vektory vstupov $x_j \in \mathbb{R}_+^m$ a vektory výstupov $y_j \in \mathbb{R}_+^s$, ktoré môžeme zapísať v nasledovnej forme:

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Inšpirujúc sa [7, str. 61], môžeme pre ďalšie potreby našej práce zapísať údaje o vybranej skupine útvarov ako množinu

$$Z = \{(x_j, y_j) \mid j = 1, \dots, n\}.$$

Pri vytváraní modelov v empirickej časti našej práce využívame takzvané matice vstupov X a matice výstupov Y , ktorých jednotlivé stĺpce predstavujú vektory vstupov x_j , resp. vektory výstupov y_j , danej jednotky DMU_j , pre $\forall j = 1, \dots, n$, čiže dostávame:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \dots & y_{rj} & \dots & y_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sj} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}.$$

S definovaním efektívnosti úzko súvisí aj mikroekonomický pojem *množina produkčných možností* G zahŕňajúca všetky spôsoby, ktorými môže DMU_j vyrobiť y_j výstupov z x_j vstupov. Pre potreby DEA modelov však používame len jej aproximáciu M , ktorá

má dva základné tvary - pre variabilné a pre konštantné výnosy z rozsahu, označenie M_{VRS} , resp. M_{CRS} . Skratku CRS pre konštantné a VRS pre variabilné výnosy z rozsahu budeme používať v našej práci častejšie. Na modely sa dá hľadieť cez multiplikatívny a cez obáľkový prístup, ale keďže v oboch prípadoch modely reprezentujú navzájom duálne úlohy lineárneho programovania, čo je ukázané v [7], budeme ďalej rozoberať ústredné pojmy DEA modelov len z obáľkového prístupu. Aproximácie M_{CRS} a M_{VRS} predstavujú najmenšie množiny generované množinou Z spĺňajúce nasledovné vlastnosti podľa [7, kap. 5]:

- (A1) $Z \in M$. Všetky body zo Z , reprezentujúce konkrétne subjekty, patria do M .
- (A2) M je konvexná, čiže všetky konvexné kombinácie bodov patriaciach do M sú tiež obsiahnuté v množine M .
- (A3) Ak bod $(x_A, y_A) \in M$ vyjadruje množstvo vstupov a výstupov subjektu A , potom do množiny M patria aj všetky body $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s}$ predstavujúce subjekty, ktoré z väčšieho, resp. rovnakého, množstva vstupov vyprodukurujú menej, resp. rovnako veľa, výstupov.

Pre M_{CRS} však platí ešte jedna axioma, ktorá vyjadruje charakteristickú vlastnosť konštantných výnosov z rozsahu. Konkrétne, ak c -násobne zväčšíme množstvo využívaných prostriedkov, c -násobne sa zväčší aj množstvo vyrobených výstupov, čo sa dá zapísať nasledovne:

- (A4) Ak $(x_A, y_A) \in M$, potom $(cx_A, cy_A) \in M$, pre ľubovoľné $c > 0$.

Analyticky môžeme množinu M_{CRS} podľa [7, kap. 5] zapísať nasledovne:

$$M_{CRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0\}. \quad (1)$$

Analytický zápis množiny M_{VRS} je obdobný ako vzťah (1), avšak pridávame ešte podmienku

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1. \quad (2)$$

Takto skonštruované množiny M_{CRS} a M_{VRS} tvoria takzvanú *obáľku* dát daných producentov, z čoho vyplýva aj názov celej problematiky DEA.

V nasledujúcej časti práce hlbšie objasníme pojmy efektívnosť a efektívnosť v zmysle obáľkových modelov, pričom vychádzame najmä z ústredného pojmu viackriteriálnej optimalizácie tzv. *Pareto optimality*, ktorá je pre DEA modely sformulovaná v [7, str. 171]. *Efektívnymi* sa nazývajú tie body $(\hat{x}, \hat{y}) \in M$, ku ktorým nedokážeme v množine M nájsť žiadne iné body (x, y) rôzne od (\hat{x}, \hat{y}) , pre ktoré by platilo $x \leq \hat{x}$ a $y \geq \hat{y}$. Čo znamená, že v množine M neexistuje iný útvar, ktorý by bol schopný z nižšieho alebo rovnakého množstva vstupov vyprodukovať vyššie alebo rovnaké množstvo výstupov. Efektívne body (\hat{x}, \hat{y}) teda tvoria takzvanú *hranicu efektívnosti*, označenie H_E . V opačnom prípade, ak útvar má rezervy či už v príliš veľkom množstve minútých zdrojov alebo v nedostatočnom množstve výsledných produktov, hovoríme o *neefektívnom* útvaru.

Hranicu ∂M množiny M tvorí okrem hranice efektívnosti, aj *hranica pseudoefektívnosti*, označenie H_P , ktorá môže určitým typom DEA modelov spôsobovať ťažkosti. Hranicu pseudoefektívnosti totiž predstavujú body z hranice ∂M , ktoré nie sú efektívne. V jednej veličine teda môžu dosahovať rovnaké hodnoty ako efektívne útvary, avšak v ostatných veličinách majú isté nedostatky, čiže ich nemôžeme považovať za efektívne.

Ako sme už spomínali vyššie, objektom nášho záujmu nebude len rozčlenenie útvarov na efektívne a neefektívne, ale zameriame sa aj na zistenie ich miery efektívnosti, resp. efektivity, ktorú označíme E . Pod efektivitou E chápeme bezrozmernú veličinu z intervalu $[0, 1]$, ktorá hovorí o tom, do akej miery pracuje daná jednotka efektívne v porovnaní s ostatnými producentmi v skupine. Spôsoby výpočtu efektivity E jednotlivých DMU sa však v niektorých modeloch líšia. Môžeme naraziť aj na problém, keď takto definovaná miera efektívnosti E nie vždy vyplýva priamo z riešenia úlohy lineárneho programovania prislúchajúcej danému modelu. Uvidíme, že napríklad v prípade aditívneho modelu musíme vykonať ešte doplnujúce výpočty, aby sme mohli z optimálneho riešenia príslušnej úlohy získať hodnotu interpretovateľnú ako efektivitu.

Nemenej podstatným pojmom je *efektívny vzor* daného neefektívneho útvaru, ktorým rozumieme bod z hranice efektívnosti s menšími alebo rovnakými vstupmi a väčšími alebo rovnakými výstupmi. Každý efektívny vzor vieme v prípade CRS vyjadriť ako určitú kónickú kombináciu efektívnych útvarov z množiny Z a v prípade VRS sa

dá efektívny vzor sformulovať ako určitá konvexná kombinácia efektívnych jednotiek z množiny Z .

V tejto súvislosti zohrávajú kľúčovú úlohu *slacky*, ktoré sú vyjadrené vektormi rezerv vstupov $s^x \in \mathbb{R}_+^m$ a vektormi rezerv výstupov $s^y \in \mathbb{R}_+^s$. Slacky vstupov, resp. výstupov, daného producenta sú nezáporné vektory, ktorých zložky podľa [3] vyjadrujú prebytok jednotlivých vstupov, resp. deficit jednotlivých výstupov, v porovnaní s jeho efektívnym vzorom. Tak ako miera neefektívnosti, aj určovanie efektívnych vzorov sa môže líšiť pre rôzne modely. Vybrané modely, na ktoré sa zameriavame v našej práci, určujú efektívne vzory daného útvaru maximálnym posunom v smere znižovania vstupov alebo v smere zväčšovania výstupov. Očakávame teda, že efektívne útvary budú mať všetky zložky vektorov s^x a s^y nulové.

1.2 Aditívny model

Ako bolo písané v úvode našej práce, budeme sa venovať výlučne dvom neorientovaným modelom - aditívnemu a SBM modelu - ktoré sú schopné zachytávať neefektívnosť vo vstupoch a zároveň vo výstupoch. Ako prvý rozoberieme aditívny model, ktorý bol podľa [2] prvý raz sformulovaný Charnesom v roku 1985. Presnejšie opíšeme niekoľko jeho variánt, ktorých detailné odvodenie je popísané v [7, kap. 8].

Na začiatok uvádzame formuláciu úlohy lineárneho programovania zodpovedajúcu aditívnemu modelu s CRS pre vybraný DMU_o .

$$\max_{\lambda, s^x, s^y} A_o := e_m^T s^x + e_s^T s^y \quad (3)$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^x = x_o,$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^y = y_o, \quad (4)$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0,$$

kde e_m a e_s predstavujú vektory samých jednotiek rozmeru m , resp. s . Ako sme už uviedli, zo základného aditívneho modelu nemožno odčítať efektívnosť E v typickom, ekonomicky interpretovateľnom tvare ako veličinu z $[0, 1]$. Trochu iné ponímanie miery efektívnosti je však možné vyzistiť z optimálnej hodnoty účelovej funkcie úlohy LP uvedenej v (3), ktorú budeme označovať A_o^* . Takto definovaná účelová funkcia reprezentuje

maximalizáciu súčtu všetkých slackov, z čoho môžeme dedukovať, že ak sú slacky určitého DMU_o nulové, DMU_o predstavuje efektívny útvar. Efektívny producent sa teda nachádza na efektívnej hranici, ak prebytok jeho vstupov, resp. deficit jeho výstupov je nulový. Všimnime si, že hodnoty účelovej funkcie ležia v intervale $[0, \infty)$. Pre neefektívne útvary dostaneme tým vyššiu optimálnu hodnotu účelovej funkcie A_o^* , čím viac je producent neefektívny, teda čím ďalej sa nachádza od svojho efektívneho vzoru.

Geometricky sa dá účelová funkcia interpretovať už naznačeným spôsobom ako maximálny možný posun daného útvaru DMU_o v smere znižovania vstupov a zvyšovania výstupov o hodnotu jeho rezerv s^x, s^y . Od posunu tiež požadujeme, aby útvar posunutý v smere $(-s^x, s^y)$ stále patril do množiny M . Z čoho sa odvíjajú podmienky úlohy LP pre aditívny model s konštantnými výnosmi z rozsahu v (4), ktoré sa podobajú vzťahu (1), reprezentujúcemu analytický zápis množiny M_{CRS} .

V prípade variabilných výnosov z rozsahu sú podmienky úlohy LP obdobne zapísané formou analytického zápisu množiny M_{VRS} , tým pádom len doplníme predchádzajúcu sústavu podmienok o obmedzenie (2).

Vyššie sme už mierne načrtli všeobecný spôsob určovania efektívnych vzorov. Ak $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ je optimálne riešenie prislúchajúce optimálnej hodnote A_o^* účelovej funkcie (3), bod (\hat{x}, \hat{y}) , ktorý predstavuje určitú projekciu na efektívnu hranicu v tvare:

$$\hat{x} := X\lambda^* = x_o - s^{x*}, \quad \hat{y} := Y\lambda^* = y_o + s^{y*}, \quad (5)$$

považujeme podľa [3] za efektívny vzor DMU_o .

1.2.1 Aditívny model s váhami

Ďalším typom aditívneho modelu, ktorý uvedieme, bude *aditívny model s váhami*. Motiváciou k odvodeniu tohto modelu je podľa [7] odstránenie jedného z jeho hlavných nedostatkov, konkrétne závislosti účelovej funkcie od voľby jednotiek, v ktorých sú merané dáta DMU_j , pre $j = 1, \dots, n$.

Jedinou zmenou v porovnaní s predchádzajúcimi obálkovými aditívnymi modelmi je, že v účelovej funkcii maximalizujeme vážený priemer slackov, čiže:

$$\max_{\lambda, s^x, s^y} A_o^W := \left\{ \sum_{i=1}^m w_i^x s_i^x + \sum_{r=1}^s w_r^y s_r^y \right\}, \quad (6)$$

pričom w_i^x , w_r^y reprezentujú i -tu a r -tú zložku vektorov váh w^x , w^y prislúchajúcich vektorom rezerv s^x , s^y . Konkrétne hodnoty zložiek vektorov w_i^x a w_r^y stanovíme najprv apriórne ako kladné hodnoty závisiace od údajov, ktoré máme o daných DMU k dispozícii.

Pretože vektory w^x a w^y sú kladné, aj pri aditívnom modeli s váhami platí, že hodnota účelovej funkcie leží v intervale $[0, \infty]$ a zároveň sa efektívnosť dosahuje pri nulových hodnotách slackov. Dokonca budeme vidieť, že účelové funkcie s niektorým typom váh dosahujú hodnoty z intervalu $[0, 1]$, čomu ale venujeme osobitnú časť 2.1.1.

Váhy vyjadrujeme podľa [7, kap. 8] pomocou mierne upravených, prevrátených hodnôt R_i^x , R_r^y . Presnejšie:

$$w_i^x := \frac{1}{(m+s)R_i^x}, \quad i = 1, \dots, m, \quad w_r^y := \frac{1}{(m+s)R_r^y} \quad r = 1, \dots, s.$$

Pričom hodnoty R_i^x a R_r^y volíme tak, aby boli vyjadrené v rovnakých jednotkách ako k nim prislúchajúce vstupy, respektíve výstupy. V uvedenom zdroji autorka navrhuje nasledovné R_i^x , R_r^y :

$$(a) \quad R_i^x = \max_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj}.$$

$$(b) \quad R_i^x = \frac{1}{n} \sum_j x_{ij}, \quad R_r^y = \frac{1}{n} \sum_j y_{rj}.$$

(c) R_i^x , resp. R_r^y predstavujú určitý rozsah hodnôt i -teho vstupu, resp. r -teho výstupu, na základe čoho dostala táto verzia aditívneho modelu podľa [4] príznačné pomenovanie *Range Adjusted Measure (RAM)*.

$$R_i^x = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij},$$

$$R_r^y = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj}.$$

(d) R_i^x , resp. R_r^y predstavujú štandardné odchýlky i -teho vstupu, resp. r -teho výstupu.

Teda konkrétne:

$$R_i^x = \sigma_i^x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

$$R_r^y = \sigma_r^y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{rj} - \bar{y}_r)^2}, \quad \bar{y}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{rj}.$$

Nakoniec uvedieme ešte jeden typ aditívneho modelu, ktorý bol podľa [2] navrhnutý v roku 1985 Charnesom a kol. Dávame do pozornosti, že váhy nie sú dané apriórne, ale menia sa s každou zložkou vektora vstupov, resp. výstupov. Primárnym cieľom bolo taktiež vyriešenie problému závislosti základného aditívneho modelu od voľby jednotiek. Na základe článku [2] riešime optimalizačný problém s nasledovnou účelovou funkciou:

$$\max_{\lambda, s^x, s^y} Q_o := \frac{1}{(m+s)} \left(\sum_i \frac{s_i^x}{x_{io}} + \sum_r \frac{s_r^y}{y_{ro}} \right), \quad (7)$$

pri rovnakých podmienkach ako v (4), resp. doplnených o (2) pre VRS.

V podkapitole 2.1 bližšie uvedieme pozitívne ale aj negatívne vlastnosti základného aditívneho modelu ako aj spôsob, ktorým možno dodefinovať mieru efektívnosti E vo vhodnej podobe. Ďalej sa bližšie pozrieme na vlastnosti a vzťahy medzi hodnotami účelových funkcií aditívnych modelov s určitým typom váh, pričom dané úvahy sformulované do tvrdení aj dokážeme.

1.3 SBM model

Druhým neorientovaným modelom, ktorému sa budeme v našej práci venovať je SBM model zo skupiny aditívnych modelov, ktorý bol podľa [7] pôvodne uvedený Tonem v roku 1997. Názov Slacks Based Measure vychádza z faktu, že mieru efektívnosti podľa SBM určujú veľkosti rezerv.

V podkapitole 1.2 sme uviedli isté nedokonalosti aditívneho modelu, ako nevhodná forma účelovej funkcie a jej závislosť na voľbe jednotiek, ktorých eliminovanie bolo hlavnou motiváciou pre odvodenie SBM modelu. Verzia SBM modelu vo forme úlohy lineárneho programovania, ktorú využívame pri výpočtoch v kapitole 3, vychádza zo základného SBM modelu sformulovaného v [3, kap. 4.4]. Takto zostrojený model je ale úlohou zlomkového programovania, dá sa však podľa [3] ukázať, že daná úloha je zároveň ekvivalentná s ľahšie riešiteľnou úlohou LP, ktorú uvádzame nižšie. Naopak, keď budeme hovoriť o vlastnostiach tohto modelu, lepšie nám poslúži jeho základný tvar.

Presná formulácia optimalizačného problému v prípade základného SBM modelu

pre isté DMU_o je nasledovná:

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} \rho_o := \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{y_{ro}}}, \quad (8)$$

pri podmienkach totožných ako v (4) pre CRS, respektíve pridaním podmienky (2) pre VRS. Pre SBM model teda platí, že priamo z optimálnej hodnoty účelovej funkcie (8) dokážeme odčítať ekonomicky interpretovateľnú mieru efektívnosti E . Táto skutočnosť je dokázaná v učebných textoch [7, kap. 11]. Pozorujeme, že čím sú väčšie rezervy vstupov, resp. výstupov, tým je hodnota ρ_o menšia, pričom najmenšia dosiahnuteľná hodnota $\rho_o = 0$. Taktiež vidíme, že maximálna hodnota $\rho_o = 1$ sa dosahuje len v prípade nulových slackov vstupov a výstupov. Hodnota účelovej funkcie teda disponuje klesajúcou závislosťou od veľkosti slackov, ktorú sme si všimli aj pri aditívnom modeli. Optimálna hodnota účelovej funkcie ρ_o^* už v porovnaní s aditívnym modelom predstavuje bezrozmernú veličinu z intervalu $[0, 1]$, a teda ju môžeme interpretovať ako mieru efektívnosti. Predchádzajúce úvahy implikujú, že za efektívne útvary v zmysle SBM modelu označíme len tie, ktorých optimálna hodnota účelovej funkcie $\rho_o^* = 1$ a ktoré už nevieme viac posunúť v smere $(-s^x, s^y)$ tak, aby ostali v množine M_{CRS} , resp. M_{VRS} .

Dávame do pozornosti aj priamočiary fakt vychádzajúci z predpisu účelovej funkcie. Konkrétne ide o to, že vstupné dáta musia byť nenulové, resp. vzhľadom na podmienku, ktorú sme definovali ešte v úvode kapitoly, musia byť kladné. Ostáva však otázkou, čo robiť v prípade nulových hodnôt vstupov alebo výstupov. Odpoveď uvedieme v podkapitole 2.2 spolu s ďalšími vlastnosťami SBM modelu.

Ako sme už avizovali, pre výpočty v empirickej časti práce využívame určitú modifikáciu SBM modelu v tvare úlohy LP, ktorú je možné nájsť spolu s odvodením napríklad v [3]. Pri konštantných výnosoch z rozsahu riešime pre dané DMU_o minimalizačnú

úlohu typu:

$$\begin{aligned}
\min_{t, \Lambda, S^x, S^y} \quad & \tau_o := t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S_i^x}{x_{io}}, \\
s.t. \quad & t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{S_r^y}{y_{ro}} = 1, \\
& \sum_{j=1}^n x_j \Lambda_j + S^x = t x_o, \\
& \sum_{j=1}^n y_j \Lambda_j - S^y = t y_o, \\
& \Lambda, S^x, S^y \geq 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

V prípade variabilných výnosov len pridáme modifikáciu podmienky (2) pre takto definovaný model SBM:

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j = t. \tag{10}$$

Na prvý pohľad významne odlišné účelové funkcie uvedených modelov však dosahujú rovnaké hodnoty $\rho_o = \tau_o$ a zároveň sa vieme dopracovať k pôvodným premenným základného SBM modelu nasledovnou transformáciou:

$$\lambda^* := \frac{\Lambda^*}{t^*}, \quad s^{x*} := \frac{S^{x*}}{t^*}, \quad s^{y*} := \frac{S^{y*}}{t^*}, \tag{11}$$

kde $(t^*, \Lambda^*, S^{x*}, S^{y*})$ je optimálna hodnota úlohy (9) pre CRS, v prípade VRS doplnenej o podmienku (10). Z predchádzajúceho vyplýva, že aj pre takto definovanú hodnotu účelovej funkcie τ_o bude platiť, že ak je útvar efektívny, $\tau_o^* = 1$, inak bude $\tau_o^* \in [0, 1)$.

Čo sa týka efektívnych vzorov jednotlivých DMU_o , algoritmus je podobný ako v prípade aditívneho modelu, ktorý uvádzame v (5), pričom dosádzame optimálne riešenie základného SBM modelu $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ vypočítané na základe vzťahov (11). Samotné body (\hat{x}, \hat{y}) sa však spravidla nemusia zhodovať už len z dôvodu rozdielnych koeficientov pri slackoch v účelovej funkcii.

2 Vlastnosti vybraných DEA modelov

V tejto kapitole vymedzíme základné vlastnosti vybraných DEA modelov, z ktorých niektoré sme už spomenuli v kapitole 1. Pri spracovaní tejto časti vychádzame najmä z textu [7]. Kapitola je však doplnená o ďalšie vlastnosti a vzťahy SBM modelu a aditívnych modelov s rôznym typom váh, ktoré sme odvodili jednak na základe našich vlastných zistení a na druhej strane aj vďaka článkom spomínaných nižšie.

Najprv ale v Tabuľke 1 uvádzame krátky prehľad modelov, ktorými sa zaoberáme v našej práci spolu s pridelenými skratkami pre jednotlivé modely. Naším cieľom bolo zvoliť skratky výstižne a jednoznačne, pričom sme vychádzali z definícií modelov v podkapitolách 1.2 a 1.3.

Tabuľka 1: Zoznam použitých modelov a pridelené skratky

Typ modelu	Skratka
Aditívny model bez váh	AD_z
Aditívny model s váhami podľa a)	AD_{max}
Aditívny model s váhami podľa b)	AD_{avg}
Aditívny model s váhami podľa c)	RAM
Aditívny model s váhami podľa d)	AD_{sd}
Aditívny model s váhami podľa (7)	AD_{post}
SBM model	SBM

Ešte podotýkame, že v našej analýze sa v prípade všetkých modelov zaoberáme dvomi variantami výnosov z rozsahu, konkrétne CRS a VRS.

2.1 Aditívny model

Ako prvému sa budeme venovať aditívnemu modelu. Uvedieme krátke porovnanie pozitívnych a negatívnych stránok tohto modelu, či už s konštantnými alebo s variabilnými výnosmi z rozsahu.

K výhodám aditívneho modelu v zmysle úlohy LP určenej vzťahmi (3) a (4), prípadne doplnenej o (2) pre VRS, patria nasledovné vlastnosti:

- Z optimálnej hodnoty účelovej funkcie dokážeme zistiť efektívnosť. Čiže ak optimálna hodnota účelovej funkcie istého DMU_o je nulová, daný útvar je efektívny. V prípade nenulovej optimálnej hodnoty účelovej funkcie je DMU_o neefektívny.
- Účelová funkcia je monotónna, pretože hodnota A_o pre neefektívne útvary rastie so stúpajúcimi hodnotami rezerv s^x a s^y .
- Doplnkové premenné s^x a s^y posúvajú DMU_o na efektívnu hranicu H_E do svojho efektívneho vzoru (\hat{x}, \hat{y}) , vďaka čomu optimálna hodnota účelovej funkcie zachytáva všetku neefektívnosť. Z toho dôvodu nemôže byť pseudoefektívny útvar v prípade aditívneho modelu mylne označený za efektívny.
- Priamo riešením základnej úlohy LP dostaneme parameter λ^* , ktorý určí efektívny vzor pre daný DMU_o podľa vzťahu (5).
- Aditívny model je v prípade variabilných výnosov z rozsahu invariantný na posun. Posun je reprezentovaný pričítaním i -tej zložky reálneho vektora Δx , predstavujúceho zmenu vstupov, k i -tej zložke vektora vstupov každého útvaru, pre $i = 1, \dots, m$. Analogicky môžeme modifikovať aj výstupy, a teda k r -tej zložke vektora výstupov každého útvaru pripočítame r -tú zložku reálneho vektora Δy , predstavujúceho zmenu výstupov, pre $r = 1, \dots, s$. Invariantnosť modelu vzhľadom na posun potom implikuje, že takto pozmenené dáta nezmenia hodnotu účelovej funkcie pre jednotlivé útvary a ani ich roztriedenie na efektívne a neefektívne útvary. Táto vlastnosť by mohla dobre poslúžiť napríklad v prípade záporných dát.

Naopak za nedostatky aditívneho modelu považujeme jeho nasledovné vlastnosti:

- Hodnoty účelovej funkcie ležia v intervale $[0, \infty)$, čo nám znemožňuje odčítať priamo z výsledkov modelu efektivitu chápanú ako bezrozmernú veličinu z $[0, 1]$. Preto je zaujímavé, ba až potrebné, pozrieť sa na spôsob, ktorým by sa dala efektivita E dodefinovať. Detailnejšie ho rozoberieme ďalej v tejto podkapitole.
- Aditívny model nie je invariantný na zmenu jednotiek. Zmenou jednotiek vstupov myslíme pre násobenie i -tej zložky vektora vstupov každého útvaru kladnou konštantou α_i , pre $i = 1, \dots, m$. Obdobne zmenou jednotiek výstupov rozumieme

prenásobenie r -tej zložky vektora výstupov každého útvaru kladnou konštantou β_r , pre $r = 1, \dots, s$. Takáto modifikácia dát môže v prípade aditívneho modelu spôsobiť zmenu hodnoty účelovej funkcie. Tu treba podotknúť, že zmena jednotiek v aditívnom modeli zachováva rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne. V praxi to znamená, že model bude skreslený jednotkami, v ktorých sú merané vstupy a výstupy. Aj druhý nedostatok aditívneho modelu sa dá však eliminovať vhodne zvolenými kladnými váhami v účelovej funkcii, čo sme spomínali v časti 1.2.1.

- Aditívny model s CRS nie je invariantný vzhľadom na posun.

Poslednou, ale veľmi dôležitou časťou, je nájdenie spôsobu, ktorým by bolo možné preškálovať získanú mieru efektívnosti v aditívnom modeli na efektivitu v ekonomicky interpretovateľnej podobe. Existuje viacero spôsobov na výpočet efektivity, napr. v [13, kap. 4] sú uvedené tri metódy využívajúce či už konkrétnu optimálnu hodnotu účelovej funkcie alebo konkrétne optimálne riešenia danej úlohy. V našej práci využijeme spôsob opísaný univerzálne pre všetky modely v učebných textoch [7, str. 115, Def. 20], ktorý definuje mieru efektívnosti ako priemer parciálnych efektívít. Parciálnou efektivitou i -teho vstupu, pre $i = 1, \dots, m$, rozumieme pomer hodnoty i -teho vstupu efektívneho vzoru a hodnoty i -teho vstupu daného DMU_o , čiže $\frac{\hat{x}_i}{x_{io}}$. Pozorujeme, že uvedený pomer je číslo z intervalu $[0, 1]$. Úvahy pre parciálnu efektivitu r -tého výstupu, kde $r = 1, \dots, s$, sú analogické, a preto dostaneme pomer hodnoty r -tého výstupu pozorovaného DMU_o a hodnoty r -tého výstupu jeho efektívneho vzoru, teda $\frac{y_{ro}}{\hat{y}_r}$. Následne vieme výpočet miery efektivity pre aditívny model zapísať ako:

$$\rho_o^A := \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro}}{\hat{y}_r} \right). \quad (12)$$

Nepochybne môžeme o takto vypočítanej efektivite tvrdiť, že je invariantná na zmenu jednotiek. Súčasne pozorujeme, že jej hodnota pre neefektívne subjekty klesá so stúpajúcimi vstupmi alebo znižujúcimi sa výstupmi, čo implikuje jej monotónnosť.

2.1.1 Aditívny model s váhami

V nasledujúcej časti bližšie rozoberieme vybrané vlastnosti určitých aditívnych modelov s váhami, ktorých dôkazy sú buď naše vlastné alebo inšpirované článkami [1] a [6] do-

plnené o podrobnejšie objasnenie jednotlivých krokov a o zdôraznenie opodstatnenosti hlavného predpokladu.

Modifikácie základného aditívneho modelu pomáhajú riešiť niektoré jeho slabé stránky, ale na druhej strane môžeme vidieť, že modely AD_{max} , AD_{avg} a AD_{post} pre VRS strácajú svoju invariantnosť na posun. Uvedená vlastnosť bola pre základný aditívny model s VRS dokázaná v [7, str. 111]. V dôkaze autorka využíva fakt, že zmena dát reprezentovaná vektormi Δx a Δy vystupuje iba v podmienkach prípustnosti, ktoré sa vďaka podmienke (2) napriek zmene dát nelíšia. Avšak pre aditívne modely s váhami nastáva iná situácia, v ktorej vektory predstavujúce zmenu dát vystupujú aj v účelových funkciách úloh LP prislúchajúcich daným modelom. Z toho dôvodu sa môže hodnota účelovej funkcie pre modely AD_{max} , AD_{avg} a AD_{post} vplyvom zmeny dát odlišovať. Absencia tejto vlastnosti však v našom prípade nespôsobuje problémy.

Ako sme už načrtli, účelová funkcia aditívneho modelu (6) pri určitej voľbe váh dosahuje pre VRS hodnoty z intervalu $[0, 1]$. Tieto verzie aditívneho modelu preto disponujú ďalšími dvomi kľúčovými vlastnosťami. Prvou je invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek a druhou je vhodné škálovanie účelovej funkcie. Avšak upozorňujeme, že efektivita sa dosahuje pri nulovej hodnote účelovej funkcie. Pre naše ďalšie pozorovania sú uvedené dve vlastnosti kľúčové, ale keďže invariantnosť na zmenu jednotiek pre aditívny model s váhami je sformulovaná a dokázaná napríklad v [7, str. 106], venujeme sa len vhodnému škálovaniu účelovej funkcie pre určité modely, konkrétne pre modely AD_{max} a RAM. Túto vlastnosť pre dané modely uvádzame nižšie vo forme tvrdení. Mierne modifikovaný obsah tvrdenia pre model RAM spolu s načrtnutým dôkazom môžeme nájsť napríklad v článkoch [1] a [6]. Autori v uvedených článkoch opisujú ďalší spôsob dopočítania miery efektivity pre model RAM s VRS, kde využívajú hodnotu účelovej funkcie úlohy LP prislúchajúcej danému modelu. V dôkazoch však mimo iného nebola evidentná opodstatnenosť podmienky (2), t.j. variabilných výnosov z rozsahu, a preto, inšpirujúc sa spomínanými článkami, uvádzame našu vlastnú, podrobnejšiu verziu dôkazu tvrdenia týkajúceho sa rozsahu hodnôt účelovej funkcie pre model RAM. Najprv ale uvádzame náš vlastný dôkaz rozsahu hodnôt účelovej funkcie pre model AD_{max} .

Tvrdenie 2.1 (Hodnoty AD_{max} účelovej funkcie). *Hodnoty účelovej funkcie v úlohe LP prislúchajúcej modelu AD_{max} pre VRS sa nachádzajú v intervale $[0, 1]$.*

Dôkaz. Kvôli prehľadnosti uvádzame na úvod hodnoty R_i^x a R_r^y , pre $i = 1, \dots, m$ a $r = 1, \dots, s$, ktoré sa volia v prípade modelu AD_{max} :

$$R_i^x = \max_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj}.$$

Vychádzame z poznatku, že v prípade variabilných výnosov z rozsahu, čiže ak je splnená podmienka (2), platia pre všetky DMU_j , $j = 1, \dots, n$, nasledovné vzťahy:

$$0 \leq s_i^{x*} = x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^* \leq \max_j x_{ij} = R_i^x, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$0 \leq s_r^{y*} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^* - y_{ro} \leq \max_j y_{rj} = R_r^y, \quad r = 1, \dots, s.$$

Spôsobené je to tým, že hodnota x_{io} , reprezentujúca množstvo i -teho vstupu o -teho útvaru, sa môže pre $\forall i = 1, \dots, m$ rovnať nanajvyšš hodnote $\max_j x_{ij}$, pretože toto číslo predstavuje najväčšie spotrebované množstvo vstupu i spomedzi všetkých útvarov DMU_j , $j = 1, \dots, n$. Číslo $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^*$ je efektívnym vzorom i -teho vstupu daného útvaru, a teda bude určite nezáporné. Z toho dôvodu je i -ta zložka vektora slackov s_i^{x*} určite menšia alebo rovná ako i -ta zložka vektora R_i^x , pre $\forall i = 1, \dots, m$.

Pri jednotlivých zložkách slackov výstupov s_r^{y*} a maximálnych hodnotách jednotlivých výstupov, reprezentovaných hodnotou R_r^y , vychádzame z faktu, že číslo $\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^*$ je efektívnym vzorom r -tého výstupu daného útvaru. To znamená, že nemôže byť vďaka platnosti podmienky (2), t.j. $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, vyššie ako maximálna hodnota vyprodukovaného výstupu r spomedzi všetkých útvarov, pre $\forall r = 1, \dots, s$, čo možno objasniť pomocou nasledovných nerovnic:

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^* \leq \sum_{j=1}^n (\max_j y_{rj}) \lambda_j^* = \max_j y_{rj} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* = \max_j y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s.$$

Zdôrazňujeme, že číslo $\max_j y_{rj}$ je pre $\forall r = 1, \dots, s$ konštantné a nemeniace sa v závislosti od indexu j . Z toho dôvodu je prvá nerovnosť prípustná. Ďalej, využijúc podmienku (2), dostávame požadovanú nerovnosť. Hodnota y_{ro} , ktorú odčítavame od čísla $\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^*$, predstavuje vyprodukované množstvo r -tého výstupu útvaru o , a preto je

určite nezáporná. Z čoho vyplýva, že r -tá zložka vektora slackov s_r^{y*} je určite menšia ako r -tá zložka vektora R_r^y , pre $\forall r = 1, \dots, s$. Taktiež teda platí:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{s_i^{x*}}{R_i^x} \leq 1, & i = 1, \dots, m, \\ 0 &\leq \frac{s_r^{y*}}{R_r^y} \leq 1, & r = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Ak týchto $m + s$ obmedzení sčítame a následne predelíme ich počtom, dostaneme:

$$0 \leq \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i^{x*}}{R_i^x} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^{y*}}{R_r^y} \right) \leq 1.$$

Uvedený vzťah sa dá interpretovať aj ako istá priemerná miera dosiahnuteľnej neefektívnosti. Ľahko tiež pozorujeme, že v prípade maximálne neefektívneho útvaru, keď očakávame nulovú efektivitu a $s_i^{x*} = R_i^x$, resp. $s_r^{y*} = R_r^y$, je hodnota uvedeného vzťahu rovná 1. Naopak, v prípade efektívneho producenta, ktorého veľkosť slackov je nulová, vidíme, že aj hodnota daného vzťahu je nulová. Po roznásobení môžeme jasne vidieť explicitný tvar účelovej funkcie pre aditívny model s váhami definovaný v časti (1.2.1):

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \frac{s_i^{x*}}{(m + s)R_i^x} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^{y*}}{(m + s)R_r^y} \leq 1.$$

□

Tvrdenie 2.2 (Hodnoty RAM účelovej funkcie). *Hodnoty účelovej funkcie v úlohe LP prislúchajúcej modelu RAM pre VRS sa nachádzajú v intervale $[0, 1]$.*

Dôkaz. Kvôli prehľadnosti uvádzame na úvod hodnoty R_i^x a R_r^y , pre $i = 1, \dots, m$ a $r = 1, \dots, s$, ktoré sa volia v prípade modelu RAM:

$$R_i^x = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}, \quad R_r^y = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj}.$$

Pri dôkaze využívame analogický postup ako v predchádzajúcom prípade. Najprv ukážeme, že jednotlivé zložky vektorov slackov s_i^{x*} , resp. s_r^{y*} , sú menšie alebo rovné ako k nim prislúchajúce zložky vektorov R_i^x , resp. R_r^y , pre $\forall i = 1, \dots, m$ a $\forall r = 1, \dots, s$. Následne, použijúc ekvivalentné úpravy, dostaneme ohraničenia pre hodnoty účelovej funkcie RAM modelu.

Opäť teda vychádzame z poznatku, že v prípade variabilných výnosov z rozsahu, čiže ak je splnená podmienka (2), platia pre všetky DMU_j , $j = 1, \dots, n$, nasledovné

vzťahy:

$$0 \leq s_i^{x*} = x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^* \leq \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij} = R_i^x, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$0 \leq s_r^{y*} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^* - y_{ro} \leq \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj} = R_r^y, \quad r = 1, \dots, s.$$

Zapríčené je to tým, že hodnota x_{io} , reprezentujúca množstvo i -teho vstupu o -teho útvaru, sa môže rovnať nanajvýš hodnote $\max_j x_{ij}$, $j = 1, \dots, n$, pretože toto číslo predstavuje najväčšie spotrebované množstvo vstupu i spomedzi všetkých útvarov DMU_j . Číslo $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^*$ je efektívnym vzorom i -teho vstupu daného útvaru, a preto bude vďaka podmienke (2), t.j. $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, určite väčšie, prípadne rovné, ako najmenšie spotrebované množstvo i -teho vstupu spomedzi všetkých útvarov. Tento fakt možno ozrejmiť nasledovnými nerovnosťami:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^* \geq \sum_{j=1}^n (\min_j x_{ij}) \lambda_j^* = \min_j x_{ij} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* = \min_j x_{ij}.$$

Prvá nerovnosť je prípustná, pretože číslo $\min_j x_{ij}$, pre $j = 1, \dots, n$, je konštantné a nemeniace sa v závislosti od indexu j . Pri druhej rovnosti vychádzame z podmienky (2), čím dostaneme požadovanú nerovnosť.

Pre slacky výstupov s_r^{y*} a rozsahy hodnôt výstupov, reprezentovaných číslom R_r^y , platia analogické úvahy. To znamená, že hodnota y_{ro} , predstavujúca vyprodukované množstvo r -tého výstupu útvaru o , je minimálne taká veľká ako hodnota $\min_j y_{rj}$, pre $j = 1, \dots, n$, keďže toto číslo reprezentuje najmenšie vyprodukované množstvo výstupu r spomedzi všetkých útvarov. Číslo $\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^*$ je efektívnym vzorom r -tého výstupu daného útvaru, a preto nemôže byť vďaka platnosti podmienky (2) vyššie ako maximálna hodnota vyprodukovaného výstupu r spomedzi všetkých útvarov, čo možno opäť ukázať nasledovne:

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^* \leq \sum_{j=1}^n (\max_j y_{rj}) \lambda_j^* = \max_j y_{rj} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* = \max_j y_{rj}.$$

Taktiež teda platí:

$$0 \leq \frac{s_i^{x*}}{R_i^x} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$0 \leq \frac{s_r^{y*}}{R_r^y} \leq 1, \quad r = 1, \dots, s.$$

Ak týchto $m + s$ obmedzení sčítame a následne predelíme ich počtom, dostaneme:

$$0 \leq \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i^{x*}}{R_i^x} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^{y*}}{R_r^y} \right) \leq 1.$$

Môžeme nahliadnuť, že v prípade nulovej efektivity, kedy očakávame $s_i^{x*} = R_i^x$ a zároveň $s_r^{y*} = R_r^y$, je hodnota uvedeného vzťahu rovná 1. Naopak, v prípade efektívneho producenta, ktorého veľkosť slackov je nulová, vidíme, že aj hodnota daného vzťahu je nulová. \square

V tejto súvislosti je potrebné ešte uviesť už vyššie spomínaný, ďalší spôsob dopočítania miery efektivity pre model RAM s VRS, o ktorom sa hovorí tiež v článku [4], a teda:

$$\Gamma^* := 1 - \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i^{x*}}{R_i^x} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^{y*}}{R_r^y} \right), \quad (13)$$

kde s_i^{x*}, s_r^{y*} sú zložky vektorov s^x, s^y optimálneho riešenia úlohy LP prislúchajúcej modelu RAM a R_i^x, R_r^y sú hodnoty volené podľa časti 1.2.1 prislúchajúce tomuto modelu. Evidentne je uvedený výraz rovný 1 v prípade efektívneho útvaru a naopak pri maximálne neefektívnom útvaru je výraz (13) nulový. Z toho vyplýva, že hodnota Γ^* spĺňa vlastnosti miery efektivity E , definovanú v podkapitole 1.1.

Hoci je RAM model podstatne využívaný vďaka jeho pozitívnym vlastnostiam, na základe článku [6] však disponuje aj istým nedostatkom týkajúcim sa miery efektivity dopočítanej podľa vzťahu (13). Aj najmenej efektívne útvary sú podľa tohto vzťahu ohodnotené relatívne vysokou mierou efektivity, čím sa znižuje rozsah hodnôt efektívnych pozorovaných útvarov. Túto záležitosť si všimneme aj v praktickej časti. Podľa autorov sa zdá byť tento interval hodnôt efektívnych príliš úzky, čo môže viesť k prípadným dezinterpretáciám výsledkov.

Poslednými vlastnosťami aditívnych modelov s váhami, ktorými sa budeme v tejto časti zaoberať, budú vzťahy medzi hodnotami účelových funkcií aditívnych modelov pri určitej voľbe váh. Tieto skutočnosti sme vypozerovali v empirickej časti a uvádzame ich vo forme tvrdení, avšak sú pomerne explicitné zo samotných definícií váh. Nami skonštruované dôkazy uvádzame nižšie.

Tvrdenie 2.3 (Hodnoty účelovej funkcie: AD_{max} vs. AD_{avg}). *Hodnota účelovej funkcie v úlohe LP prislúchajúcej modelu AD_{max} nie je v ľubovoľnom prípustnom bode (λ, s^x, s^y) väčšia ako hodnota účelovej funkcie v úlohe LP prislúchajúcej modelu AD_{avg} v danom bode, čiže $A_{max}^W \leq A_{avg}^W$.*

Dôkaz. Na začiatok označme úlohu LP prislúchajúcu modelu AD_{max} definovanú v časti (1.2.1) ako (MAX) a úlohu LP prislúchajúcu modelu AD_{avg} definovanú v rovnakej časti ako (AVG). Nech bod (λ, s^x, s^y) spĺňa podmienky (4) pre CRS, resp. aj podmienku (2) pre VRS. Keďže tieto podmienky reprezentujú pre úlohy (MAX) a (AVG) podmienky prípustnosti, môžeme tvrdiť, že tento bod je prípustným riešením oboch úloh. Ďalej vychádzame z definície váh v časti (1.2.1), čiže pre model AD_{max} volíme i -te zložky vektora R^x a r -té zložky vektora R^y ako:

$$R_i^x = \max_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad R_r^y = \max_j y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s.$$

Pre model AD_{avg} volíme i -te zložky vektora R^x a r -té zložky vektora R^y nasledovne:

$$R_i^x = \frac{1}{n} \sum_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad R_r^y = \frac{1}{n} \sum_j y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s.$$

Vidíme, že priemer hodnôt ľubovoľného vstupu i je určite menší alebo rovný ako maximum i -teho vstupu, pre $\forall i = 1, \dots, m$, resp. priemer hodnôt ľubovoľného výstupu r je určite menší alebo rovný ako maximum r -tého výstupu, pre $\forall r = 1, \dots, s$, čiže:

$$\begin{aligned} \max_j x_{ij} &\geq \frac{1}{n} \sum_j x_{ij} = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \max_j y_{rj} &\geq \frac{1}{n} \sum_j y_{rj} = \bar{y}_r, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Z toho dôvodu platí aj:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\max_j x_{ij}} &\leq \frac{1}{\bar{x}_i}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{\max_j y_{rj}} &\leq \frac{1}{\bar{y}_r}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Každú z $(m+s)$ nerovností prenásobíme k nej prislúchajúcou zložkou vektora slackov s_i^x , resp. s_r^y z prípustného riešenia (λ, s^x, s^y) definovaného na začiatku. Následne všetkých $(m+s)$ nerovností sčítame, predelíme ich počtom a dostávame:

$$\sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{(m+s) \max_j x_{ij}} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{(m+s) \max_j y_{rj}} \leq \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{(m+s) \bar{x}_i} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{(m+s) \bar{y}_r}.$$

Pozorujeme, že ľavá strana nerovnice predstavuje podľa (6) hodnotu účelovej funkcie úlohy (MAX) a pravá strana reprezentuje hodnotu účelovej funkcie úlohy (AVG) v ich prípustnom riešení. Tým pádom sme ukázali platnosť nerovnosti $A_{max}^W \leq A_{avg}^W$ pre ľubovoľné prípustné riešenie (λ, s^x, s^y) . \square

Z uvedeného tvrdenia vyplýva ešte nasledujúci vzťah:

Dôsledok 2.1 (Optimálne hodnoty účelovej funkcie: AD_{max} vs. AD_{avg}). *Pre ľubovoľný útvar DMU_o platí, že optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy LP pre model AD_{max} prislúchajúcej danému útvaru je menšia alebo rovná ako optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy LP pre model AD_{avg} prislúchajúcej tomuto útvaru, čiže $(A_{max}^{W*})_o \leq (A_{avg}^{W*})_o$.*

Dôkaz. Opäť použijeme označenie $(MAX)_o$, resp. $(AVG)_o$ pre úlohy LP prislúchajúce jednotlivým modelom AD_{max} , resp. AD_{avg} , pre daný útvar o . Označme ďalej optimálne riešenie úlohy $(MAX)_o$, v ktorom sa dosahuje maximum účelovej funkcie $(A_{max}^{W*})_o$, ako $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$. Keďže podmienky prípustnosti, reprezentované vzťahmi (4), doplnené o vzťah (2) pre VRS, sú pre obe úlohy totožné, tento bod je zároveň prípustným riešením úlohy $(AVG)_o$, takže platí $(A_{max}^{W*})_o \leq (A_{avg}^W)_o$. V optimálnom riešení úlohy $(AVG)_o$ je hodnota účelovej funkcie maximálna, čiže platí:

$$(A_{max}^{W*})_o \leq (A_{avg}^W)_o \leq (A_{avg}^{W*})_o,$$

a teda aj optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy $(MAX)_o$ je menšia alebo rovná ako optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy $(AVG)_o$. \square

Tvrdenie 2.4 (Hodnoty účelovej funkcie: AD_{max} vs. RAM). *Hodnota účelovej funkcie v úlohe LP prislúchajúcej modelu AD_{max} nie je v ľubovoľnom prípustnom bode (λ, s^x, s^y) väčšia ako hodnota účelovej funkcie v úlohe LP prislúchajúcej modelu RAM v danom bode, čiže $A_{max}^W \leq A_{RAM}^W$.*

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia je analogický s predchádzajúcim dôkazom, preto uvádzame len jeho zjednodušenú verziu. Taktiež budeme používať označenia predmetných úloh LP prislúchajúcich modelom AD_{max} a RAM definovaných v časti (1.2.1) ako (MAX) a (RAM) .

Opäť vychádzame z poznatku voľby váh pre jednotlivé modely. To znamená, že pre model RAM volíme i -te zložky vektora R^x a r -té zložky vektora R^y ako:

$$R_i^x = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad R_r^y = \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj} \quad r = 1, \dots, s.$$

Kvôli prehľadnosti označme hodnoty vektora R^x , R^y prislúchajúce modelu AD_{max} ako R^{MAXx} , R^{MAXy} a podobne pre RAM označíme dané hodnoty ako R^{RAMx} , R^{RAMy} . Ľahko môžeme nahliadnuť, že:

$$R_i^{MAXx} = \max_j x_{ij} \geq \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij} = R_i^{RAMx}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$R_r^{MAXy} = \max_j y_{rj} \geq \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj} = R_r^{RAMy}, \quad r = 1, \dots, s.$$

Po rovnakých úpravách ako v predchádzajúcom dôkaze dostávame, že pre ľubovoľné prípustné riešenie (λ, s^x, s^y) úloh (MAX) a (RAM) platí:

$$\sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{(m+s)R_i^{MAXx}} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{(m+s)R_r^{MAXy}} \leq \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{(m+s)R_i^{RAMx}} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{(m+s)R_r^{RAMy}}.$$

To znamená, že platí $A_{max}^W \leq A_{avg}^W$ pre všetky prípustné body (λ, s^x, s^y) . \square

Aj v tomto prípade uvádzame ešte rozširujúci dôsledok predchádzajúceho tvrdenia.

Dôsledok 2.2 (Optimálne hodnoty účelovej funkcie: AD_{max} vs. RAM). *Pre ľubovoľný útvar DMU_o platí, že optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy LP pre model AD_{max} prislúchajúcej danému útvaru je menšia alebo rovná ako optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy LP pre model RAM prislúchajúcej tomuto útvaru, čiže $(A_{max}^{W*})_o \leq (A_{RAM}^{W*})_o$.*

Dôkaz. Úlohy LP prislúchajúce modelom AD_{max} a RAM pre daný o -ty útvar aj v tomto prípade označíme $(MAX)_o$ a $(RAM)_o$. Nech sa optimum účelovej funkcie úlohy $(MAX)_o$ dosahuje v bode $(\lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$. Ako sme už spomínali, obe úlohy majú rovnaké podmienky prípustnosti uvedené v (4) pre CRS a doplnené o podmienku (2) pre VRS. Z toho dôvodu je tento bod taktiež prípustným riešením úlohy $(RAM)_o$, a teda platí $(A_{max}^{W*})_o \leq (A_{RAM}^W)_o$. V optimálnom riešení úlohy $(RAM)_o$ je hodnota účelovej funkcie maximálna, čiže platí:

$$(A_{max}^{W*})_o \leq (A_{RAM}^W)_o \leq (A_{RAM}^{W*})_o,$$

čím sme dokázali uvedený vzťah medzi optimálnymi hodnotami účelových funkcií úloh $(MAX)_o$ a $(RAM)_o$. \square

Na základe nových poznatkov, konkrétne Tvrdenia 2.1, by sme mohli úplne analogicky so vzťahom (13) definovať ďalší spôsob dopočítania miery efektivity pre model AD_{max} s VRS, a teda:

$$\psi^* := 1 - \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i^{x*}}{R_i^x} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^{y*}}{R_r^y} \right), \quad (14)$$

kde s_i^{x*}, s_r^{y*} sú zložky vektorov s^{x*}, s^{y*} optimálneho riešenia úlohy LP pre model AD_{max} a R_i^x, R_r^y sú hodnoty volené podľa časti 1.2.1 prislúchajúce tomuto modelu. Všimnime si však nasledovné. Vieme, že účelová funkcia úlohy LP pre aditívne modely s váhami definovanými v 1.2.1, a teda aj pre modely AD_{max} a RAM, má tvar (6). Tým pádom môžeme vzťahy (13) a (14) vyjadriť pomocou optimálneho riešenia úloh LP príslúchajúcich modelom RAM a AD_{max} ako $\Gamma^* = 1 - A_{RAM}^{W*}$, resp. $\psi^* = 1 - A_{max}^{W*}$. Aplikáciou Dôsledku 2.2 môžeme ľahko nahliadnuť, že

$$\Gamma^* = 1 - A_{RAM}^{W*} \leq 1 - A_{max}^{W*} = \psi^*.$$

Uvedená nerovnosť teda implikuje, že vzťah (14) priraduje neefektívnym útvarom vyššie hodnoty efektívít ako vzťah (13), tým pádom sú intervaly hodnôt efektívít dopočítaných podľa vzťahu (14) ešte užšie ako v prípade vzťahu (13). Tento fakt by mohol opäť viesť k možným dezinterpretáciám výsledkov a z toho dôvodu sa nebudeme v našej práci zaoberať dopočítavaním efektivity podľa tohto vzťahu.

2.2 SBM model

V tejto podkapitole uvedieme vlastnosti SBM modelu či už s konštantnými alebo s variabilnými výnosmi z rozsahu. Ako už bolo uvedené v podkapitole 1.3, pri odvodzovaní jeho vlastností sa vychádza zo základného SBM modelu. Podrobné odvodenia a vysvetlenia uvedených vlastností možno nájsť v [7]. Aj v tomto prípade zhrnieme najprv prednosti a potom nedostatky modelu.

K pozitívnym vlastnostiam patria nasledovné:

- Z optimálnej hodnoty účelovej funkcie ρ_o^* dokážeme vyčítať nielen efektívnosť, ale zároveň je táto hodnota aj vhodne naškálovanou efektivitou, t.j. z intervalu $[0, 1]$. Tým pádom na zistenie miery neefektívnosti DMU_o nie sú potrebné žiadne ďalšie výpočty, ako tomu bolo pri aditívnom modeli.

- Ďalšou vlastnosťou, ktorou disponuje SBM model, ale chýbala nám pri aditívnom modeli, je invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek, ktorú sme bližšie popísali v podkapitole 2.1.
- Ani v prípade SBM modelu sa nemôže stať, že by premenné s^{x*} , s^{y*} posunuli DMU_o do svojho efektívneho vzoru na hranicu pseudoefektívnosti H_P . Z toho vyplýva, že SBM model nepriradí žiadnemu pseudoefektívnemu útvaru mieru efektivity rovnú 1.
- Zväčšenie slackov s^{x*} , s^{y*} neefektívnych útvarov implikuje pokles miery efektívnosti, čo znamená, že efektivita podľa SBM je monotónna.

Na druhú stranu, za negatívne vlastnosti SBM modelu považujeme nasledovné:

- Chýbajúca invariantnosť vzhľadom na posun, čo však väčšinou nespôsobuje veľké ťažkosti.
- V účelovej funkcii vystupujú dáta DMU_o v menovateľoch zlomkov. Z toho dôvodu je model dobre definovaný len pre kladné vstupy x_{ij} a výstupy y_{rj} , pre $\forall i = 1, \dots, m, \forall r = 1, \dots, s, \forall j = 1, \dots, n$. Avšak aj v prípade nulových hodnôt vstupov alebo výstupov je možné model používať s miernymi obmenami, ktoré uvádzame nižšie.

V [7, str. 138, Poznámka 11.1] je navrhnuté nasledovné riešenie situácie s nulovými hodnotami určitých dát DMU_o . Ak má sledovaný útvar hodnotu nejakého vstupu nulovú, čiže $x_{i'o} = 0$, pre $i' \in \{1, \dots, m\}$, zrušíme člen $\frac{s_{i'}^x}{x_{i'o}}$ v účelovej funkcii. Zrušením v tomto prípade myslíme dodefinovanie hodnoty $\frac{s_{i'}^x}{x_{i'o}} = 0$ pre nulový menovateľ. Ak má naopak DMU_o nulovú hodnotu nejakého výstupu $y_{r'o} = 0$, pre $r' \in \{1, \dots, s\}$, nahradíme túto hodnotu veľmi malým kladným číslom, ktoré je menšie ako najnižšie hodnoty v danom súbore. Bližšie vysvetlenie sa nachádza v spomínanom zdroji.

Poslednou záležitosťou, ktorou sa budeme v tejto podkapitole zaoberať, je súvislosť medzi hodnotami efektivity SBM a aditívneho modelu. Vzťah medzi uvedenými dvomi modelmi sme objavili pri našich pozorovaniach a sformulujeme ho do nasledovného tvrdenia. Pri jeho dokázaní využívame nami odvodenú verziu účelovej funkcie pre model

SBM spolu s určitou substitúciou premenných a následne aplikujeme mierne transformovaný dôkaz z článku [12], v ktorom sa dokazuje taktiež vzťah medzi efektívnosťami avšak pre iné typy modelov.

Tvrdenie 2.5 (Efektívnosť: SBM vs. aditívny model). *Pre ľubovoľný útvar DMU_o platí, že hodnota jeho efektívnosti ρ_o^{A*} , dopočítanej podľa (12) vzhľadom na efektívny vzor určený aditívnym modelom, nie je menšia ako hodnota efektívnosti ρ_o^* pre SBM model, čiže $\rho_o^{A*} \geq \rho_o^*$.*

Dôkaz. Pre účely tohto dôkazu budeme aditívnym modelom nazývať všetky aditívne modely definované v podkapitole 1.2, čiže okrem základného aditívneho modelu máme na mysli aj aditívne modely s váhami definované v časti 1.2.1.

Vychádzame z účelovej funkcie úlohy LP prislúchajúcej SBM modelu, ktorá je pre určitý DMU_o daná vzťahom (8). Konkrétne, uvedieme náš vlastný, alternatívny zápis minimalizovaného výrazu v danej účelovej funkcii. Pri odvodzovaní využívame vzťah (5) pre výpočet efektívnych vzorov vstupov \hat{x} a výstupov \hat{y} , a teda:

$$\rho_o = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{y_{ro}}} = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{io} - \hat{x}_i}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{y}_r - y_{ro}}{y_{ro}}} = \frac{1 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m 1 - \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} \right)}{1 + \frac{1}{s} \left(\sum_{r=1}^s \frac{\hat{y}_r}{y_{ro}} - 1 \right)} = \frac{1 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} \right)}{1 + \frac{1}{s} \left(\sum_{r=1}^s \frac{\hat{y}_r}{y_{ro}} - \sum_{r=1}^s 1 \right)}.$$

Po roznásobení dostávame:

$$\rho_o = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{y}_r}{y_{ro}}}. \quad (15)$$

Kedže aditívny model spolu s SBM modelom, definovaným v podkapitole 1.3, majú pre daný DMU_o rovnaké podmienky prípustnosti, určené vzťahmi (4) pre CRS, resp. pridaním podmienky (2) pre VRS, ľubovoľný bod (λ, s^x, s^y) je prípustným riešením oboch modelov. Využijúc vzťah (15), nám stačí dokázať nasledovnú nerovnosť pre všetky prípustné riešenia (λ, s^x, s^y) :

$$\rho_o^A = \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro}}{\hat{y}_r} \right) \geq \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{\hat{y}_r}{y_{ro}}} = \rho_o,$$

kde \hat{x}_i , resp. \hat{y}_r , sú zložky efektívnych vzorov vstupov, resp. výstupov, určených vzťahom (5). Ak v tejto nerovnosti zavedieme substitúciu:

$$\theta_i = \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} \quad i = 1, \dots, m, \quad \phi_r = \frac{\hat{y}_r}{y_{ro}} \quad r = 1, \dots, s, \quad (16)$$

stačí nám pre všetky prípustné riešenia (λ, s^x, s^y) dokázať:

$$\rho_o^A = \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \geq \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} = \rho_o. \quad (17)$$

Poukazujeme ešte na fakt, že $\theta_i \leq 1$, pre $\forall i = 1, \dots, m$, a $\phi_r \geq 1$, pre $\forall r = 1, \dots, s$. Na základe vyššie uvedeného môžeme nahliadnuť, že nerovnosť (17) je presným znením vzťahu dokázaného v [12, str. 464]. \square

3 Porovnanie vybraných DEA modelov

V tejto kapitole sa budeme venovať predovšetkým empirickému porovnávaniu aditívneho modelu pri rôznych typoch váh s SBM modelom. Najprv názorne demonštrujeme rozdiely modelov na jednoduchších príkladoch a následne aj na vhodne zvolenej väčšej sade dát. Pozorujeme odlišnosti v efektívnych vzoroch, mierach efektívít, poradiach útvarov zoradených podľa efektívnosti a optimálnych hodnotách účelových funkcií.

Výsledky sme získali vlastnými výpočtami v softvéri MATLAB, v ktorom sme naprogramovali jednotlivé modely podľa ich definícií uvedených v teoretickej časti. V prílohách A.1, resp. A.2 sú uvedené zdrojové kódy použité pre výpočty.

Základný aditívny model sme naprogramovali na základe definície k nemu prislúchajúcej úlohy LP definovanej vzťahmi (3) a (4), doplnenej o podmienku (2) pre VRS. V prípade aditívneho modelu s váhami, t.j. AD_{max} , AD_{avg} , RAM a AD_{sd} , sme optimalizovali účelovú funkciu (6), resp. (7) pre model AD_{post} , pri rovnakých podmienkach ako v prípade základného aditívneho modelu. Podľa vzťahu (5) sme dopočítavali efektívne vzory, na základe ktorých sme dopočítali aj hodnoty mier efektívít pre aditívne modely vzťahom (12). Pre model RAM sme pre porovnanie dopočítali efektívnosť aj pomocou vzťahu (13), pochopiteľne len pre prípad VRS, ktorej hodnotu označujeme RAM Γ^* .

V prípade SBM modelu sme zdrojový kód zostavovali na základe vzťahov (9), ktoré sme v prípade VRS doplnili o (10). Hodnoty optimálneho riešenia pôvodnej úlohy LP prislúchajúcej SBM modelu sme dopočítali vzťahmi (11) a zároveň sme do zdrojových kódov zahrnuli aj riešenie prípadu nulových vstupov, resp. výstupov, o ktorom sme hovorili v podkapitole 2.2. Výsledky sme následne porovnávali s výsledkami získanými pomocou solvera v [10].

S cieľom upozorniť na podobnosti a rozdielnosti vo výsledkoch, uvádzame rovnaké výsledky jednotlivých modelov pre určité DMU združené v jednom stĺpci, nie pre každý model zvlášť. Taktiež pripomíname, že nielen v tabuľkách, ale aj v obrázkoch používame označenie x pre vstupy a označenie y pre výstupy. Pri obrázkoch znázorňujeme jednotlivé DMU vždy červenou farbou a k nim prislúchajúce efektívne vzory podľa jednotlivých modelov sú farebne odlišené na základe legendy.

3.1 Príklady

Najprv riešime dva príklady s menším počtom útvarov n a s menším rozmerom vektora vstupov m , resp. vektora výstupov s , aby sme lepšie ilustrovali rozdiely vo vybraných modeloch. Dodávame ešte, že vstupné údaje sú nami vymyslené.

Príklad 3.1. 4 DMU, 1 vstup a 1 výstup

Ako prvému sa budeme venovať príkladu so štyrmi útvarmi, pričom o jednotlivých útvaroch máme informácie o jednom vstupe a jednom výstupe, ktoré sú uvedené v Tabuľke 2.

Tabuľka 2: Vstupné dáta k Príkladu 3.1

DMU	Vstupy	Výstupy
A	1	2
B	3	4
C	3	3
D	6	1

Na začiatok uvidíme výsledky modelov pre CRS. V Tabuľke 3 sú uvedené efektívne vzory vstupov a výstupov daných útvarov určené jednotlivými modelmi. Môžeme si všimnúť, že všetky aditívne modely určili jednotlivým útvarom ten istý efektívny vzor. Túto skutočnosť pozorujeme aj pri ostatných príkladoch a budeme sa jej venovať v podkapitole 3.2. Taktiež si všimneme, že pre všetky aditívne modely vyšli väčšie alebo rovné efektívne vzory vstupov a výstupov ako pre SBM model, čo sa bude síce vyskytovať častejšie, ale v ďalších príkladoch uvidíme, že to nemusí platiť všeobecne pre každý útvar.

Tabuľka 3: Efektívne vzory určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.1 pre CRS

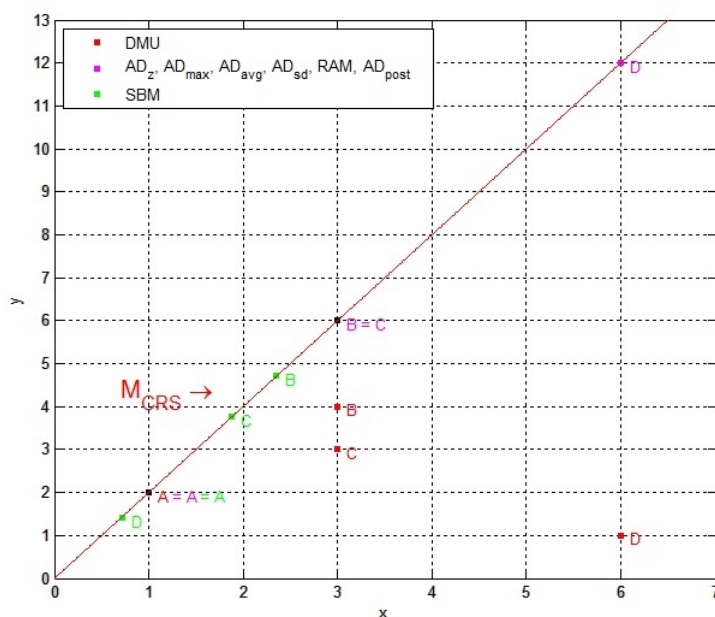
Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd}, AD_{post}$		<i>SBM</i>	
DMU	x	y	x	y
A	1	2	1	2
B	3	6	2,35	4,71
C	3	6	1,88	3,76
D	6	12	0,72	1,43

V Tabuľke 4 vidíme dopočítané miery efektivity pre jednotlivé modely. Keďže výpočet miery efektivity pre aditívne modely závisí od hodnoty efektívneho vzoru, taktiež môžeme pozorovať, že aditívne modely určili rovnaké hodnoty mier efektívnosti jednotlivých útvarov.

Tabuľka 4: Miery efektivity spolu s poradím útvarov pre jednotlivé modely v Príklade 3.1 pre CRS

Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd}, AD_{post}$	<i>SBM</i>
A	1 (1)	1 (1)
B	0,83 (2)	0,67(2)
C	0,75 (3)	0,5 (3)
D	0,54 (4)	0,08 (4)

Na Obrázku 1 môžeme názorne vidieť jednotlivé DMU spolu s ich projekciami na hranicu efektívnosti, teda ich efektívnymi vzormi určenými jednotlivými modelmi. Všimnime si polohu efektívnych vzorov vzhľadom k daným útvarom. Ako ich poloha súvisí s rovnakými výsledkami aditívnych modelov vysvetlíme v podkapitole 3.2.



Obr. 1: Jednotlivé DMU a ich efektívne vzory z Príkladu 3.1 pri CRS

Nakoniec uvádzame Tabuľku 5, v ktorej sa nachádzajú optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom pre konkrétne DMU. Všimnime si, že optimálna hodnota účelovej funkcie pre útvar D je väčšia ako 1 v prípade všetkých aditívnych modelov. Ukázali sme teda opodstatnenosť podmienky (2), t.j. variabilných výnosov z rozsahu, v Tvrdeniach 2.1 a 2.2.

Tabuľka 5: Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom v Príklade 3.1 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}	AD_{avg}	RAM	AD_{sd}	AD_{post}	SBM
A	0	0	0	0	0	0	1
B	2	0,25	0,40	0,33	0,89	0,25	0,67
C	3	0,37	0,60	0,50	1,34	0,50	0,5
D	11	1,38	2,20	1,83	4,92	5,50	0,08

Ďalej sa budeme venovať výsledkom modelov prislúchajúcich VRS. V Tabuľke 6 sú uvedené efektívne vzory útvarov určené jednotlivými modelmi. Pozorujeme, že pre VRS sa výsledky aditívnych modelov odlišujú viac ako pre CRS, avšak všetky aditívne modely s apriórными váhami opäť určili ten istý efektívny vzor pre jednotlivé útvary.

Nielen podobnosti, ale aj rozdielnosti výsledkov efektívnych vzorov aditívnych modelov objasníme v podkapitole 3.2.

Tabuľka 6: Efektívne vzory určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.1 pre VRS

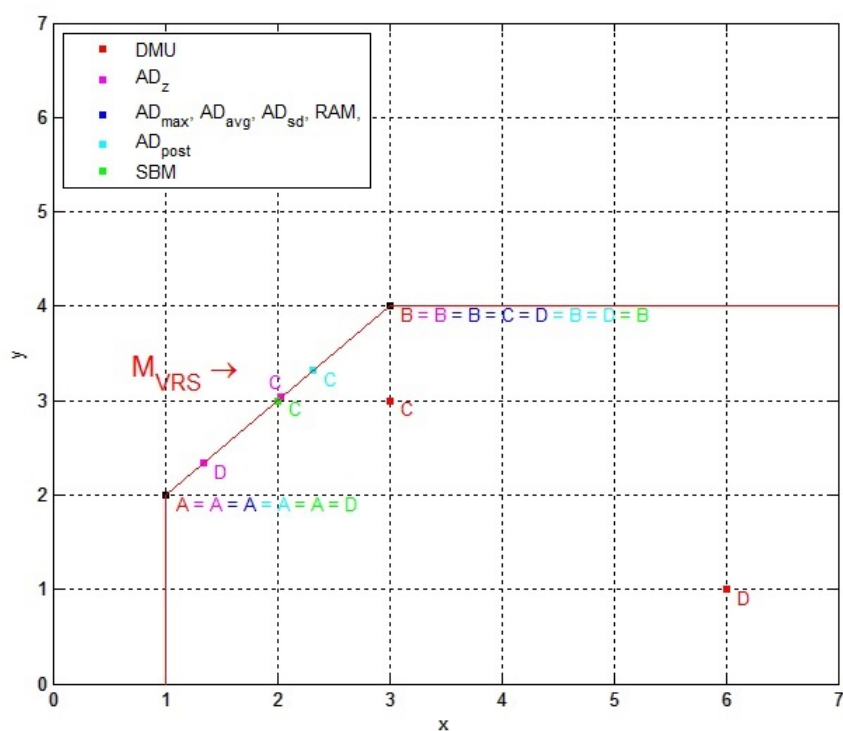
Typ modelu	AD_z		$AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd}$		AD_{post}		SBM	
	x	y	x	y	x	y	x	y
A	1	2	1	2	1	2	1	2
B	3	4	3	4	3	4	3	4
C	2,03	3,03	3	4	2,32	3,32	2	3
D	1,34	2,34	3	4	3	4	1	2

Tabuľka 7 obsahuje dopočítané miery efektivity konkrétnych útvarov pre jednotlivé modely. Keďže miery efektivity sa odvíjajú od efektívnych vzorov, je pochopiteľné, že pre aditívne modely s váhami určenými apriórne vyšli jednotlivým útvarom rovnaké miery efektivity. V časti 2.1.1 sme hovorili o relatívne vysokých mierach efektivity $RAM \Gamma^*$ pre neefektívne útvary, čo však v tomto prípade nepozorujeme. Môže to byť ale spôsobené jednoduchosťou úlohy, pretože v ďalších príkladoch bude rozdiel evidentnejší.

Tabuľka 7: Miery efektivity spolu s poradím útvarov pre jednotlivé modely v Príklade 3.1 pre VRS

Typ modelu	AD_z	$AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd}$	$RAM \Gamma^*$	AD_{post}	SBM
A	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
B	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
C	0,83 (3)	0,87 (3)	0,83 (3)	0,84 (3)	0,67 (3)
D	0,33 (4)	0,38 (4)	0,2 (4)	0,38 (4)	0,08 (4)

Na Obrázku 2 môžeme opäť pozorovať polohu efektívnych vzorov vzhľadom k daným útvarom podľa jednotlivých modelov.



Obr. 2: Jednotlivé DMU a ich efektívne vzory z Príkladu 3.1 pri VRS

Nakoniec uvádzame tabuľku optimálnych hodnôt účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom, Tabuľku 8. Upozorňujeme, že tieto hodnoty vyšli pre útvar D v prípade modelov AD_{avg} , AD_{sd} a AD_{post} vyššie ako 1 a teda vidíme, že optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich týmto modelom nemusia vo všeobecnosti ležať v intervale $[0, 1]$.

Tabuľka 8: Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom v Príklade 3.1 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}	AD_{avg}	RAM	AD_{sd}	AD_{post}	SBM
A	0	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	0	0	0	1
C	1	0,12	0,20	0,17	0,45	0,17	0,67
D	6	0,62	1,06	0,80	2,18	1,75	0,08

Príklad 3.2. 8 DMU, 1 vstup, 2 výstupy

Ďalší príklad pozostáva z 8 útvarov pri 1 vstupe a 2 výstupoch. Opäť najprv uvádzame

vstupné údaje v Tabuľke 9. Pozorujeme, či a aké zmeny nastanú vo výsledkoch modelov pri zväčšenom počte útvarov a rozmere výstupov. Zároveň sledujeme, aký dopad majú rôzniace sa rozmery vektora vstupov a výstupov.

Tabuľka 9: Vstupné dáta k Príkladu 3.2

DMU	A	B	C	D	E	F	G
Vstupy	25	28	30	26	35	90	80
Výstup 1	35	45	65	20	64	95	95
Výstup 2	38	32	35	15	28	60	60

Ako prvým sa venujeme výsledkom odpovedajúcim CRS. Efektívne vzory útvarov určené jednotlivými modelmi uvádzame v Tabuľke 10. Opätovne si môžeme všimnúť rovnaké výsledky pre aditívne modely, či už základný alebo s váhami. Jediným rozdielom sú efektívne vzory výstupov útvaru E pre model AD_{post} . Pre daný útvar si môžeme taktiež všimnúť, že efektívny vzor druhého výstupu určený modelom AD_z a ostatnými aditívnymi modelmi s apriórne určenými váhami je nižší ako efektívny vzor druhého výstupu určený SBM modelom.

Tabuľka 10: Efektívne vzory určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.2 pre CRS

Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd} / AD_{post}$			SBM		
DMU	x	y1	y2	x	y1	y2
A	25	35	38	25	35	38
B	28	60,67	32,67	27,43	59,44	32,01
C	30	65	35	30	65	35
D	26	56,33	30,33	16,75	36,30	19,55
E	35	75,83 / 64	40,83 / 46,29	35	64	46,29
F	90	195	105	65,38	141,67	76,28
G	80	173,33	93,33	61,29	132,80	71,51

V nasledovnej Tabuľke 11 vidíme miery efektivity daných útvarov pre jednotlivé modely, pričom znova pozorujeme kvôli rovnakým efektívnym vzorom aj rovnaké miery

efektivity pre všetky aditívne modely až na útvar E . Miera efektivity tohto útvaru sa pre model AD_{post} mierne líši od efektivity získanej ostatnými aditívnymi modelmi.

Tabuľka 11: Miery efektivity spolu s poradím útvarov pre jednotlivé modely v Príklade 3.2 pre CRS

Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd} / AD_{post}$	SBM
A	1 (1)	1 (1)
B	0,91 (3)	0,84 (3)
C	1 (1)	1 (1)
D	0,62 (7)	0,41 (7)
E	0,84 / 0,87 (4)	0,75 (4)
F	0,69 (6)	0,53 (6)
G	0,73 (5)	0,59 (5)

Tabuľka 12 obsahuje optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom. Pozorujeme, že tieto hodnoty prislúchajúce modelom AD_{max} , AD_{avg} , RAM a AD_{post} sú pre všetky útvary menšie ako 1. V predchádzajúcom Príklade 3.1 sme ale ukázali, že všeobecne to platiť nemusí.

Tabuľka 12: Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom v Príklade 3.2 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}	AD_{avg}	RAM	AD_{sd}	AD_{post}	SBM
A	0	0	0	0	0	0	1
B	16,33	0,06	0,09	0,07	0,21	0,12	0,84
C	0	0	0	0	0	0	1
D	51,67	0,21	0,34	0,28	0,79	0,95	0,41
E	24,67	0,11	0,18	0,15	0,43	0,22	0,75
F	145	0,60	0,95	0,78	2,23	0,60	0,53
G	111,67	0,46	0,73	0,60	1,71	0,46	0,59

V nasledujúcej časti uvedieme výsledky pre VRS. V Tabuľke 13 znova pozorujeme

efektívne vzory útvarov určené jednotlivými modelmi. Sledujeme, že opäť vyšli efektívne vzory rovnaké pre všetky aditívne modely s výnimkou útvaru E pre model AD_{post} .

Tabuľka 13: Efektívne vzory určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.2 pre VRS

Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd} / AD_{post}$			SBM		
DMU	x	y1	y2	x	y1	y2
A	25	35	38	25	35	38
B	28	53	36,2	28	53	36,2
C	30	65	35	30	65	35
D	26	41	37,4	26	41	37,4
E	35 / 30	68 / 65	37,5 / 35	29,83	64	35,1
F	80	95	60	80	95	60
G	80	95	60	80	95	60

Na základe efektívnych vzorov určených jednotlivými modelmi sme dopočítali miery efektívnosti útvarov a uvádzame ich v Tabuľke 14. Efektivity aditívnych modelov vyšli opäť rovnaké až na útvar E pre model AD_{post} . V tomto príklade už môžeme lepšie pozorovať vyššie hodnoty efektivity $RAM \Gamma^*$ pre neefektívne útvary, s ktorými je spojený aj značne užší interval hodnôt efektívít $RAM \Gamma^*$.

Tabuľka 14: Miery efektivity spolu s poradím útvarov pre jednotlivé modely v Príklade 3.2 pre VRS

Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, RAM, AD_{sd} / AD_{post}$	$RAM \Gamma^*$	SBM
A	1 (1)	1 (1)	1 (1)
B	0,91 (5)	0,93 (5)	0,87 (5)
C	1 (1)	1 (1)	1 (1)
D	0,63 (7)	0,74 (7)	0,44 (7)
E	0,9 / 0,88 (6)	0,91 (6)	0,76 (6)
F	0,96 (4)	0,95 (4)	0,89 (4)
G	1 (1)	1 (1)	1 (1)

Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým mode-

lom sú uvedené v Tabuľke 15. Môžeme si z nej všimnúť, že tieto hodnoty prislúchajúce modelom AD_{avg} , AD_{sd} a AD_{post} dosahujú len hodnoty menšie alebo rovné ako 1. Opäť pripomíname predošlý Príklad 3.1, ktorý dokazoval, že to nie je všeobecne platné pravidlo.

Tabuľka 15: Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom v Príklade 3.2 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}	AD_{avg}	RAM	AD_{sd}	AD_{post}	SBM
A	0	0	0	0	0	0	1
B	12,2	0,05	0,08	0,07	0,19	0,1	0,87
C	0	0	0	0	0	0	1
D	43,4	0,2	0,31	0,26	0,75	0,85	0,44
E	13,5	0,07	0,1	0,09	0,26	0,14	0,76
F	10	0,04	0,07	0,05	0,13	0,04	0,89
G	0	0	0	0	0	0	1

Príklad 3.3. *Reálne dáta, 20 DMU, 3 vstupy, 2 výstupy*

V poslednom príklade sa venujeme porovnávaní výsledkov jednotlivých modelov pre rozsiahlejšiu sadu reálnych dát, ktoré sme čerpali z [12]. Hodnotiť budeme 20 japonských bánk najprv z hľadiska konštantných a následne variabilných výnosov z rozsahu. Pracovať budeme s údajmi v rozsahu troch vstupov a dvoch výstupov, ktoré sú uvedené v Tabuľke 22. Vstupy sú reprezentované veľkosťou celkového kapitálu, počtom pobočiek a počtom zamestnancov a výstupy sú charakterizované celkovým ziskom a celkovými vkladmi. Môžeme si všimnúť, že spracovávané dáta spĺňajú podmienku vhodného počtu vstupov a výstupov voči počtu útvarov uvedenú napríklad v [13, kap. 2], a teda $m+s \leq \frac{n}{3}$. Uvedená tabuľka vstupných dát spolu s výsledkami jednotlivých modelov sa kvôli veľkému rozsahu nachádzajú v prílohe B. Pri tabuľkách týkajúcich sa efektívnych vzorov sme zvolili kvôli ľahšiemu porovnávaní nasledovný typ zápisu. V každej z tabuliek sú uvedené efektívne vzory určené jednotlivými modelmi len pre jeden vybraný vstup, resp. výstup. Kvôli prehľadnosti a efektívnosti zápisu budeme ďalej označovať útvar Tokyo Mitsubishi iba ako TM .

Vopred upozorňujeme, že autori článku [12], z ktorého sme čerpali dáta, bližšie nešpecifikujú jednotky, v ktorých sú údaje uvedené. Zo samotnej definície vstupov ale vidíme, že sú merané v iných jednotkách, pretože narábame s počtami pobočiek a zamestnancov, pričom vstup kapitál je pravdepodobne v istých peňažných jednotkách. Pripomíname ale podkapitolu 2.1, v ktorej je podľa [7, Veta 16] uvedené, že základný aditívny model zachováva aj napriek tomuto faktu rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne. Keďže však podľa [7, kap. 11] všetky nami porovnávané modely určia vždy rovnakú množinu efektívnych útvarov, nebude pre naše ďalšie porovnávaná základný aditívny model príliš relevantný. Jeho výsledky uvádzame na ilustráciu dôsledkov použitia modelu, ktorého účelová funkcia je závislá od voľby jednotiek, na dáta merané v rôznych jednotkách.

Ako tomu bolo aj v predošlých príkladoch, najprv rozoberieme prípad CRS. Na začiatok pozorujeme efektívne vzory útvarov určených jednotlivými modelmi, ktoré sú uvedené v Tabuľkách 23, 24, 25, 26 a 27. Môžeme si všimnúť, že aditívne modely s apriórными váhami opäť určili tie isté efektívne vzory. V porovnaní s predchádzajúcimi jednoduchými príkladmi, vyšli efektívne vzory vstupov a výstupov pre aditívne modely s apriórными váhami vždy menšie alebo rovné ako efektívne vzory vstupov a výstupov určených SBM modelom. Medzi efektívnymi vzormi určenými AD_{post} a SBM modelom sme však nepozorovali žiaden explicitný vzťah. Čo sa týka modelu AD_z , môžeme vidieť, že priradil každému neefektívnemu útvaru najvyššiu hodnotu efektívneho vzoru vstupov aj výstupov spomedzi všetkých ostatných modelov.

Miery efektívnosti jednotlivých bánk pre dané modely pozorujeme v Tabuľke 28. Všimnime si tiež, že model AD_z priradil v porovnaní so všetkými ostatnými modelmi každému neefektívnemu útvaru vyššiu alebo rovnakú hodnotu miery efektivity. Táto skutočnosť je dôsledkom najvyšších hodnôt efektívnych vzorov vstupov určených modelom AD_z , ktoré implikujú najnižšie nedostatky vstupov určených modelom AD_z oproti nedostatkom vstupov určených ostatnými modelmi.

V Tabuľke 29 môžeme pozorovať optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom pre daný útvar. Vidíme, že tieto hodnoty prislúchajúce modelom AD_{avg} , AD_{sd} a AD_{post} sú pre všetky útvary menšie ako 1. Avšak na vyvrátenie všeobecnej platnosti tohto pozorovania slúži Príklad 3.1.

Pozorujme teraz výsledky modelov pre VRS. V Tabuľkách 30, 31, 32, 33 a 34 môžeme sledovať podobnosti a rozdielnosti efektívnych vzorov jednotlivých útvarov určených danými modelmi. Vidíme, že efektívne vzory aditívnych modelov s apriórnymi váhami, okrem modelu AD_{avg} , opäť určili rovnaké efektívne vzory. Taktiež znova sledujeme, že efektívne vzory určené SBM modelom sú vo väčšine prípadov väčšie alebo rovné ako efektívne vzory dané aditívnymi modelmi s apriórnymi váhami. Všimnime si však pri efektívnych vzoroch kapitálu výnimky. Napríklad útvary Ashikaga, Yokohama, Hokuriky, ktorých efektívne vzory určené SBM modelom sú menšie ako efektívne vzory určené modelom AD_{avg} alebo ostatnými aditívnymi modelmi s apriórnymi váhami. Dávame do pozornosti opätovný výskyt najvyšších efektívnych vzorov vstupov pre neefektívne útvary pre model AD_z , až na dve výnimky. Konkrétne, v prípade počtu pobočiek v Tabuľke 31 určil model AD_z útvaru Hokuriku menší efektívny vzor ako model AD_{post} . Taktiež v prípade počtu zamestnancov v Tabuľke 32 určil model AD_z útvaru Daiwa menší efektívny vzor ako model AD_{post} a SBM. Čo sa týka efektívnych vzorov výstupov, podobné pozorovania ako v prípade CRS už neplatia. Najmä pre celkové množstvo vkladov v Tabuľke 34 vidíme, že model AD_z určil viacerým útvarom menší efektívny vzor ako niektorý z ostatných modelov.

Výsledné miery efektívnosti jednotlivých útvarov pozorujeme v Tabuľke 35. Aj v tomto príklade dávame do pozornosti hodnoty dopočítaných efektívít RAM Γ^* . Všimnime si, že okrem útvaru Sakura sú tieto hodnoty v porovnaní s hodnotami mier efektivity ostatných aditívnych modelov s váhami a SBM modelu vždy vyššie, prípadne rovné. Ak sa pozrieme na rozsah hodnôt efektívít, vidíme, že najnižšia hodnota je 0,80. Z toho dôvodu vyšiel pre tieto hodnoty jednoznačne užší interval ako v prípade všetkých ostatných modelov. Upozorňujeme napríklad na útvar Hokuriku, ktorého hodnota efektivity RAM Γ^* je viac ako dvojnásobne vyššia v porovnaní s hodnotou efektivity pre model SBM. Podobne výrazný rozdiel vznikol aj v prípade útvaru Nishinohon. Práve takéto situácie môžu viesť k prípadným dezinterpretáciám výsledkov. V porovnaní s modelom AD_z už nepozorujeme podobnú pravidelnosť.

Pre model AD_z vidíme, že miery efektivity dosahujú najvyššie hodnoty spomedzi všetkých modelov, až na zopár prípadov, keď dopočítaná hodnota efektivity RAM Γ^* je pre niektoré útvary vyššia ako pre model AD_z .

Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom sú uvedené v Tabuľke 36. Opäť si môžeme všimnúť, že tieto hodnoty prislúchajúce modelom AD_{avg} , AD_{sd} a AD_{post} sú pre každý útvar menšie ako 1, ale znova pripomíname Príklad 3.1, v ktorom optimálne hodnoty účelových funkcií presiahli túto hodnotu pre CRS aj VRS.

3.2 Zhrnutie

V tejto podkapitole zhrnieme naše pozorovania z nami vytvorených ilustračných príkladov ale aj z rozsiahlejšieho príkladu s reálnymi dátami.

Ako prvé dávame do pozornosti, že výsledky všetkých troch príkladov plne korešpondujú s nami dokázanými tvrdeniami a dôsledkami v kapitole 2. Konkrétne, s tvrdeniami týkajúcimi sa rozmedzia hodnôt účelovej funkcie modelov AD_{max} a RAM pre VRS, teda Tvrdeniami 2.1 a 2.2. Ďalej sú výsledky príkladov v súlade s dôsledkami týkajúcimi sa vzťahu medzi optimálnymi hodnotami účelových funkcií pre modely AD_{max} a AD_{avg} , resp. AD_{max} a RAM, čiže Dôsledkami 2.1 a 2.2. Na záver poukazujeme na to, že výsledky všetkých príkladov taktiež korešpondujú s Tvrdením 2.5 týkajúceho sa vzťahu mier efektívnosti dopočítaných pre aditívne modely a pre SBM model.

Pri príkladoch sme si tiež všimli, že optimálne hodnoty účelovej funkcie pre model AD_{avg} sú vždy vyššie alebo rovné ako optimálne hodnoty účelovej funkcie pre model RAM. Toto pozorovanie je však spôsobené len výberom dát, čo ukážeme na malom ilustračnom príklade s dvomi DMU, jedným vstupom a jedným výstupom. Údaje k príkladu spolu s vypočítanými optimálnymi hodnotami účelovej funkcie pre modely AD_{avg} a RAM sú uvedené v Tabuľke 16.

Tabuľka 16: Vstupné dáta a optimálne hodnoty účelových funkcií pre modely AD_{avg} a RAM

DMU	Vstupy	Výstupy	AD_{avg}	RAM
A	4	7	0	0
B	3	5	0,02	0,07

Logicky to vyplýva aj zo spôsobu, ktorým dokazujeme vzťah medzi hodnotami účelových funkcií pre iné aditívne modely. Vychádzame z poznatku, že hodnota R_i^x a R_j^y

modelu, ktorého hodnoty účelovej funkcie majú byť menšie, je pre $\forall i = 1, \dots, m$ a $\forall r = 1, \dots, s$ väčšia alebo rovná ako hodnota R_i^x a R_r^y modelu, ktorého hodnoty účelovej funkcie majú byť väčšie. Konkrétne v tomto prípade by muselo platiť, že:

$$\frac{1}{n} \sum_j x_{ij} \leq \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij} \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{n} \sum_j y_{rj} \leq \max_j y_{rj} - \min_j y_{rj} \quad r = 1, \dots, s,$$

čo nemusí byť vždy dodržané.

Môžeme si tiež všimnúť, že výsledky modelov plne súhlasia s [7, Veta 26], kde sa hovorí o rovnakej množine efektívnych útvarov určenej aditívnym a SBM modelom pre CRS, pričom analogické tvrdenie platí aj pre VRS.

Pre lepšiu ilustráciu našich zistení, uvádzame v Tabuľkách 17 a 18 zhrnutie minimálnych a maximálnych optimálnych hodnôt účelových funkcií dosiahnutých v Príkladoch 3.1 až 3.3 pre CRS a pre VRS.

Tabuľka 17: Rozsah účelových funkcií pre jednotlivé modely v príkladoch s CRS

	Príklad 1		Príklad 2		Príklad Banky	
Typ modelu	min	max	min	max	min	max
AD_z	0	11	0	145	0	78833,62
AD_{max}	0	1,38	0	0,6	0	0,18
AD_{avg}	0	2,2	0	0,95	0	0,4
RAM	0	1,83	0	0,78	0	0,22
AD_{sd}	0	4,92	0	2,23	0	0,68
AD_{post}	0	5,5	0	0,95	0	0,77
SBM	0,08	1	0,41	1	0,3	1

Tabuľka 18: Rozsah účelových funkcií pre jednotlivé modely v príkladoch s VRS

	Príklad 1		Príklad 2		Príklad Banky	
Typ modelu	min	max	min	max	min	max
AD_z	0	6	0	43,4	0	77273,92
AD_{max}	0	0,63	0	0,2	0	0,17
AD_{avg}	0	1,06	0	0,31	0	0,39
RAM	0	0,8	0	0,26	0	0,2
AD_{sd}	0	2,18	0	0,75	0	0,6
AD_{post}	0	1,75	0	0,85	0	0,66
SBM	0,08	1	0,44	1	0,36	1

Nakoniec sa pozrieme na odlišnosti a totožnosti výsledných hodnôt efektívnych vzorov pre určité modely, ktoré na základe vzťahu (12), resp. na základe definície SBM modelu v podkapitole 1.3, zapríčinili odlišnosti a totožnosti aj výsledných mier efektivity. Situácia je ilustrovaná napríklad Obrázkami 1 a 2.

V praktickej časti sme si mohli všimnúť častý výskyt rovnakých výsledkov efektívnych vzorov pre aditívne modely definované v podkapitole 1.2. Príčina vyplýva z teórie lineárneho programovania. Dá sa očakávať, že mnohé hodnoty efektívnych vzorov sa budú pre tieto aditívne modely zhodovať, pretože množina prípustných riešení, reprezentovaná podľa [9] istým polyédrom Ω , je v prípade základného aditívneho modelu aj aditívnych modelov s váhami, definovaných v časti 1.2.1, rovnaká.

Vysvetlenie ilustrujeme na zjednodušenom prípade s dvomi DMU, jedným vstupom a jedným výstupom pre CRS, ktorý bude pre potreby našej práce reprezentovať všeobecnú situáciu.

Príklad 3.4. 2 DMU, 1 vstup, 1 výstup, CRS

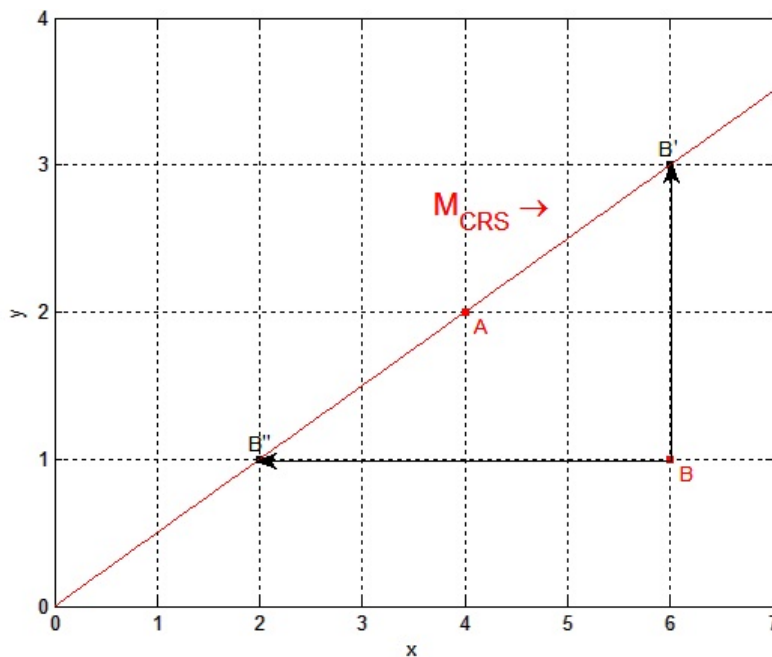
Konkrétne hodnoty vstupov a výstupov tohto príkladu sú uvedené v Tabuľke 19, pričom útvar A reprezentuje efektívny útvar a útvar B predstavuje neefektívny útvar.

Tabuľka 19: Vstupné dáta k Príkladu 3.4

DMU	Vstupy	Výstupy
A	4	2
B	6	1

Podľa [7] vieme, že úlohy LP prislúchajúce modelom, ktoré riešime v tejto práci, vždy nadobúdajú optimálne riešenie, čiže nedochádza k neohraničenosti ani k neprípustnosti úlohy. Z toho vyplýva, že v našom zjednodušenom prípade môžu nastať nasledovné tri situácie pri určovaní optimálneho riešenia. Buď sa optimálne riešenie nadobúda v jednom z vrcholov alebo na celej hrane polyédra Ω odpovedajúcej úsečke ležiacej na hranici efektívnosti H_E , ktorej krajné body sú dané podmienkami prípustnosti prislúchajúcimi danému útvaru. Táto úsečka reprezentuje množinu efektívnych vzorov pre daný neefektívny útvar. V ďalšom ju budeme nazývať *úsečka efektívnych vzorov* pre istý neefektívny útvar.

Obrázok 3 znázorňuje konkrétne útvary z Príkladu 3.4, pričom písmenami B' a B'' sú označené krajné body úsečky efektívnych vzorov pre neefektívny útvar B .



Obr. 3: Jednotlivé DMU z Príkladu 3.4

Pozrime sa teraz, ktoré modely, resp. úlohy LP k nim prislúchajúce, určili ako efek-

tívny vzor útvaru B nejaký z krajných bodov úsečky efektívnych vzorov a ktoré určili bod ležiaci vo vnútri danej úsečky. Údaje o efektívnych vzoroch útvaru B pre jednotlivé modely sú uvedené v Tabuľke 20.

Tabuľka 20: Efektívne vzory určené jednotlivými modelmi pre útvar B v Príklade 3.4

Typ modelu	AD_z		$AD_{max}, AD_{avg}, AD_{post}$		RAM		AD_{sd}		SBM	
DMU	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
B	2	1	6	3	4,48	2,24	4,54	2,27	2,69	1,35

Vidíme, že v porovnaní s predchádzajúcimi príkladmi sa výsledky jednotlivých modelov odlišujú výraznejšie, ale aj v tomto prípade vyšli pre niektoré modely, konkrétne pre modely AD_{max} , AD_{avg} a AD_{post} , hodnoty efektívnych vzorov rovnaké, odpovedá im bod B' .

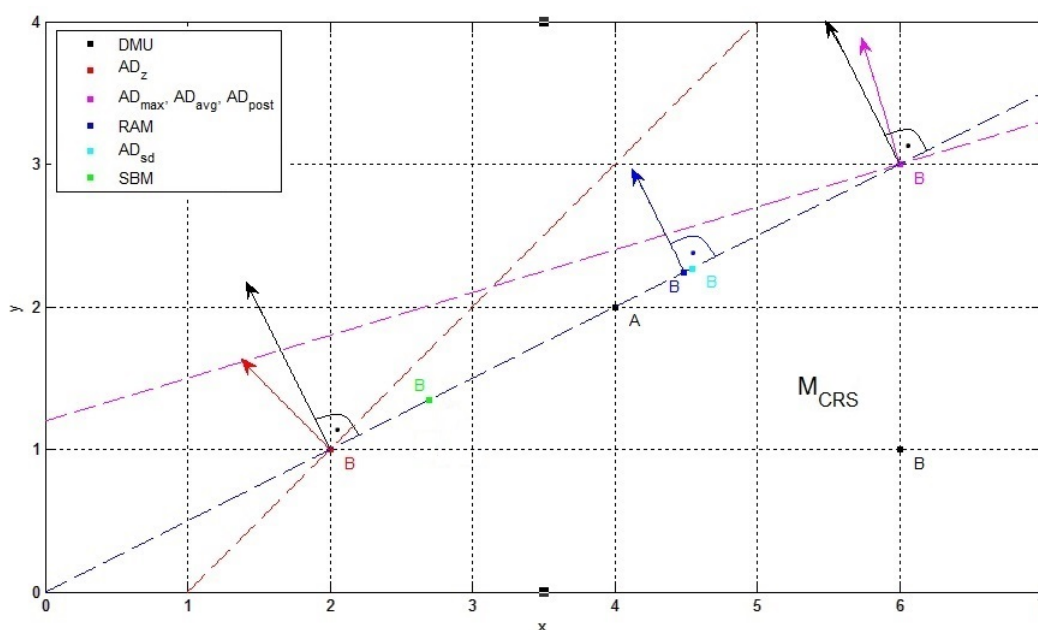
Príčinou sú gradienty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom pre daný útvar. Bližšie to vysvetlíme pomocou grafického riešenia úlohy LP pre model AD_{avg} , pretože pre zvyšné dva modely AD_{max} a AD_{post} , ktorých úlohy LP tiež určili ako efektívny vzor bod B' , platia analogické úvahy. Grafické riešenie úlohy LP v prípade dvoch premenných je vysvetlené napríklad v [9]. Ak teda posunieme priamku znázorňujúcu účelovú funkciu úlohy LP pre model AD_{avg} do bodu, v ktorom ešte stále prechádza množinou prípustných riešení, ale jej hodnota sa už nedá viac zväčšiť, dostávame optimálne riešenie, odpovedajúce bodu B' . Toto optimálne riešenie vyšlo práve v bode B' kvôli uhlu, ktorého pravé rameno tvorí hranica efektívnosti H_E a ľavým ramenom je gradient účelovej funkcie modelu AD_{avg} pre útvar B s vrcholom v ľubovoľnom bode ich prieniku. Budeme vidieť, že tento uhol je menší ako 90° a z toho dôvodu určila úloha LP ako efektívny vzor práve tento krajný bod úsečky efektívnych vzorov. To znamená, že aj pre modely AD_{max} a AD_{post} vyšiel tento uhol menší ako 90° , a preto určili všetky tri úlohy prislúchajúce daným modelom efektívny vzor útvaru B práve v bode B' .

Druhou možnosťou, keď výsledné efektívne vzory v prípade jedného vstupu a jedného výstupu pre CRS vychádzajú rovnaké, je prípad, keď úlohy LP daných modelov pre konkrétny útvar určia ako efektívny vzor druhý z krajných bodov úsečky efektívnych vzorov. V našom prípade ho reprezentuje bod B'' a dochádza k tomu vtedy, keď

je uhol, ktorého pravým ramenom je hranica efektívnosti a ľavým ramenom je gradient účelovej funkcie daného modelu pre vybraný útvar, v ľubovoľnom bode ich prieniku, väčší ako 90° . Pozorujeme to napríklad v prípade modelu AD_z .

Ostáva ešte posledná možnosť a tou je prípad, kedy sa tento uhol rovná 90° , ako je napríklad pre model RAM. To znamená, že účelová funkcia je pre útvar B v prípade modelu RAM rovnobežná s hranicou efektívnosti H_E . V takejto situácii sa optimálna hodnota účelovej funkcie nadobúda na celej úsečke efektívnych vzorov, a preto vznikla celá množina optimálnych riešení úlohy LP. Keďže sme úlohy LP riešili metódou vnútorného bodu, v prípade viacnásobných riešení nám mohli vyjsť efektívne vzory aj vo vnútri množiny optimálnych riešení, čiže vo vnútri úsečky efektívnych vzorov. Uvedená skutočnosť bola príčinou prípadných odlišností vo výsledných efektívnych vzoroch niektorých modelov.

Uvedenú situáciu ilustruje Obrázok 4, na ktorom sú farebne odlišené efektívne vzory pre jednotlivé modely spolu s vybranými vrstevnicami účelových funkcií a ich gradientami pre modely AD_z , AD_{avg} a RAM, ktoré sme rozoberali vyššie. Čierne šípky znázorňujú smer kolmý na hranicu efektívnosti H_E a majú len ilustratívny charakter. Ostatné šípky predstavujú spomínané gradienty, pričom podotýkame, že ich dĺžka nie je pre naše úvahy relevantná. Taktiež upresňujeme, že sme volili také vrstevnice účelových funkcií daných modelov, na ktorých je ich hodnota optimálna. Z toho dôvodu je na obrázku účelová funkcia úlohy LP pre model RAM totožná s hranicou efektívnosti H_E .



Obr. 4: Jednotlivé DMU a ich efektívne vzory spolu s účelovými funkciami a ich gradientami úloh LP prislúchajúcich vybraným modelom z Príkladu 3.4

Nahliadnime ešte na hodnoty mier efektivity útvaru B pre jednotlivé modely, ktoré sú uvedené v Tabuľke 21.

Tabuľka 21: Miery efektivity útvaru B pre jednotlivé modely v Príklade 3.4

Typ modelu	$AD_z, AD_{max}, AD_{avg}, AD_{post}$	RAM	AD_{sd}	SBM
B	0,67	0,597	0,599	0,33

Všimnime si, že hodnoty výsledných efektívít dopočítaných podľa (12) sú v bode B' aj B'' rovnaké. Otázkou ostáva, či je to náhoda alebo všeobecne platné pravidlo. V ďalšom ukážeme, že v prípade jedného vstupu a jedného výstupu pre CRS sú hodnoty efektívít, dopočítané pomocou vzťahu (12), v krajných bodoch úsečky efektívnych vzorov pre nejaký neefektívny útvar naozaj vo všeobecnosti totožné.

Tvrdenie 3.1. *Pre ľubovoľný neefektívny útvar DMU_o je v prípade jedného vstupu a jedného výstupu hodnota dopočítanej efektivity podľa vzťahu (12) pre CRS rovnaká v oboch krajných bodoch úsečky efektívnych vzorov zodpovedajúcej danému útvaru.*

Dôkaz. Majme dva útvary A, B a k nim zodpovedajúce hodnoty vstupov a výstupov, čiže $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$. Nech je útvar A efektívny a útvar B neefektívny.

Hranica efektívnosti je teda podľa časti 1.1 daná polpriamkou vedenou z bodu $[0, 0]$ cez bod A . Hranica efektívnosti teda leží na priamke, ktorá má predpis $y = \frac{y_A}{x_A}x$. Podľa [9, Veta 13] a na základe podmienok prípustnosti aditívneho modelu pre bod B , danými vzťahmi (4), môžeme vrchol B' charakterizovať ako prienik priamky $y = \frac{y_A}{x_A}x$ a priamky $x = x_B$ a vrchol B'' charakterizujeme ako prienik priamky $y = \frac{y_A}{x_A}x$ a priamky $y = y_B$. Teda poznáme súradnice vrcholov B' a B'' :

$$B' = [x_{B'}, y_{B'}] = [x_B, \frac{y_A}{x_A}x_B],$$

$$B'' = [\frac{x_A}{y_A}y_B, y_B].$$

Dopočítajme efektívnosť v týchto vrcholoch podľa vzťahu (12):

$$\rho_{B'}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{x_B}{x_B} + \frac{y_B}{\frac{y_A}{x_A}x_B} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_B x_A}{y_A x_B} \right),$$

$$\rho_{B''}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{x_A}{y_A}y_B}{x_B} + \frac{y_B}{y_B} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_A y_B}{y_A x_B} + 1 \right),$$

čím sme dostali rovnosť $\rho_{B'}^A = \rho_{B''}^A$, a teda sme dokázali, že miery efektívnosti vo vrcholoch B' a B'' sa rovnajú. \square

Ukázali sme teda všeobecnú platnosť tohto tvrdenia, čo implikuje, že v prípade jedného vstupu a jedného výstupu pre CRS stačí, ak uhol medzi hranicou efektívnosti a gradientom účelovej funkcie určitého modelu pre daný neefektívny útvar je ostrý alebo tupý, čo je ozaj široké spektrum prípadov, a dostaneme tú istú hodnotu efektívnosti.

Čo sa týka poradia neefektívnych útvarov podľa miery efektívnosti sledujeme, že kým pri jednoduchších príkladoch sa napriek menším zmenám mier efektívnosti poradie zhodovalo, v rozsiahlejšom Príklade 3.3 sa poradie niektorých útvarov už mierne líšilo. Spôsobené to mohlo byť rozsiahlosťou problému, no napriek tomu neboli odlišnosti príliš markantné.

Na konkrétnych príkladoch sme teda ilustrovali tvrdenia a ich dôsledky dokázané v kapitole 2, pokúsili sme sa objasniť podobnosti a rozdielnosti vo výsledkoch jednotlivých modelov a zároveň sme demonštrovali dôsledky vplyvu rôznych jednotiek vstupných dát na základný aditívny model.

Prípadné rozšírenie práce vidíme v podrobnejšej analýze rozdielov a podobností v hodnotách efektívnych vzorov určených jednotlivými modelmi, ale aj v skúmaní prípadných vzťahov medzi nimi.

Záver

Postupné rozširovanie množiny neorientovaných DEA modelov so sebou prináša aj otázky týkajúce sa ich vzájomných vzťahov, podobností a odlišností. V našej práci sme sa konkrétne zamerali na súvislosti medzi typickými predstaviteľmi neorientovaných modelov, a teda medzi aditívnymi modelmi s rôznymi typmi váh a SBM modelom.

Najprv však bolo potrebné predstaviť základy DEA, potrebné k ďalšej analýze vybraných typov modelov. V kapitole 1.1 preto objasňujeme kľúčové pojmy a zákonitosti z teórie obáľkovej analýzy dát, ktoré sme čerpali napríklad z [7] a [3]. V podkapitolách 1.2 a 1.3 sme usmernili našu pozornosť na vybrané DEA modely, ktorých porovnanie je cieľom našej práce. Keďže nás zaujímal aj vplyv rôznej voľby váh v aditívnom modeli, sledovali sme výsledky aditívneho modelu so štyrmi apriórne zvolenými váhami podľa [7], ale zahrnuli sme aj prípad váh určených samotnými hodnotami vstupov a výstupov, a teda bola účelová funkcia daná vzťahom (7). Tento typ váh sme čerpali z článku [2] a zaujal nás aj z hľadiska istej podobnosti účelovej funkcie s účelovou funkciou prislúchajúcou SBM modelu.

Kľúčovou je z hľadiska naplnenia cieľu našej práce kapitola 2. Na začiatku podkapitol 2.1 a 2.2 sme zhrnuli a objasnili základné vlastnosti aditívneho modelu bez váh a SBM modelu, z čoho sú prvotné odlišnosti a podobnosti modelov evidentné.

Porovnávali sme však aj výsledky rôznych modifikácií aditívneho modelu s váhami, čomu je venovaná časť 2.1.1. V tejto časti odvádzame určité zákonitosti týkajúce sa ich hodnôt účelových funkcií. Na jednu z kľúčových otázok ohľadom schopnosti určiť váhy tak, aby sa eliminovali oba hlavné nedostatky základného aditívneho modelu, teda závislosti účelovej funkcie od voľby váh a jej nevhodného škálovania, dostávame odpoveď Tvrdeniami 2.1 a 2.2. Podotýkame, že dôkaz Tvrdenia 2.2 je detailnejšie vypracovaná a vysvetlená verzia dôkazu obdobného tvrdenia v článkoch [1] a [6], v ktorej sme vysvetlili dôležitosť podmienky (2), t.j. podmienky VRS, pre platnosť tohto tvrdenia. Ďalej sme sa v tejto časti zamerali aj na odvodenie vzťahov medzi hodnotami účelových funkcií jednotlivých modelov, o čom hovoria Tvrdenia 2.3 a 2.4, z ktorých sme ďalej odvodili Dôsledky 2.1 a 2.2 týkajúce sa vzťahov medzi optimálnymi hodnotami účelových funkcií pre dané modely.

V podkapitole 2.2 odpovedáme Tvrdením 2.5 na ďalšiu kľúčovú otázku v rámci

porovnávania daných modelov, týkajúcu sa vzťahu medzi hodnotami efektívít všetkých nami používaných aditívnych modelov a SBM modelu. Prekvapivé zistenie, že všetky nami porovnávané aditívne modely určujú vzťahom (12) vždy nižšiu efektivitu ako SBM model sme dokázali využitím nami skonštruovanej transformácie účelovej funkcie SBM modelu na tvar (15) a substitúcie (16). Vďaka čomu sme ďalej mohli aplikovať dôkaz rovnakej vlastnosti avšak pre iné modely z článku [12].

V kapitole 3 sme ilustrovali nielen už známe poznatky ohľadom vlastností vybraných DEA modelov, ale aj všetky naše zistenia pomocou nami naprogramovaných modelov v softvéri MATLAB na dvoch menších Príkladoch 3.1 a 3.2 a na väčšom Príklade 3.3 s reálnymi dátami.

Obširne zhrnutie výsledkov a pozorovaní sme uviedli v podkapitole 3.2, v ktorej dôkladne analyzujeme a zdôvodňujeme ďalšie zaujímavé podobnosti a odlišnosti výsledkov jednotlivých aditívnych modelov a SBM modelu. Napríklad sa zaoberáme pozorovaním, keď niektoré aditívne modely určili rovnaké efektívne vzory pre niektoré neefektívne útvary, čo malo logické vysvetlenie v teórii lineárneho programovania. S čím súvisí aj nami dokázané Tvrdenie 3.1, ktoré hovorí o totožných mierach efektívít dopočítaných podľa (12) v krajných bodoch úsečky efektívnych vzorov nejakého neefektívneho útvaru v prípade jedného vstupu a jedného výstupu pre CRS.

Dôvod rozdielnosti výsledných efektívnych vzorov pre určité neefektívne útvary v prípade niektorých typov modelov hľadáme tiež v teórii lineárneho programovania. Konkrétne sme hovorili o tom, že v prípade viacnásobného optimálneho riešenia, kedy sa optimálna hodnota účelovej funkcie nadobúda na celej úsečke efektívnych vzorov, môžu vyjsť výsledné efektívne vzory aj vo vnútri množiny optimálnych riešení, čiže nie v krajných bodoch úsečky efektívnych vzorov. Príčinou je typ metódy, ktorou riešime danú úlohu LP, a teda metóda vnútroného bodu.

Možným rozšírením našej práce by mohla byť detailnejšia analýza určovania efektívnych vzorov v prípade aditívnych modelov s jednotlivým typom váh. Hľadanie istého pravidla, kedy hodnoty efektívnych vzorov určitého typu aditívneho modelu vychádzajú vždy väčšie alebo rovné, resp. menšie alebo rovné, ako pre ostatné aditívne modely.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Aida, K. et al.: *Evaluating Water Supply Services in Japan with RAM: a Range-adjusted Measure of Inefficiency*, Omega 26 (1998), 207-232
- [2] Cook, W.D., Seiford, L.M.: *Data envelopment analysis (DEA) - Thirty years on*, European Journal of Operational Research 192 (2009), 1-17
- [3] Cooper, W.W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Second Edition, Springer, New York, 2007
- [4] Cooper, W.W. et al.: *Some models and measures for evaluating performances with DEA: past accomplishments and future prospects*, Journal of Productivity Analysis 28 (2007), 151-163, dostupné na internete (7.3.2016):
<http://www.deafontier.net/papers/JPADEA.pdf>
- [5] Data envelopment analysis: a glossary of terms, dostupné na internete (4.12.2015):
<http://www.banxia.com/frontier/resources/glossary/>
- [6] Glover, F., Sueyoshi, T.: *Contributions of Professor William W. Cooper in Operations Research and Management Science*, European Journal of Operation Research 197 (2009), 1-16
- [7] Halická, M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (4.12.2015):
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/text/TextDEA40.pdf>
- [8] Klieštik, T.: *Kvalifikácia efektivity činnosti dopravných podnikov pomocou Data Envelopment Analysis*, E+M Ekonomie a management 1 (2009), dostupné na internete (4.12.2015):
http://www.ekonomie-management.cz/download/1331826707_1add/13_kliestik.pdf
- [9] Plesník, J.: *Lineárne programovanie*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2014
- [10] Profant, R.: *Návrh a vypracovanie webovského rozhrania pre interaktívnu možnosť riešenia DEA úloh*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2013, dostupné na

internete (4.12.2015):

<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/projekty/profant/>

- [11] Ray, S.C.: *Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operation Research*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004
- [12] Sueyoshi, T., Sekitani, K.: *Computational strategy for Russell measure in DEA: Second-order cone programming*, European Journal of Operation Research 180 (2007), 459-471
- [13] Ševčovič, D., Halická, M., Brunovský, P.: *DEA analysis for a large structured bank branch network*, Central European Journal of Operational Research 9 (2001), 329-342, dostupné na internete (7.3.2016):
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl19.pdf>
- [14] Thanassoulis, E.: *Introduction to the theory and application of Data Envelopment Analysis*, Springer, New York, 2001
- [15] Vincová, K.: *Využitie modelov DEA na hodnotenie efektívnosti*, BIATEC 8 (2005), 24-28

Príloha A

A Zdrojové kódy programov pre MATLAB

A.1 Aditívny model

Aditívny model s voľbou váh pre CRS

```
function [Efekt]=ADOMCRS()
%Zadefinovanie matic vstupov a vystupov, 1 riadok zodpoveda 1 DMU
filename= 'Banky.xlsx';
sheet = 1;
xRange = 'B4:D23';
yRange = 'E4:F23';
X=xlsread(filename,sheet,xRange);
Y=xlsread(filename,sheet,yRange);
n=length(Y(:,1)); %pocet DMU
m=length(X(1,:)); %pocet vstupov
s=length(Y(1,:)); %pocet vystupov
for o = 1:n
    xo=X(o,:);
    yo=Y(o,:);
%DEFINOVANIE VAH
%zakladny AD: jednotkove vahy
    wx1=ones(1,m);
    wy1=ones(1,s);
%AD S VAHAMI
%max
    Rx1 = max(X);
    Ry1 = max(Y);
%avg
    Rx2=(1/n)*sum(X);
    Ry2=(1/n)*sum(Y);
```

```
%RAM model
Rx3=max(X)-min(X);
Ry3=max(Y)-min(Y);
%standard deviation (sd)
priemerX=(1/n)*sum(X);
for j=1:n
    odchylkaX(j,:)=(X(j,:)-priemerX).^2;
end
sigmaX=(1/n)*sum(odchylkaX);
Rx4=sigmaX.^(1/2);
priemerY=(1/n)*sum(Y);
for j=1:n
    odchylkaY(j,:)=(Y(j,:)-priemerY).^2;
end
sigmaY=(1/n)*sum(odchylkaY);
Ry4=sigmaY.^(1/2);
%Q_o - vahy posteriori
Rx5=xo;
Ry5=yo;
%Vyber vah
wx = 1./((m+s)*Rx5);
wy = 1./((m+s)*Ry5);
%LP uloha
Ax=[X' eye(m) zeros(m,s)]; %ohranicenia pre x
Ay=[Y' zeros(s,m) -eye(s)]; %ohranicenia pre y
Aeq=[Ax; Ay]; %matica ohraniceni
beq=[xo yo]; %prave strany ohraniceni
ucelova=[zeros(1,n) -wx -wy]; %ucelova funkcia
lb=zeros(1, n+m+s); %nezapornost premennych
options = optimset('Display','none');
[x,fval]=linprog(ucelova,[],[],Aeq,beq,lb,[],[],options);
```

```
lambda=x(1:n);      %vahy v efektívnom vzore
vzorX=X'*lambda;   %efektívny vzor vstupov
vzorY=Y'*lambda;   %efektívny vzor vystupov
%Vypocet efektivity
xv=vzorX./xo';
yv=yo'./vzorY;
E=(1/(m+s))*(sum(xv)+sum(yv));
%Zapisanie vysledkov do matic
Efekt(o,:) = E;      %efektivita
M(o,:) = [fval,x'];  %riešenie a hodnota ucel. fcie ulohy LP
L(o,:) = lambda;    %vahy v efektívnych vzoroch
Vx(o,:) = vzorX;    %hodnoty efektívnych vzorov
Vy(o,:) = vzorY;
end
%Usporiadanie podľa efektivity / ranky
[sortedE,I]=sort(Efekt,'descend');
RankE=zeros([n,1]);
for i=1:n
    if ( abs(sortedE(i)-1) < 10^(-4) ) RankE(I(i))=1;
    elseif (abs(sortedE(i)-sortedE(i-1) ) < 10^(-4) )
        RankE(I(i))=RankE(I(i-1));
    else RankE(I(i))=i;
    end
end
%vytvorenie excel suboru
filename = 'ADOMCRS.xlsx';
xlswrite(filename,[Efekt RankE M],1);
xlswrite(filename,[Vx,Vy],2);
xlswrite(filename,L,3);
end
```

Aditívny model s voľbou váh pre VRS

```
function [Efekt]=ADOMVRS()
%Zadefinovanie matic vstupov a vystupov, 1 riadok zodpoveda 1 DMU
filename= 'Banky.xlsx';
sheet = 1;
xRange = 'B4:D23';
yRange = 'E4:F23';
X=xlsread(filename,sheet,xRange);
Y=xlsread(filename,sheet,yRange);
n=length(Y(:,1)); %pocet DMU
m=length(X(1,:)); %pocet vstupov
s=length(Y(1,:)); %pocet vystupov
for o = 1:n
    xo=X(o,:);
    yo=Y(o,:);
%DEFINOVANIE VAH
%zakladny AD: jednotkove vahy
    wx1=ones(1,m);
    wy1=ones(1,s);
%AD S VAHAMI
%max
    Rx1 = max(X);
    Ry1 = max(Y);
%priemer
    Rx2=(1/n)*sum(X);
    Ry2=(1/n)*sum(Y);
%RAM model
    Rx3=max(X)-min(X);
    Ry3=max(Y)-min(Y);
%standard.odchylky
    priemerX=(1/n)*sum(X);
```

```
for j=1:n
    odchylkaX(j,:)=(X(j,:)-priemerX).^2;
end
sigmaX=(1/n)*sum(odchylkaX);
Rx4=sigmaX.^(1/2);
priemerY=(1/n)*sum(Y);
for j=1:n
    odchylkaY(j,:)=(Y(j,:)-priemerY).^2;
end
sigmaY=(1/n)*sum(odchylkaY);
Ry4=sigmaY.^(1/2);
%Q_o
Rx5=xo;
Ry5=yo;
%Vyber vah
wx = 1./((m+s)*Rx5);
wy = 1./((m+s)*Ry5);
%LP uloha
Ax=[X' eye(m) zeros(m,s)];    %ohranicenia pre x
Ay=[Y' zeros(s,m) -eye(s)];    %ohranicenia pre y
Al=[ones(1,n) zeros(1,m) zeros(1,s)];    %podm. VRS
Aeq=[Ax; Ay; Al];    %matica ohraniceni
beq=[xo yo 1];    %prave strany ohraniceni
ucelova=[zeros(1,n) -wx -wy];    %ucelova funkcia
lb=zeros(1, n+m+s);    %nezapornost premennych
options = optimset('Display','none');
[x,fval]=linprog(ucelova,[],[],Aeq,beq,lb,[],[],options);
lambda=x(1:n);    %vahy v efektívnom vzore
vzorX=X'*lambda;    %efektívny vzor vstupov
vzorY=Y'*lambda;    %efektívny vzor vystupov
%Vypocet efektivity
```

```

    xv=vzorX./xo';
    yv=yo'./vzorY;
    E=(1/(m+s))*(sum(xv)+sum(yv));
%Efektivita pre RAM
    %E2(o,:)=1-(-fval);
%Zapisanie vysledkov do matic
    Efekt(o,:) = E;          %efektivita
    M(o,:) = [fval,x'];    %riešenia úlohy LP
    L(o,:) = lambda;      %vahy v efektívnych vzoroch
    Vx(o,:) = vzorX;      %hodnoty efektívnych vzorov
    Vy(o,:) = vzorY;
end
%Usporiadanie podľa efektivity / ranky
    [sortedE,I]=sort(Efekt,'descend');
    RankE=zeros([n,1]);
    for i=1:n
        if ( abs(sortedE(i)-1) < 10(-4) ) RankE(I(i))=1;
        elseif (abs(sortedE(i)-sortedE(i-1)) < 10(-4) )
            RankE(I(i))=RankE(I(i-1));
        else RankE(I(i))=i;
        end
    end
end
%Usporiadanie podľa efektivity / RAM - GAMMA efektivita
    %[SEg,Ig]=sort(E2,'descend');
    %RankEg=zeros([n,1]);
    %for i=1:n
        % if ( abs(SEg(i)-1) < 10(-4) ) RankEg(Ig(i))=1;
        % elseif (abs(SEg(i)-SEg(i-1)) < 10(-4) )
            % RankEg(Ig(i))=RankEg(Ig(i-1));
        % else RankEg(Ig(i))=i;
    %end

```



```

    %end
%vytvorenie excel suboru
    filename = 'ADOMVRS.xlsx';
    xlswrite(filename,[Efekt RankE M],1);
    xlswrite(filename,[Vx,Vy],2);
    xlswrite(filename,L,3);
    %xlswrite(filename,[E2 RankEg],4);    %Zapisanie vysledkov RAM
end

```

A.2 SBM model

SBM model s CRS

```

function [E]=SBMOMCRS()
%Zadefinovanie matic vstupov a vystupov, 1 riadok zodpoveda 1 DMU
filename= 'Banky.xlsx';
sheet = 1;
xRange = 'B4:D23';
yRange = 'E4:F23';
X=xlsread(filename,sheet,xRange);
Y=xlsread(filename,sheet,yRange);
n=length(Y(:,1));    %pocet DMU
m=length(X(1,:));    %pocet vstupov
s=length(Y(1,:));    %pocet vystupov
for o = 1:n
    xo=X(o,:);
    yo=Y(o,:);
    qx = -1./(m*xo);    %pomocna premenna pre ucelovu funkciu (zlomok)
    qx(qx==Inf) = 0;    %ak nulove vstupy
    ucelova=[1 zeros(1,n) qx zeros(1,s)];    %ucelova funkcia
    yoo = yo;
    yoo(yo==0) = 1;    %ak nulove vystupy
    qy = 1./(s*yoo);    %pomocna premenna pre prve ohranicenie (zlomok)

```

```

normal = [1 zeros(1,n) zeros(1,m) qy]; %1. ohr. / normalizacia
Ax=[-xo' X' eye(m) zeros(m,s)]; %ohranicenia pre x
Ay=[-yo' Y' zeros(s,m) -eye(s)]; %ohranicenia pre y
Aeq=[normal; Ax; Ay]; %matica ohraniceni
beq=[1 zeros(1,m+s)]; %prave strany ohraniceni
lb=[-Inf zeros(1, n+m+s)]; %nezapornost premennych
options = optimset('Display','none');
[x,fval]=linprog(ucelova,[],[],Aeq,beq,lb,[],[],options);
t=x(1);
lambda=x(2:n+1)/t; %dopocitanie vah v efektivnom vzore
vzorX=X'*lambda; %efektivny vzor vstupov
vzorY=Y'*lambda; %efektivny vzor vystupov
%Zapisanie vysledkov do matic
E(o,:) = fval; %efektivita
M(o,:) = [fval,x']; %riešenie a hodnota ucel.fcie úlohy LP
L(o,:) = lambda; %vahy efektivnych vzoroch
Vx(o,:) = vzorX; %efektivne vzory
Vy(o,:) = vzorY;
end
%Usporiadanie podľa efektivity / ranky
[sortedE,I]=sort(E,'descend');
RankE=zeros([n,1]);
for i=1:n
    if ( abs(sortedE(i)-1) < 10^(-4) ) RankE(I(i))=1;
    elseif (abs(sortedE(i)-sortedE(i-1) ) < 10^(-4) )
        RankE(I(i))=RankE(I(i-1));
    else RankE(I(i))=i;
    end
end
end
%vytvorenie excel suboru
filename = 'SBMOMCRS.xlsx';

```

```

    xlswrite(filename, [RankE, M], 1);
    xlswrite(filename, [Vx, Vy], 2);
    xlswrite(filename, L, 3);
end

```

SBM model s VRS

```

function [E]=SBMOMVRS()
%Zadefinovanie matic vstupov a vystupov, 1 riadok zodpoveda 1 DMU
filename= 'Banky.xlsx';
sheet = 1;
xRange = 'B4:D23';
yRange = 'E4:F23';
X=xlsread(filename,sheet,xRange);
Y=xlsread(filename,sheet,yRange);
n=length(Y(:,1)); %pocet DMU
m=length(X(1,:)); %pocet vstupov
s=length(Y(1,:)); %pocet vystupov
for o = 1:n
    xo=X(o,:);
    yo=Y(o,:);
    qx = -1./(m*xo); %pomocna premenna pre ucelovu funkciu (zlomok)
    qx(qx==Inf) = 0; %zrusenie clenu s nulovym vstupom
    ucelova=[1 zeros(1,n) qx zeros(1,s)]; %ucelova funkcia
    yoo = yo;
    yoo(yo==0) = 1; %nulove vstupy
    qy = 1./(s*yoo); %pomocna premenna pre prve ohranicenie (zlomok)
    normal = [1 zeros(1,n) zeros(1,m) qy]; %1. ohr./ normalizacia
    Ax=[-xo' X' eye(m) zeros(m,s)]; %ohranicenia pre x
    Ay=[-yo' Y' zeros(s,m) -eye(s)]; %ohranicenia pre y
    Al=[-1 ones(1,n) zeros(1,m) zeros(1,s)]; %podm. pre VRS
    Aeq=[normal; Ax; Ay; Al]; %matica ohraniceni
    beq=[1 zeros(1,m+s) 0]; %prave strany ohraniceni

```

```

lb=[-Inf zeros(1, n+m+s)];          %nezapornost premennych
options = optimset('Display','none');
[x,fval]=linprog(ucelova,[],[],Aeq,beq,lb,[],[],options);
t=x(1);
lambda=x(2:n+1)/t ;                %dopocitanie vah v efektivnom vzore
vzorX=X'*lambda;                    %efektivny vzor vstupov
vzorY=Y'*lambda;                    %efektivny vzor vystupov
%Zapisanie vysledkov do matic
E(o,:) = fval; %efektivita
M(o,:) = [fval,x'];                 %vahy v efektivnych vzoroch
Vx(o,:) = vzorX;                    %hodnoty efektivnych vzorov
Vy(o,:) = vzorY;
end
%Usporiadanie podla efektivity / ranky
[sortedE,I]=sort(E,'descend');
RankE=zeros([n,1]);
for i=1:n
    if ( abs(sortedE(i)-1) < 10^(-4) ) RankE(I(i))=1;
    elseif (abs(sortedE(i)-sortedE(i-1) ) < 10^(-4) )
        RankE(I(i))=RankE(I(i-1));
    else RankE(I(i))=i;
    end
end
%vytvorenie excel suboru
filename = 'SBMOMVRS.xlsx';
xlswrite(filename,[RankE, M],1);
xlswrite(filename,[Vx,Vy],2);
xlswrite(filename,L,3);
end

```

Príloha B

B Dáta k príkladu s bankami

V nasledujúcej časti uvádzame vstupné dáta k Príkladu 3.3 spolu s výsledkami jednotlivých modelov.

Tabuľka 22: Vstupné dáta k Príkladu 3.3

DMU	Kapitál	Počet pobočiek	Počet zamestnancov	Zisk	Vklady
Daiichikangyou	859	371	15 788	218 938	28 910
Sakura	1043	436	14 930	159 932	29 804
Fuji	1040	327	13 567	223 340	27 405
TM	786	374	17 412	218 989	39 653
Asahi	605	369	12 148	88 091	20 146
Sanwa	843	338	13 020	175 483	28 254
Sumitomo	753	353	14 394	176 477	27 388
Daiwa	465	193	7 315	37 611	9 998
Toukai	723	281	10 750	118 963	18 546
Hokkaido	71	135	2 584	12 765	3 286
Gunma	49	173	3 714	20 308	4 753
Ashikaga	132	189	4 073	17 666	4 986
Chiba	107	163	4 569	29 830	6 610
Yokohama	185	186	5 323	51 154	8 648
Hokuriku	121	191	3 976	10 194	5 289
Shizuoka	91	189	4 509	42 982	6 578
Kyoto	27	115	2 862	8 633	3 749
Hiroshima	52	222	3 832	7 606	4 917
Hukuoka	59	177	4 261	9 733	5 585
Nishinohon	51	194	3 492	5 765	3 763

Tabuľka 23: Efektívne vzory celkového množstva kapitálu určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}, AD_{avg} RAM, AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	859	859	859	859
Sakura	1043	590,77	590,77	591,52
Fuji	1 040	1 040	1 040	1 040
TM	786	786	786	786
Asahi	605	399,33	548,38	425
Sanwa	758,8	682,91	682,91	682,91
Sumitomo	753	633,42	633,42	640
Daiwa	465	198,18	330,21	219,58
Toukai	723	426,98	426,98	429,95
Hokkaido	71	65,13	71	69,49
Gunma	49	49	49	49
Ashikaga	132	98,83	132	104,44
Chiba	107	107	107	107
Yokohama	185	183,6	183,6	184,43
Hokuriku	121	104,84	121	109,02
Shizuoka	91	91	91	91
Kyoto	27	27	27	27
Hiroshima	52	52	52	52
Hukuoka	59	59	59	59
Nishinohon	51	51	51	51

Tabuľka 24: Efektívne vzory počtu pobočiek určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}, AD_{avg} RAM, AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	371	371	371	371
Sakura	351	281	281	281
Fuji	327	327	327	327
TM	374	374	374	374
Asahi	266	190	261	202
Sanwa	294	288	288	288
Sumitomo	318	301	301	305
Daiwa	168	94	157	104
Toukai	251	203	203	205
Hokkaido	93	31	34	33
Gunma	141	141	141	141
Ashikaga	130	47	130	50
Chiba	163	103	140	140
Yokohama	160	87	87	88
Hokuriku	133	50	133	52
Shizuoka	189	189	189	189
Kyoto	115	115	115	115
Hiroshima	146	123	146	146
Hukuoka	166	140	166	166
Nishinohon	108	75	108	108

Efektívne vzory počtu pobočiek udávame z logických dôvodov zaokrúhlené na celé čísla.

Tabuľka 25: Efektívne vzory počtu zamestnancov určené jednotlivými modelmi v Príkľade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}, AD_{avg} RAM, AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	15 788	15 788	15 788	15 788
Sakura	14 930	13 087	13 087	13 104
Fuji	13 567	13 567	13 567	13 567
TM	17 412	17 412	17 412	17 412
Asahi	12 148	8 846	12 148	9 415
Sanwa	13 020	13 020	13 020	13 020
Sumitomo	14 394	14 032	14 032	14 178
Daiwa	7 315	4 390	7 315	4 864
Toukai	10 750	9 459	9 459	9 525
Hokkaido	2 584	1 443	1 573	1 539
Gunma	3 455	3 453	3 455	3 455
Ashikaga	4 073	2 189	4 073	2 314
Chiba	4 288	3 520	3 891	3 891
Yokohama	5 323	4 067	4 067	4 086
Hokuriku	3 976	2 322	3 976	2 415
Shizuoka	4 509	4 509	4 509	4 509
Kyoto	2 862	2 862	2 862	2 862
Hiroshima	3 559	3 327	3 559	3 559
Hukuoka	4 043	3 781	4 043	4 043
Nishinohon	2 592	2 259	2 592	2 592

Efektívne vzory počtu zamestnancov udávame z logických dôvodov zaokrúhlené na celé čísla.

Tabuľka 26: Efektívne vzory celkového zisku určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}, AD_{avg} RAM, AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	218 938	218 938	218 938	218 938
Sakura	233 267,23	164 596,58	164 596,58	164 804,16
Fuji	223 340	223 340	223 340	223 340
TM	218 989	218 989	218 989	218 989
Asahi	159 764,57	111 258,98	152 784,19	118 409,6
Sanwa	184 839,13	175 483	175 483	175 483
Sumitomo	193 758,55	176 477	176 477	178 311,46
Daiwa	108 616,68	55 215,29	92 000,03	61 177,88
Toukai	164 508,4	118 963	118 963	119 789,58
Hokkaido	26 931,18	18 147,37	19 781,45	19 361,29
Gunma	20 368,19	20 308	20 368,19	20 368,19
Ashikaga	44 900,07	27 535,85	44 900,07	29 097,61
Chiba	43372,9	30 375,33	40 562,93	40 562,93
Yokohama	60 203,24	51 154	51 154	51 385,24
Hokuriku	42 872,48	29 209,21	42 872,48	30 373,53
Shizuoka	42 982	42 982	42 982	42 982
Kyoto	8 633	8 633	8 633	8 633
Hiroshima	21 906,34	15 554,93	21 906,34	21 906,34
Hukuoka	24 841,3	17 651,69	24 841,3	24 841,3
Nishinohon	23 913,62	14 762,89	23 913,62	23 913,62

Tabuľka 27: Efektívne vzory celkového množstva vkladov určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}, AD_{avg} RAM, AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	28 910	28 910	28 910	28 910
Sakura	30 986,96	29 804	29 804	29 841,59
Fuji	27 405	27 405	27 405	27 405
TM	39 653	39 653	39 653	39 653
Asahi	27 202,69	20 146	27 665,1	21 440,78
Sanwa	28 254	28 873,78	28 873,78	28 873,78
Sumitomo	31 936,94	31 955,22	31 955,22	32 287,4
Daiwa	15 557,98	9 998	16 658,72	11 077,66
Toukai	22 540	21 540,99	21 540,99	21 690,66
Hokkaido	4 387,83	3 286	3 581,89	3 505,81
Gunma	4 753	4 753	4 753	4 753
Ashikaga	7 574,97	4 986	7 574,97	5 268,79
Chiba	6 926,75	6 610	6 610	6 610
Yokohama	10 309,28	9 262,61	9 262,61	9 304,48
Hokuriku	7 136,94	5 289	7 136,94	5 499,83
Shizuoka	6 578	6 578	6 578	6 578
Kyoto	3 749	3 749	3 749	3 749
Hiroshima	4 917	4 917	4 917	4 917
Hukuoka	5 585	5 585	5 585	5 585
Nishinohon	3 763	3 763	3 763	3 763

Tabuľka 28: Miery efektivity spolu s poradím útvarov pre jednotlivé modely v Príklade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}, AD_{avg} RAM, AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Sakura	0,89 (11)	0,81 (12)	0,81 (12)	0,69 (11)
Fuji	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
TM	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Asahi	0,8 (14)	0,74 (15)	0,78 (15)	0,56 (13)
Sanwa	0,94 (7)	0,93 (7)	0,93 (7)	0,88 (7)
Sumitomo	0,93 (8)	0,91 (8)	0,91 (8)	0,82 (8)
Daiwa	0,77 (17)	0,64 (18)	0,71 (19)	0,41 (17)
Toukai	0,89 (12)	0,81 (13)	0,81 (13)	0,68 (12)
Hokkaido	0,78 (16)	0,68 (17)	0,68 (20)	0,47 (15)
Gunma	0,95 (6)	0,95 (6)	0,95 (6)	0,91 (6)
Ashikaga	0,75 (18)	0,64 (19)	0,75 (16)	0,4 (18)
Chiba	0,92 (9)	0,88 (9)	0,89 (9)	0,77 (9)
Yokohama	0,91 (10)	0,83 (11)	0,83 (11)	0,72 (10)
Hokuriku	0,74 (19)	0,61 (20)	0,74 (17)	0,3 (20)
Shizuoka	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Kyoto	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Hiroshima	0,79 (15)	0,78 (14)	0,79 (14)	0,44 (16)
Hukuoka	0,86 (13)	0,85 (10)	0,86 (10)	0,54 (14)
Nishinohon	0,71 (20)	0,68 (16)	0,71 (18)	0,3 (19)

Tabuľka 29: Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom v Príklade 3.3 pre CRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}	AD_{avg}	RAM	AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	0	0	0	0	0	0	1
Sakura	74 602,79	0,18	0,41	0,21	0,66	0,19	0,69
Fuji	0	0	0	0	0	0	1
TM	0	0	0	0	0	0	1
Asahi	78 833,62	0,18	0,38	0,22	0,68	0,30	0,56
Sanwa	9 484,43	0,06	0,13	0,07	0,20	0,07	0,88
Sumitomo	21 865,72	0,07	0,17	0,09	0,27	0,10	0,82
Daiwa	76 590,32	0,15	0,33	0,17	0,51	0,52	0,41
Toukai	49 569,71	0,12	0,28	0,14	0,43	0,19	0,68
Hokkaido	15 310,14	0,07	0,13	0,09	0,28	0,36	0,47
Gunma	350,82	0,02	0,03	0,02	0,08	0,05	0,91
Ashikaga	29 882,09	0,10	0,20	0,13	0,42	0,47	0,40
Chiba	14 140,38	0,04	0,08	0,05	0,17	0,13	0,77
Yokohama	10 736,91	0,06	0,12	0,08	0,27	0,17	0,72
Hokuriku	34 584,14	0,10	0,21	0,13	0,42	0,77	0,30
Shizuoka	0	0	0	0	0	0	1
Kyoto	0	0	0	0	0	0	1
Hiroshima	14 649,65	0,06	0,11	0,08	0,25	0,46	0,44
Hukuoka	15 337,53	0,03	0,06	0,04	0,12	0,33	0,54
Nishinohon	19 134,35	0,08	0,15	0,10	0,32	0,77	0,30

Tabuľka 30: Efektívne vzory celkového množstva kapitálu určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max} <i>RAM</i> AD_{sd}	AD_{avg}	AD_{post} / <i>SBM</i>
Daiichikangyou	859	859	859	859
Sakura	949,96	577,8	656,53	656,53
Fuji	1 040	1 040	1 040	1 040
TM	786	786	786	786
Asahi	605	373,63	511,4	511,4
Sanwa	843	843	843	843
Sumitomo	753	637,06	626,24	637,06
Daiwa	399,71	159,1	255,58	255,58
Toukai	723	425,09	438,48	438,48
Hokkaido	71	71	71	71
Gunma	49	49	49	49
Ashikaga	132	59,59	90,17	74,06
Chiba	107	103,48	107	107
Yokohama	185	185	146,52	146,52
Hokuriku	121	59,56	85,11	85,46 / 70,29
Shizuoka	91	91	91	91
Kyoto	27	27	27	27
Hiroshima	52	51,69	52	52
Hukuoka	59	59	59	59
Nishinohon	51	27,3	51	51

Tabuľka 31: Efektívne vzory počtu pobočiek určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max} <i>RAM</i> AD_{sd}	AD_{avg}	AD_{post} / <i>SBM</i>
Daiichikangyou	371	371	371	371
Sakura	344	303	330	330
Fuji	327	327	327	327
TM	374	374	374	374
Asahi	300	233	280	280
Sanwa	338	338	338	338
Sumitomo	333	321	325	321
Daiwa	193	160	193	193
Toukai	281	251	255	255
Hokkaido	135	135	135	135
Gunma	173	173	173	173
Ashikaga	171	126	137	169
Chiba	163	141	142	163
Yokohama	186	171	186	186
Hokuriku	169	126	135	174 / 165
Shizuoka	189	189	189	189
Kyoto	115	115	115	115
Hiroshima	174	123	124	148
Hukuoka	177	177	177	177
Nishinohon	143	115	123	143

Efektívne vzory počtu pobočiek udávame z logických dôvodov zaokrúhlené na celé čísla.

Tabuľka 32: Efektívne vzory počtu zamestnancov určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max} <i>RAM</i> AD_{sd}	AD_{avg}	$AD_{post, SBM}$
Daiichikangyou	15 788	15 788	15 788	15 788
Sakura	14 930	13 421	14 930	14 930
Fuji	13 567	13 567	13 567	13 567
TM	17 412	17 412	17 412	17 412
Asahi	12 148	9 507	12 148	12 148
Sanwa	13 020	13 020	13 020	13 020
Sumitomo	14 394	14 394	14 394	14 394
Daiwa	6 801	5 394	7 244	7 244
Toukai	10 750	10 493	10 750	10 750
Hokkaido	2 584	2 584	2 584	2 584
Gunma	3 714	3 714	3 714	3 714
Ashikaga	4 073	3 487	4 073	4 073
Chiba	4 562	4 328	4 396	4 562
Yokohama	5 323	5 323	5 323	5 323
Hokuriku	3 976	3 486	3 976	3 976
Shizuoka	4 509	4 509	4 509	4 509
Kyoto	2 862	2 862	2 862	2 862
Hiroshima	3 801	3 335	3 341	3 591
Hukuoka	4 261	4 261	4 261	4 261
Nishinohon	3 480	2 868	3 322	3 480

Efektívne vzory počtu zamestnancov udávame z logických dôvodov zaokrúhlené na celé čísla.

Tabuľka 33: Efektívne vzory celkového zisku určené jednotlivými modelmi v Príkľade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max} RAM AD_{sd}	AD_{avg}	AD_{post} / SBM
Daiichikangyou	218 938	218 938	218 938	218 938
Sakura	221 797,63	161 285,23	183 105,59	183 105,59
Fuji	223 340	223 340	223 340	223 340
TM	218 989	218 989	218 989	218 989
Asahi	159 814,65	104 700,49	142 884,95	142 884,95
Sanwa	175 483	175 483	175 483	175 483
Sumitomo	193 780,56	176 477	176 477	176 477
Daiwa	87 628,97	45 244,93	71 983,46	71 983,46
Toukai	163 763,87	118 963	122 673,42	122 673,42
Hokkaido	12 765	12 765	12 765	12 765
Gunma	20 308	20 308	20 308	20 308
Ashikaga	38 171,08	17 666	26 140,98	33 889
Chiba	37 397,47	29 830	30 804,91	37 397,46
Yokohama	55 695,09	51 154	51 154	51 154
Hokuriku	36 202,28	17 655,62	24 738,61	34 615,42/31 866,02
Shizuoka	42 982	42 982	42 982	42 982
Kyoto	8 633	8 633	8 633	8 633
Hiroshima	20 575,55	15 476,13	15 561,72	19 650,96
Hukuoka	9 733	9 733	9 733	9 733
Nishinohon	21 513,87	8 715,02	15 284,57	21 513,88

Tabuľka 34: Efektívne vzory celkového množstva vkladov určené jednotlivými modelmi v Príklade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max} <i>RAM</i> AD_{sd}	AD_{avg}	AD_{post} / <i>SBM</i>
Daiichikangyou	28 910	28 910	28 910	28 910
Sakura	31 746,75	29 804	33 528,35	33 528,35
Fuji	27 405	27 405	27 405	27 405
TM	39 653	39 653	39 653	39 653
Asahi	25 627,6	20 146	26 663,4	26 663,4
Sanwa	28 254	28 254	28 254	28 254
Sumitomo	31 244,72	32 154,1	32 074,34	32 154,1
Daiwa	12 452,62	9 998	14 561,79	14 561,79
Toukai	21 122,03	22 580,35	23 213,66	23 213,66
Hokkaido	3 286	3 286	3 286	3 286
Gunma	4 753	4 753	4 753	4 753
Ashikaga	6 116,6	5 290,77	6 737,3	5 829,1
Chiba	7 454,58	7 366,95	7 533,35	7 454,58
Yokohama	8 869,95	9 332,69	9 049,27	9 049,27
Hokuriku	5 888,34	5 289	6 497,94	5 666,5 / 5 662,48
Shizuoka	6 578	6 578	6 578	6 578
Kyoto	3 749	3 749	3 749	3 749
Hiroshima	4 917	4 917	4 931,61	4 917
Hukuoka	5 585	5 585	5 585	5 585
Nishinohon	4 809,88	3 763	4 884,3	4 809,88

Tabuľka 35: Miery efektivity spolu s poradím útvarov pre jednotlivé modely v Príklade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max} RAM AD_{sd}	AD_{avg}	$RAM \Gamma^*$	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Sakura	0,87 (14)	0,83 (14)	0,83 (14)	0,8 (20)	0,83 (14)	0,7 (14)
Fuji	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
TM	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Asahi	0,83 (16)	0,77 (17)	0,8 (15)	0,82 (19)	0,8 (16)	0,59 (15)
Sanwa	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Sumitomo	0,95 (11)	0,92 (12)	0,92 (12)	0,93 (15)	0,92 (12)	0,84 (11)
Daiwa	0,8 (19)	0,75 (18)	0,75 (18)	0,89 (18)	0,75 (20)	0,5 (17)
Toukai	0,92 (13)	0,86 (13)	0,86 (13)	0,9 (17)	0,86 (13)	0,73 (13)
Hokkaido	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Gunma	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Ashikaga	0,84 (15)	0,78 (15)	0,76 (17)	0,94 (12)	0,77 (18)	0,53 (16)
Chiba	0,94 (12)	0,94 (11)	0,94 (11)	0,98 (11)	0,94 (11)	0,84 (12)
Yokohama	0,98 (10)	0,97 (10)	0,95 (10)	0,99 (10)	0,95 (10)	0,91 (10)
Hokuriku	0,81 (18)	0,72 (20)	0,73 (20)	0,93 (14)	0,77 (17)	0,39 (19)
Shizuoka	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Kyoto	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Hiroshima	0,83 (17)	0,78 (16)	0,78 (16)	0,92 (16)	0,8(15)	0,48 (18)
Hukuoka	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)
Nishinohon	0,76 (20)	0,72 (19)	0,75 (19)	0,94 (13)	0,76 (19)	0,36 (20)

Tabuľka 36: Optimálne hodnoty účelových funkcií úloh LP prislúchajúcich jednotlivým modelom v Príklade 3.3 pre VRS

Typ modelu	AD_z	AD_{max}	AD_{avg}	RAM	AD_{sd}	AD_{post}	SBM
Daiichikangyou	0	0	0	0	0	0	1
Sakura	63 993,76	0,17	0,39	0,20	0,60	0,18	0,70
Fuji	0	0	0	0	0	0	1
TM	0	0	0	0	0	0	1
Asahi	77 273,92	0,15	0,34	0,18	0,56	0,27	0,59
Sanwa	0	0	0	0	0	0	1
Sumitomo	21180,27	0,06	0,15	0,07	0,21	0,08	0,84
Daiwa	53 052,25	0,10	0,25	0,11	0,33	0,37	0,50
Toukai	47 376,90	0,09	0,24	0,10	0,31	0,15	0,73
Hokkaido	0	0	0	0	0	0	1
Gunma	0	0	0	0	0	0	1
Ashikaga	21 654,10	0,05	0,11	0,06	0,20	0,33	0,53
Chiba	84 18,72	0,02	0,04	0,02	0,07	0,08	0,84
Yokohama	4 763,05	0,01	0,02	0,01	0,04	0,05	0,91
Hokuriku	26 629,40	0,05	0,12	0,07	0,21	0,57	0,39
Shizuoka	0	0	0	0	0	0	1
Kyoto	0	0	0	0	0	0	1
Hiroshima	13 048,33	0,06	0,11	0,08	0,25	0,40	0,48
Hukuoka	0	0	0	0	0	0	1
Nishinihon	16 859,37	0,05	0,10	0,06	0,21	0,66	0,36