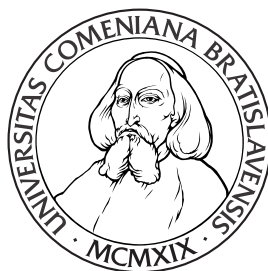


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



NIEKTORÉ NEŠTANDARDNÉ DEA MODELY:
VLASTNOSTI A POROVNANIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**NIEKTORÉ NEŠTANDARDNÉ DEA MODELY:
VLASTNOSTI A POROVNANIA**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Kristína Halušťoková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Niektoré neštandardné DEA modely: vlastnosti a porovnania
Some non-standard DEA models: properties and comparisons

Cieľ: Zatiaľ čo vlastnosti štandardných DEA modelov (modelov obáľkovej analýzy dát) sú v literatúre dobre popísané, existujú aj menej často používané modely, ktorých vlastnosti nie sú dostatočne preskúmané. Cieľom tejto bakalárskej práce je analyzovať vlastnosti neorientovaných modelov a to radiálnych aj neradiálnych založených na koeficientoch skracovania resp. naťahovania zložiek vstupov a výstupov. Vlastnosti porovnať s vlastnosťami štandardných modelov a ilustrovať na vhodne vybraných príkladoch.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 19.10.2015

Dátum schválenia: 19.11.2015

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Podakovanie Touto cestou by som sa rada podakovala svojej vedúcej bakalárskej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za ochotu, trpezlivosť, cenné rady a pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj Tomášovi Vallovi za pomoc s gramatikou a úpravou textu a svojim rodičom za ochotu si prácu prečítať, aj napriek tomu, že ide o matematický text.

Abstrakt

HALUŠŤOKOVÁ, Kristína: Niektoré neštandardné DEA modely: vlastnosti a porovnanie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2016, 82 s.

Teória DEA modelovania je kľúčovou zložkou v určovaní miery efektivity jednotlivých útvarov vrámci celej skupiny. Doteraz sa na tento účel používali tradičné modely, ktorých vlastnosti sú dobre popísané. V našej práci sa zaoberáme dvoma neštandardnými neorientovanými modelmi, ktoré sú založené na koeficientoch skracovania vstupov, prípadne predlžovania výstupov. Cieľom práce je tieto nové modely dôkladne preskúmať, popísať ich vlastnosti a následne ich porovnať so štandardnými modelmi na praktických príkladoch. V úvodnej kapitole sme definovali základné pojmy a tradičné modely z DEA. V ďalších dvoch kapitolách sme predstavili dva neštandardné modely – radiálny neorientovaný model a neradiálny neorientovaný model. Podarilo sa nám popísať ich vlastnosti a na základe praktických príkladov odvodiť vzťahy medzi efektivitami modelov.

Kľúčové slová: Data Envelopment Analysis (DEA), neštandardné DEA modely, radiálny neorientovaný model, neradiálny neorientovaný model

Abstract

HALUŠŤOKOVÁ, Kristína: Some non-standard DEA models: properties and comparisons [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Bratislava, 2016, 82 p.

Theory of DEA modeling is the key component in determining the level of the efficiency of individual units within the whole group. For this purpose were used traditional models so far, whose characteristics are described very well in literature. In our thesis we deal with two non-standard unoriented models, which are based on the coefficients of shortening the inputs or extension of the outputs. Main aim is to explore these new models carefully, describe their characteristics and then compare them with the standard models on practical examples. In the first chapter we define the basic concepts and traditional models of DEA. In the next two chapters we introduce two non-standard models – radial unoriented model and non-radial unoriented model. We have been able to describe their features and derive the relations between efficiencies of models based on practical examples.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), non-standard DEA models, radial unoriented model, non-radial unoriented model

Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam tabuliek	9
Úvod	11
1 Úvod do DEA modelovania	13
2 Model A	19
2.1 Základné vlastnosti	25
2.2 Porovnanie modelov A a CCR	28
2.3 Porovnanie modelov A a BCC	32
3 Model B	38
3.1 Základné vlastnosti	42
3.2 Porovnanie modelov B a AD s CRS	44
3.3 Porovnanie modelov B a AD s VRS	46
4 Japonské banky	50
4.1 Model A vs. CCR	51
4.2 Model A s VRS vs. BCC	53
4.3 Model B vs. aditívny model s CRS	56
4.4 Model B s VRS vs. aditívny model s VRS	59
Záver	63
Zoznam použitej literatúry	65
Príloha A	66
Príloha B	73

Zoznam obrázkov

1	Geometrická interpretácia modelu A	24
2	Dáta zakreslené spolu s hranicou množiny M_{CRS} pre Príklad 1	29
3	Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{CRS} pre Príklad 1	32
4	Dáta zakreslené spolu s hranicou množiny M_{VRS} pre Príklad 1	33
5	Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{VRS} pre Príklad 1	37
6	Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{CRS} pre Príklad 2	46
7	Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{VRS} pre Príklad 2	48
8	Rôzne efektívne vzory pre Príklad 2	49

Zoznam tabuliek

2.1	Prehľad invariantností modelov na zmenu alebo posun jednotiek.	27
2.2	Vstupy a výstupy 5 DMU v Príklade 1	28
2.3	Výsledky výpočtov Model A vs. CCR v Príklade 1	30
2.4	Porovnanie efektívít modelov s CRS v Príklade 1	31
2.5	Výsledky výpočtov Model A vs. BCC v Príklade 1	34
2.6	Porovnanie efektívít modelov s VRS v Príklade 1	35
3.1	Prehľad invariantností modelov na zmenu alebo posun jednotiek.	44
3.2	Vstupy a výstupy 5 DMU v Príklade 2	45
3.3	Výsledky výpočtov Model B vs. aditívny model s CRS v Príklade 2	45
3.4	Výsledky výpočtov Model B vs. aditívny model s VRS v Príklade 2	47
4.1	Údaje o japonských bankách.	50
4.2	Porovnanie efektívít jednotlivých modelov s CRS.	51
4.3	Efektívne vzory pre vstupy CCR modelov a Modelu A s CRS.	52
4.4	Efektívne vzory pre výstupy CCR modelov a Modelu A s CRS.	53
4.5	Porovnanie efektívít jednotlivých modelov s VRS.	54
4.6	Efektívne vzory pre vstupy BCC modelov a Modelu A s VRS.	55
4.7	Efektívne vzory pre výstupy BCC modelov a Modelu A s VRS.	56
4.8	Porovnanie efektívít pre aditívny model a Model B s CRS.	57
4.9	Efektívne vzory pre vstupy aditívneho modelu a Modelu B s CRS.	58
4.10	Efektívne vzory pre výstupy aditívneho modelu a Modelu B s CRS.	59
4.11	Porovnanie efektívít pre aditívny model a Model B s VRS.	60
4.12	Efektívne vzory pre vstupy aditívneho modelu a Modelu B s VRS.	61
4.13	Efektívne vzory pre výstupy aditívneho modelu a Modelu B s VRS.	62
B.1	Výsledky výpočtov s modelom CCR-I.	73
B.2	Výsledky výpočtov s modelom CCR-O.	74
B.3	Výsledky výpočtov s Modelom A.	75
B.4	Výsledky výpočtov s modelom BCC-I.	76
B.5	Výsledky výpočtov s modelom BCC-I.	77
B.6	Výsledky výpočtov s Modelom A s VRS.	78
B.7	Výsledky výpočtov s aditívnym modelom.	79

B.8	Výsledky výpočtov s Modelom B.	80
B.9	Výsledky výpočtov s aditívnym modelom s VRS.	81
B.10	Výsledky výpočtov s Modelom B s VRS.	82

Úvod

Podľa odhadov Organizácie OSN pre výživu a poľnohospodárstvo [1] skončí ako odpad až okolo tretiny celosvetovo vyprodukovaných potravín, čo predstavuje asi 1,3 miliárd ton ročne. V Európe je to 95 - 115 kg na človeka. K plytvaniu však nedochádza iba v oblasti potravín, ale aj v oblasti využívania financií. Na Slovensku fungujú projekty ako iness (*Institute of Economic and Social Studies*), ktoré poukazujú na plytvanie štátnymi zdrojmi. Napríklad implementácia nefunkčného daňového systému KONS stála Slovensko 29 miliónov eur, pričom už najbližší rok by sa mal tento systém opäť meniť.

Aj z týchto dôvodov sa ukazuje byť problematika plytvania a problematika efektívneho využívania zdrojov v časoch súčasnej konzumnej spoločnosti kľúčová. Efektívnym využívaním zdrojov a meraním efektivity sa ľudia začali zaoberať aj na poli matematiky, čo v sedemdesiatych rokoch minulého storočia vyústilo do vzniku matematickej disciplíny *Data Envelopment Analysis*, skrátene DEA.

Ide o riešenie súboru úloh matematického programovania, pričom zo skupiny viacerých útvarov sa na základe vzájomného porovnávania vyberajú tie s najlepším výkonom.

V súčasnosti je teória DEA veľmi dobre popísaná napríklad v [2] a [4], pričom pre našu prácu vychádzame najmä zo skrípt [5], kde sú podrobne rozobrané základné obálkové modely CCR a BCC a neorientovaný aditívny model.

V tejto práci sa zameriame na dva doteraz málo preskúmané modely. Prvým z nich je radiálny neorientovaný model, ktorý je špecifický skracovaním, prípadne predĺžovaním všetkých zložiek vstupov a výstupov súčasne rovnakou hodnotou. Druhým je neradiálny neorientovaný model, ktorý je taktiež typický predĺžovaním a skracovaním, avšak každého vstupu a výstupu zvlášť.

Cieľom našej práce je uchopiť vlastnosti spomínaných dvoch modelov a porovnať ich na praktických príkladoch s vlastnosťami štandardných modelov, identifikovať možné prípady pseudoefektivity a správne nájsť efektívne vzory.

Prácu sme rozdelili do 4 kapitol. V prvej kapitole sa zameriame na definovanie základných pojmov v DEA modelovaní, popíšeme tri štandardné modely a vysvetlíme hľadanie efektívnych vzorov. V druhej kapitole predstavíme radiálny neorientovaný model, odvodíme jeho základné vlastnosti a uvedieme geometrickú interpretáciu hľa-

dania λ -vzorov. Ďalej sa budeme venovať porovnaniu vlastností s už známymi modelmi CCR a BCC, popísanými v [5] a v [2]. Na praktickom príklade demonštrujeme možné výhody a nevýhody radiálneho neorientovaného modelu oproti riešeniu danej úlohy pomocou CCR a BCC. V tretej časti sa budeme venovať druhému netypickému modelu – neradiálnemu neorientovanému modelu. Podobne ako v predchádzajúcej kapitole sa sústredíme na jeho definíciu a základné vlastnosti. Skúmaný model budeme porovnávať s neorientovaným aditívnym modelom, a to na základe dvojrozmerného praktického príkladu. V poslednej kapitole využijeme súbor reálnych dát z článku [6] a postupne naň aplikujeme všetky spomínané modely a vyhodnotíme výsledky.

1 Úvod do DEA modelovania

V prvej kapitole zavedieme označenia, uvedieme základné pojmy a niektoré modely, ktorých vlastnosti sú v DEA podrobne zanalyzované. Konkrétne sú to CCR, BCC a aditívny model. Prvý odpovedá konštantným výnosom z rozsahu, druhý variabilným a z posledného existujú verzie pre obidva typy.

Ako prvý zavedieme pojem *Decision Making Unit*, alebo skráteno $DMU_j, j = 1, \dots, n$. Toto označenie sa zaužívalo pre jednotlivé firmy, ktoré rozhodujú o veľkosti produkcie a množstve vstupov nezávisle na ostatných vrámci našej skupiny, ktorú vyhodnocujeme.

Teraz definujeme vektor vstupov x_j a výstupov y_j pre j -tu DMU nasledovne:

$$\text{(vstupy)} \quad x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad \text{(výstupy)} \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} \quad \text{pre } j = 1, \dots, n.$$

Pre j -ty útvar DMU budeme teda hovoriť o i -tom vstupe x_{ij} a r -tom výstupe y_{rj} . Občas potrebujeme pracovať s maticami, najmä pri programovaní modelov to môže byť užitočné, takže vytvoríme maticu vstupov X a maticu výstupov Y .

$$\begin{pmatrix} \text{matica} \\ \text{vstupov} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ x_{i1} & & x_{ij} & & x_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{matica} \\ \text{výstupov} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ y_{r1} & & y_{rj} & & y_{rn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sj} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

Analogicky ako v [5] budeme žiadať splnenie nasledujúceho predpokladu o dátach úlohy.

$$\textbf{Predpoklad:} \quad \forall j = 1, \dots, n : x_j \geq 0_m, x_j \neq 0_m \quad \text{a} \quad y_j \geq 0_s, y_j \neq 0_s. \quad (1.1)$$

Dôležitú úlohu v DEA modelovaní hrá pojem *množiny produkčných možností*. Predpokladajme, že máme daných n $DMU_j, j = 1, \dots, n$, kde každé DMU_j premieňa svoje vstupy x_j na výstupy y_j . Potom podľa skrípt [5] pod množinou M_{CRS} , ktorá odpovedá konštantným výnosom z rozsahu rozumieme množinu

$$M_{CRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda \geq 0\},$$

kde vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$.

Podobne, množinu M_{VRS} , odpovedajúcu variabilným výnosom z rozsahu, definujeme ako

$$M_{VRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0\}.$$

Vidíme, že M_{CRS} je konvexný kužel generovaný vektormi jednotlivých DMU_j rozšírený o dvojice, ktoré majú väčšie vstupy alebo menšie výstupy. Množina M_{VRS} je konvexnou množinou opäť generovanou vektormi jednotlivých DMU_j rozšírenou o dvojice, ktoré majú väčšie vstupy alebo menšie výstupy.

Dvojicu $(x, y) \in M$ nazývame *Pareto-efektívnou* v M práve vtedy, keď neexistuje taký bod $(x', y') \in M$, že $(x', y') \neq (x, y)$ a zároveň $x \geq x'$ a $y \leq y'$.

Je zrejmé, že *efektívna* dvojica musí byť z hranice M . Na hranici však môžu ležať aj také body, ktoré nie sú efektívne. Takéto dvojice nazývame *pseudoefektívne*. Body ležiace vo vnútri množiny M nazývame *neefektívne*.

Vo všeobecnosti máme k DEA modelom dva prístupy – *multiplikatívny* (MM) a *obáľkový* (OM). Multiplikatívny priradzuje jednotlivým druhom vstupov a výstupov rôzne váhy a na základe toho nájde najlepšieho kandidáta. Obáľkový prístup sa opiera o predtým spomínané množiny M_{CRS} a M_{VRS} . V princípe vyhodnocuje, kde v množine M sa jednotlivé DMU nachádzajú. Dôležité je tiež spomenúť, že dané prístupy sú k sebe navzájom duálne úlohy.

Pomocou obáľkového prístupu k úlohám dostaneme pre každé z DMU optimálne premenné $\lambda_j^*, j = 1, \dots, n$ a pomocou nich dopočítame projekciu na hranicu množiny M , tzv. λ^* -vzor. Môže však nastať prípad, že sa projekcia uskutoční na pseudoefektívnu časť hranice množiny M a na nájdenie skutočného efektívneho vzoru pre daný útvar budeme musieť použiť tzv. *dvojfázovú metódu* podrobnejšie popísanú v [5]. V princípe ide o vytvorenie druhej úlohy, ktorá sa ponáša na našu pôvodnú, avšak so zmenenou

účelovou funkciou a priamo sa v nej využíva výsledok získaný z prvej úlohy. Pôjde o maximalizačný typ úlohy a podstatou bude maximalizovať súčet všetkých rezerv, tzv. *slackov*. Taktiež dostaneme premenné λ^* , no tieto nám už zaručia, že vzor bude z efektívnej časti hranice.

Ako prvý zo štandardných modelov poznáme CCR model. Odpovedá konštantným výnosom z rozsahu a rozlišujeme jeho dve verzie – vstupne orientovaný (Input – I) a výstupne orientovaný (Output – O).

Obáľkový vstupne orientovaný CCR-I-OM geometricky predstavuje radiálne skraco-
vanie vstupov na hranicu množiny M_{CRS} , pričom výstupy ostávajú nezmenené. Skra-
covanie prebieha prostredníctvom koeficientu θ , ktorý v úlohe minimalizujeme. Z toho
prirodzene vyplýva, že θ sa pohybuje v intervale $[0, 1]$ a predstavuje mieru efektivity,
pričom pre hodnotu 1 identifikujeme efektívnosť, prípadne pseudoefektívnosť.

$$\begin{aligned}
 (\text{CCR-I-OM})_o : \quad & \min_{\theta, \lambda} \quad \theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o, \\
 & \lambda \geq 0_n.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dualizáciou vznikne úloha:

$$\begin{aligned}
 (\text{CCR-I-MM})_o : \quad & \max_{u, v} \quad u^T y_o = U_o \\
 \text{s.t.} \quad & v^T x_o = 1, \\
 & u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & v \geq 0_m, u \geq 0_s.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Interpretácia optimálneho riešenia duálnej úlohy u^*, v^* s optimálnou hodnotou úče-
lovej funkcie $u^{*T} y_o = U_o^*$, pričom pod pojmom kladné optimálne riešenie sa rozumie
 $u^* > 0_s$ a zároveň $v^* > 0_m$, bude z definície zo skrípt [5] nasledujúca:

- Ak existuje kladné optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-I-MM})_o$ a platí $U_o^* = 1$, útvar DMU_o je **efektívny** a $U_o^* = 1$ je jeho efektivitou.
- Ak existuje kladné optimálne riešenie úlohy $(\text{CCR-I-MM})_o$ a platí $U_o^* < 1$, útvar DMU_o je **neefektívny** a U_o^* je jeho efektivitou.

- Ak neexistuje kladné optimálne riešenie úlohy $(CCR-I-MM)_o$ a platí $U_o^* = 1$, útvar DMU_o je **pseudoefektívny** a $U_o^* = 1$ je jeho pseudoefektivitou.
- Ak neexistuje kladné optimálne riešenie úlohy $(CCR-I-MM)_o$ a platí $U_o^* < 1$, útvar DMU_o je **neefektívny** a U_o^* je jeho pseudoefektivitou.

Obáľkový výstupný model CCR-O-OM zase geometricky predstavuje radiálne predĺžovanie výstupov pomocou koeficientu ψ . Koeficient musí spĺňať podmienku $\psi \geq 1$. Miera efektivity bude zaznamenaná ako prevrátená hodnota $\psi, \frac{1}{\psi}$. Hodnoty koeficientov θ a $\frac{1}{\psi}$ sa pre spoločnú skupinu $DMU_j, j = 1, \dots, n$, rovnajú.

$$\begin{aligned}
 (CCR-O-OM)_o : \quad & \max_{\psi, \lambda} \quad \psi \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq \psi y_o, \\
 & \lambda \geq 0_n,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
 (CCR-O-MM)_o : \quad & \min_{u, v} \quad v^T x_o \\
 \text{s.t.} \quad & u^T y_o = 1, \\
 & u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & v \geq 0_m, u \geq 0_s.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Interpretácia riešení je úplne analogická ako pre model CCR-I, ibaže v tomto prípade optimálnu hodnotu účelovej funkcie označíme $v^{*T} x_o = V_o^*$ a efektivitu ako $\frac{1}{V_o^*}$.

Pre zopakovanie zdôrazníme, že všetky tieto modely odpovedajú konštantným výnosom z rozsahu. Teraz CCR model modifikujeme na úlohu odpovedajúcu variabilným výnosom z rozsahu pomocou pridania ohraničenia $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Vznikne tak BCC model pomenový podľa autorov Bankera, Charnesa a Coopera. Opäť rozlišujeme vstupne a výstupne orientovanú verziu pre obáľkový aj multiplikatívny prístup:

$$\begin{aligned}
 (BCC-I-OM)_o : \quad & \min_{\theta, \lambda} \quad \theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0_n,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
(\text{BCC-I-MM})_o : \quad & \max_{u,v,z} \quad u^T y_o + z \\
\text{s.t.} \quad & v^T x_o = 1, \\
& u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& v \geq 0_m, u \geq 0_s, z \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
(\text{BCC-O-OM})_o : \quad & \max_{\psi, \lambda} \quad \psi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_o, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq \psi y_o, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0_n,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
(\text{BCC-O-MM})_o : \quad & \min_{u,v,z} \quad v^T x_o - z \\
\text{s.t.} \quad & u^T y_o = 1, \\
& u^T y_j - v^T x_j + z \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& v \geq 0_m, u \geq 0_s, z \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Pre tieto druhy modelov však už neplatí rovnosť medzi koeficientami θ a $\frac{1}{\psi}$ a teda

$$\theta \neq \frac{1}{\psi}.$$

Platia však obdobné definície (pseudo)efektívnosti a (pseudo)efektivity ako pri CCR, to znamená optimálna hodnota θ pre BCC-I a prevrátená optimálna hodnota ψ , $\frac{1}{\psi}$, pri BCC-O vyjadrujú mieru (pseudo)efektivity. V prípade, ak neexistuje kladné optimálne riešenie multiplikatívnej úlohy a optimálna hodnota účelovej funkcie vyšla rovná 1, hovoríme, že útvar je pseudoefektívny a ak vyšla menšia ako 1, útvar nazveme neefektívnym. Ak existuje kladné optimálne riešenie a hodnota účelovej funkcie je rovná 1, hovoríme, že útvar je efektívny a ak menšia ako 1, neefektívny.

Všetky doteraz spomenuté modely spadajú do kategórie orientovaných modelov, to značí, že modifikujú len vstupy alebo len výstupy. Ako ďalšie dva spomenieme tzv. *neorientované*, čo znamená, že budú súčasne upravovať vstupy aj výstupy. Konkrétne, ako prvý je to aditívny model s konštantnými výnosmi z rozsahu. Geometricky sa snažíme daný útvar posunúť o najväčšiu možnú časť vo vertikálnom alebo horizontálnom

smere až na efektívnu hranicu.

$$\begin{aligned}
 (\text{AD-OM-CRS})_o : \quad & \min_{\lambda, s^x, s^y} -(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \iff \max_{\lambda, s^x, s^y} (\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^x = x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^y = y_o, \\
 & \lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Podobne, ako tomu bolo pri BCC modeli, pridaním ohraničenia $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ dostaneme model odpovedajúci variabilným výnosom z rozsahu:

$$\begin{aligned}
 (\text{AD-OM-VRS})_o : \quad & \min_{\lambda, s^x, s^y} -(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \iff \max_{\lambda, s^x, s^y} (\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^x = x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^y = y_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Obidve verzie aditívneho modelu sú vlastne úlohou na maximalizáciu *slackov*, teda druhou fázou v dvojfázovej metóde. Preto, na rozdiel od orientovaných modelov CCR a BCC, optimálny λ^* -vzor je vždy efektívny, to znamená, že leží na efektívnej časti hranice množiny M .

Nevýhodou oproti orientovaným modelom je, že optimálnu hodnotu účelovej funkcie nevieme rovno prehlásiť za mieru efektivity, keďže nadobúda ľubovoľné hodnoty z intervalu $(-\infty, 0]$. Efektivitu preto musíme dopočítavať pomocou vzorca (1.12) pomocou priemeru parciálnych efektívít:

$$E = \frac{1}{m + s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{x_{io}} + \sum_{r=1}^s \frac{y_{ro}}{\hat{y}_r} \right). \tag{1.12}$$

2 Radiálny neorientovaný model

Ako prvý z netradičných DEA modelov si predstavíme radiálny neorientovaný model, ktorý budeme skrátene označovať Model A.

Pri tradičnom obáľkovom prístupe k modelom s konštantnými výnosmi z rozsahu (CRS) sme sa orientovali buď na výstupy alebo na vstupy. V úlohách matematického programovania sme teda ponechali vstup rovnaký a výstup sme sa pokúšali čo najviac predĺžiť, alebo opačne, ponechali sme výstup a snažili sa čo najviac šetriť - zmenšovať vstupy.

Pri radiálnom neorientovanom modeli budeme skracovať vstupy a predlžovať výstupy súčasne, pričom koeficient radiálneho skracovania vstupov a radiálneho predlžovania výstupov vyjadríme pomocou rovnakej premennej δ ako $(1 - \delta)$, resp. $(1 + \delta)$. Matematicky zapísaný model teda bude vyzerať:

$$\begin{aligned}
 (\text{Model A1})_o : \quad & \max_{\delta, \lambda} \quad \delta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta)x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq (1 + \delta)y_o, \\
 & \lambda \geq 0_n.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ak je útvar efektívny, nachádza sa na hranici množiny M_{CRS} a teda nie je možné jeho vstupy zmenšovať a výstupy zväčšovať. To značí, že optimálna hodnota δ^* bude rovná 0. Ukážeme, že optimálna δ^* je z intervalu $[0,1]$. Keďže $\delta = 0$ je určite prípustným riešením úlohy a úloha je maximalizačná, tak optimálna hodnota δ^* spĺňa vzťah $\delta^* \geq 0$. Horné ohraničenie získame z nerovnosti:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta)x_o.$$

Súčet $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ nemôže byť záporný, kvôli požiadavke na nezápornosť všetkých λ_j a Predpokladu (1.1). Z toho vyplýva:

$$(1 - \delta) \geq 0 \iff \delta \leq 1,$$

v každom prípustnom riešení δ a teda aj v optimálnom δ^* . Následne vyvstáva otázka čo pri takomto modeli považovať za efektivitu? Hlavným kritériom, ktoré musí byť

splnené je, že pri efektívnom útvare potrebujeme mať hodnotu účelovej funkcie rovnú 1. Ponúkajú sa nám dvaja kandidáti:

$$\text{a) } (1 - \delta^*) \qquad \text{b) } \frac{1}{1 + \delta^*}.$$

Prvá možnosť odpovedá analógii so vstupným CCR modelom, druhá odpovedá analógii s výstupným. Obidve možnosti spadajú do intervalu $[0,1]$ a pri efektívnom útvare, resp. keď δ^* je 0, sú rovné 1. Pozrieme sa bližšie na ich vzájomný vzťah. Funkcia $\frac{1}{1+\delta}$ má kladnú druhú deriváciu, takže je konvexnou funkciou. Funkcia $(1 - \delta)$ je lineárna a leží pod touto konvexnou funkciou, pričom bod dotyku je práve prípad efektívneho útvaru, teda bod 0. Tým pádom platí vzťah:

$$\frac{1}{1 + \delta} \geq (1 - \delta) \quad \forall \delta. \quad (2.2)$$

Za efektivitu zvolíme nižšiu z týchto dvoch hodnôt, aby model zbytočne nenadhodnocoval. Vzhľadom na všeobecne zaužívané identifikovanie efektívnosti v hodnote 1 v skriptách [5], upravíme model A1 do vhodnejšej podoby.

Definícia 1. Pod Modelom A odpovedajúcim CRS aplikovaným na $DMU = (x_o, y_o)$ rozumieme nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} (Model A)_o : \quad & \min_{\delta, \lambda} \quad 1 - \delta \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta)x_o, \\ & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq (1 + \delta)y_o, \\ & \quad \quad \lambda \geq 0_n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pod Modelom A odpovedajúcim VRS rozumieme úlohu:

$$\begin{aligned} (Model A s VRS)_o : \quad & \min_{\delta, \lambda} \quad 1 - \delta \\ & s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta)x_o, \\ & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq (1 + \delta)y_o, \\ & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \quad \quad \lambda \geq 0_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definícia 2. *Nech $1 - \delta^* = E^*$ je optimálna hodnota účelovej funkcie v úlohe (2.3).*

Potom:

- (x_o, y_o) je **efektívne**, ak hodnota efektivity $E^* = 1$ a v každom optimálnom riešení sú prvé dve nerovnice splnené ako rovnice,
- (x_o, y_o) je **pseudoefektívne**, ak hodnota pseudoefektivity $E^* = 1$ a v niektorom z optimálnych riešení nie je niektorá zložka vektorových nerovníc splnená ako rovnica,
- (x_o, y_o) je **neefektívne**, ak hodnota efektivity $E^* < 1$ a v každom optimálnom riešení sú prvé dve nerovnice splnené ako rovnice,
- (x_o, y_o) je **neefektívne**, ak hodnota efektivity $E^* < 1$ a v niektorom z optimálnych riešení nie je niektorá zložka vektorových nerovníc splnená ako rovnica.

Úplne analogická definícia platí aj pre Model A s VRS (2.4).

Keďže pseudoefektívnosť je nežiadúca a vždy sa snažíme nájsť efektívny vzor, aplikujeme na Model A dvojfázovú metódu podrobnejšie popísanú v skriptách [5]. V prvej fáze vyriešime klasickú úlohu (2.3) a získame optimálnu hodnotu δ^* . V druhej fáze riešime tzv. MS (*MaxSlack*) úlohu, ktorá v tomto prípade vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
 (\text{MS})_o : \quad & \max_{\lambda, s^x, s^y} \quad \mathbb{1}^T s^x + \mathbb{1}^T s^y = S \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^x = (1 - \delta^*) x_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^y = (1 + \delta^*) y_o, \\
 & \lambda \geq 0_n.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Takto získame optimálnu hodnotu λ^* , pričom vzory pre vstupy a výstupy dopočítané s λ^* už budú efektívne. Ak optimálna hodnota S^* vyšla väčšia ako 0, išlo o pseudoefektivitu. Ak $S^* = 0$ išlo o efektivitu. V prípade Modelu A s VRS (2.4) bude dvojfázová metóda prebiehať rovnako, ibaže v úlohe $(MS)_o$ pribudne ohraničenie $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

K úlohe, ktorá je podobná tradičným úlohám v obáľkovom prístupe, teraz podľa schémy popísanej v [5] vytvoríme duálnu úlohu v tzv. multiplikatívnom tvare. Neznámymi budú vektory váh u a v . Ako prvé pre násobíme nerovnice (-1), aby sme pri minimalizačnej úlohe dostali ohraničenie v súlade so schémou - to znamená ohraničenie

zdola. Ďalej už postupujeme tradičným spôsobom. Na záver je dobré si uvedomiť, že keďže sme k účelovej funkcii v minimalizačnej úlohe prirátali 1, rovnako tak musíme urobiť aj pri duálnej maximalizačnej úlohe. Pre Model A tak dostaneme nasledujúce dve úlohy:

<p style="text-align: center;">PRIMÁRNA ÚLOHA:</p> $\begin{aligned} \min_{\delta, \lambda} \quad & 1 - \delta + 0^T \lambda \\ \text{s.t.} \quad & -x_o \delta - X \lambda \geq -x_o, \\ & -y_o \delta + Y \lambda \geq y_o, \\ & \delta \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0_n, \end{aligned}$		<p style="text-align: center;">DUÁLNA ÚLOHA:</p> $\begin{aligned} \max_{v, u} \quad & 1 + y_o^T u - x_o^T v \\ \text{s.t.} \quad & y_o^T u + x_o^T v = 1, \\ & Y^T u - X^T v \leq 0, \\ & v \geq 0_m, u \geq 0_s. \end{aligned}$
---	--	--

Pre Model A s VRS budú úlohy vyzerat:

<p style="text-align: center;">PRIMÁRNA ÚLOHA:</p> $\begin{aligned} \min_{\delta, \lambda} \quad & 1 - \delta + 0^T \lambda \\ \text{s.t.} \quad & -x_o \delta - X \lambda \geq -x_o, \\ & -y_o \delta + Y \lambda \geq y_o, \\ & 0\delta + \mathbb{1}^T \lambda = 1, \\ & \delta \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0_n, \end{aligned}$		<p style="text-align: center;">DUÁLNA ÚLOHA:</p> $\begin{aligned} \max_{v, u} \quad & 1 + y_o^T u - x_o^T v + z \\ \text{s.t.} \quad & y_o^T u + x_o^T v = 1, \\ & Y^T u - X^T v + z \leq 0, \\ & v \geq 0_m, u \geq 0_s, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$
--	--	--

Motiváciou pre vytvorenie duálnej úlohy bolo uľahčenie dokazovania existencie optimálneho riešenia, ktoré uvádzame ďalej.

Tvrdenie 1. *Úloha (Model A)_o a (Model A s VRS)_o má optimálne riešenie pre akýkoľvek súbor dát spĺňajúci Predpoklad (1.1).*

Dôkaz. Na existenciu optimálneho riešenia musí duálna úloha spĺňať nasledujúce podmienky. Prvou je ohraničenosť účelovej funkcie zhora a druhou je existencia prípustného riešenia a teda aj prípustnosť samotnej úlohy. Najprv vytvoríme dôkaz pre úlohu (Model A)_o.

(i) OHRANIČENOSŤ funkcie $1 + y_o^T u - x_o^T v$

Ako prvé je potrebné uvedomiť si, že hodnoty neznámych váh u a v musia spĺňať podmienku $y_j^T u - x_j^T v \leq 0$ pre všetky $j = 1, \dots, n$, to značí, že aj pre x_o a y_o platí $y_o^T u - x_o^T v \leq 0$. Teraz len k danej nerovnici stačí pripočítať 1 a dostaneme požadované

ohraničenie

$$1 + y_o^T u - x_o^T v \leq 1.$$

(ii) PRÍPUSTNOSŤ duálnej úlohy

Na dokázanie tejto vlastnosti budeme vychádzať z Predpokladu (1.1), ktorý hovorí o tom, že žiaden z vektorov x_j ani y_j nemôže byť celý nulový, aj keď sa môže stať, že niektoré zložky bude mať nulové. Z toho môžeme tvrdiť, že existuje $l \in \{1, \dots, m\}$: $x_{l_o} > 0$. Teraz zvolíme naše prípustné riešenie \bar{v} a \bar{u} nasledovne:

$$\bar{v}_i = \begin{cases} \frac{1}{x_{l_o}}, & \text{ak } i = l, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases} \quad \bar{u} = 0_s.$$

Lahko sa ukáže, že naše nájdené riešenie spĺňa podmienku v tvare rovnosti:

$$y_o^T \bar{u} + x_o^T \bar{v} = x_{l_o} \bar{v}_i = x_{l_o} \frac{1}{x_{l_o}} = 1.$$

Ako posledné ešte potrebujeme splniť podmienku v tvare nerovnosti $y_j^T u - x_j^T v \leq 0$ pre všetky $j = 1, \dots, n$. Zvolené riešenie dosadíme:

$$y_j^T \bar{u} - x_j^T \bar{v} \leq 0 \iff -x_{lj} \bar{v}_i \leq 0 \iff x_{lj} \bar{v}_i \geq 0 \iff x_{lj} \frac{1}{x_{l_o}} \geq 0,$$

čo vidíme, že musí platiť, nakoľko sme vybrali $x_{l_o} > 0$ a pre všetky $j = 1, \dots, n$, platí $x_j \geq 0$.

Zo silnej vety o dualite zo skript [3]: primárna úloha má optimálne riešenie, potom k nej duálna úloha má optimálne riešenie a optimálne hodnoty účelových funkcií sa rovnajú.

V duálnej úlohe k úlohe (Model A s VRS)_o pribudla navyše voľná premenná z , ktorú zvolíme ako $\bar{z} = 0$ a ďalej v dôkaze postupujeme úplne analogicky ako pri (Model A)_o. Týmto sme dokázali **Tvrdenie 1**. □

Geometrická interpretácia modelu

Aby sme boli schopní si celú situáciu predstaviť geometricky, prípadne zobrazit ju na obrázku, sme zvolili len prípad jedného vstupu a jedného výstupu.

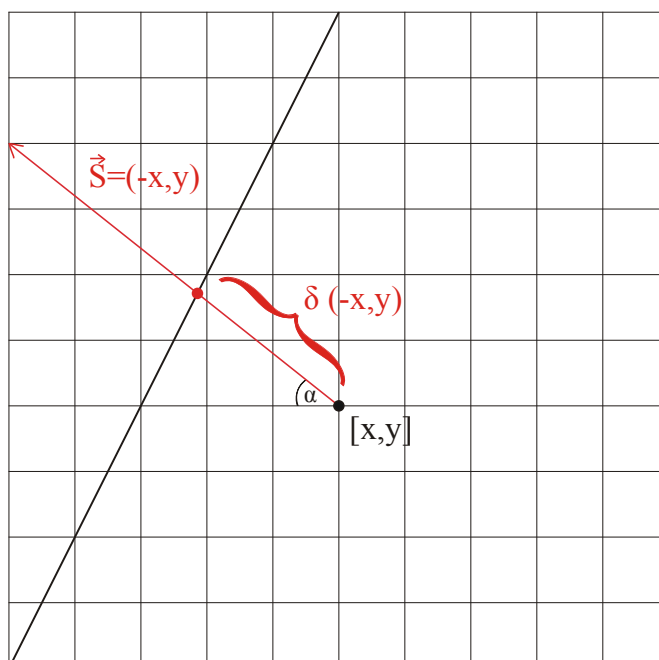
Pri modeli CCR-O posúvame jednotlivé DMU_j vertikálne nahor, zatiaľčo pri CCR-I vodorovne doľava na hranicu množiny M_{CRS} . Podobne tomu je pri BBC-O a BBC-I a príslušnej M_{VRS} .

Model A však hýbe s oboma typmi premenných súčasne takýmto spôsobom:

$$x \rightarrow (1 - \delta)x,$$

$$y \rightarrow (1 + \delta)y.$$

Tento posun je platný aj pre dimenziu väčšiu ako 2. Pre lepšiu predstavu sme do Obrázku 1 zakreslili všeobecný bod $[x, y]$ a posúvali ho na hranicu množiny M . Je dôležité uvedomiť si, že sklon hranice vôbec neovplyvní smer posunu. To znamená, že podobne ako pri predošlých modeloch, medzi množinami M_{CRS} a M_{VRS} nie je rozdiel z hľadiska smeru posúvania.



Obr. 1: Geometrická interpretácia modelu A

Nás zaujíma najmä smerový vektor posunu \vec{s} a uhol α .

$$\text{bod posunieme: } [x, y] \rightarrow [(1 - \delta)x, (1 + \delta)y]$$

$$\text{smer posunu: } \vec{s} = ((1 - \delta)x - x, (1 + \delta)y - y) = (-\delta x, \delta y) = \delta(-x, y)$$

$$\text{veľkosť vektora posunu: } |\vec{s}| = \sqrt{\delta^2 x^2 + \delta^2 y^2} = \delta \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\delta y}{\delta \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{podmienka pre uhol: } \alpha = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ako vidíme veľkosť uhla α , ktorý zvierá vektor smeru posunu s vodorovnou osou, nezávisí od parametra δ .

2.1 Základné vlastnosti

Invariantnosť modelu na zmenu jednotiek

Pri testovaní efektívnosti jednotlivých útvarov potrebujeme častokrát zvoliť iné jednotky, ktoré vyjadrujú vhodnejšie množstvo daného vstupu alebo výstupu. Napríklad hmotnosť sa v rôznych krajinách meria inak - na Slovensku je miera hmotnosti uvádzaná v kilogramoch, v USA v librách a pod. Na to aby sme v rámci modelu mohli voľne prechádzať z jedných jednotiek do druhých, musíme preňho overiť *invariantnosť na zmenu jednotiek*. Teda ukázať, že úloha matematického programovania je po zmene jednotiek ekvivaletná pôvodnej úlohe.

Nech matice A a B sú maticami transformácií jednotiek. Nové vstupy a výstupy prislúchajúce j -tej DMU označíme x'_j a y'_j a budú vyzeráť nasledovne:

$$Ax_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{1j} \\ \vdots \\ x'_{mj} \end{pmatrix} = x'_j, \quad \alpha_i > 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

$$By_j = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_{1j} \\ \vdots \\ y'_{sj} \end{pmatrix} = y'_j, \quad \beta_r > 0 \quad r = 1, \dots, s.$$

Teraz sa sústredíme na porovnanie pôvodného modelu s novým transformovaným modelom a zistíme, či majú dané úlohy matematického programovania rovnakú množinu prípustných riešení a rovnaké hodnoty účelových funkcií.

úloha pred transformáciou:

$$\begin{aligned} \min_{\delta, \lambda} & 1 - \delta \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j & \leq (1 - \delta)x_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j & \geq (1 + \delta)y_o, \\ \lambda & \geq 0, \end{aligned}$$

úloha po transformácii:

$$\begin{aligned} \min_{\delta, \lambda} & 1 - \delta \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Ax_j & \leq (1 - \delta)Ax_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j By_j & \geq (1 + \delta)By_o, \\ \lambda & \geq 0. \end{aligned}$$

Tvar účelovej funkcie sa zachoval, podobne aj požiadavka na dolné ohraňenie pre λ . Vidíme, že zvyšné dve ohraňenia sú ekvivalentné. Pridaním ohraňenia na λ v tvare $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ sa ekvivalencia úloh nepokazí a teda môžeme vyhlásiť, že Model A s CRS aj VRS je **invariantný na zmenu jednotiek**.

Invariantnosť modelu na posun

Pri tvorbe modelov sme sa primárne sústredili len na kladné vstupy a výstupy, avšak niekedy v ekonomických úlohách potrebujeme pracovať aj so zápornými dátami. Vlastnosť, ktorá nám umožní posunúť sa až do záporných čísiel, nazývame *invariantnosť na posun*. Ku každému vstupu prirátame vektor posunu vstupov Δx a ku každému výstupu zase vektor Δy , pričom niektoré zložky týchto dvoch vektorov môžu byť aj nulové – teda zachovávajú pôvodné dáta. Pre všetky $j = 1, \dots, n$ definujeme vektory posunu Δx a Δy nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} = x_j + \Delta x = \begin{pmatrix} x'_{1j} \\ \vdots \\ x'_{mj} \end{pmatrix} = x'_j,$$

$$\begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_s \end{pmatrix} = y_j + \Delta y = \begin{pmatrix} y'_{1j} \\ \vdots \\ y'_{sj} \end{pmatrix} = y'_j.$$

Je dôležité všimnúť si, že vektorom posunu ovplyvníme vstupy a výstupy pre všetky *DMU* rovnako. Opäť si porovnáme pôvodnú úlohu s úlohou po transformácii:

<p>pôvodná úloha:</p> $\begin{aligned} & \min_{\delta, \lambda} 1 - \delta \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta)x_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq (1 + \delta)y_o, \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned}$	<p>úloha po transformácii:</p> $\begin{aligned} & \min_{\delta, \lambda} 1 - \delta \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j + \Delta x) \leq (1 - \delta)(x_o + \Delta x), \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j + \Delta y) \geq (1 + \delta)(y_o + \Delta y), \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned}$
--	---

čo je ekvivalentné:

<p>pôvodná úloha:</p> $\min_{\delta, \lambda} 1 - \delta$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta)x_o,$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq (1 + \delta)y_o,$ $\lambda \geq 0,$	<p>úloha po transformácii:</p> $\min_{\delta, \lambda} 1 - \delta$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \Delta x \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq (1 - \delta)x_o + (1 - \delta)\Delta x,$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \Delta y \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq (1 + \delta)y_o + (1 + \delta)\Delta y,$ $\lambda \geq 0.$
---	--

Znovu nastáva prípad, keď je tvar účelovej funkcie rovnaký, podobne aj dolné ohraničenie na premennú λ . Pozrieme sa bližšie na zvyšné dvojice nerovníc. Aby boli úlohy úplne ekvivalentné, potrebujeme aby platilo:

$$\Delta x \sum_{j=1}^n \lambda_j = (1 - \delta)\Delta x \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j = (1 - \delta),$$

$$\Delta y \sum_{j=1}^n \lambda_j = (1 + \delta)\Delta y \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j = (1 + \delta).$$

Dané rovnice majú riešenie len vtedy, ak δ zvolíme nulové a súčet všetkých λ položíme rovný 1. Vidíme, že v prípade Modelu A s VRS (2.4) a aj to iba pre efektívne útvary, sú tieto podmienky splnené. To znamená, že model pri posune zachováva rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne. Hranica sa síce posunie, ale kvalitatívne sa nezmení. Pri CRS sa však zmení aj hranica, analogicky ako pri všetkých ostatných štandardných modeloch, čo je ukázané aj na príklade zo skrípt [5]. Teda môžeme prehlásiť, že radiálny neorientovaný model **nie je invariantný na posun jednotiek**.

Porovnanie vlastností s CCR a BCC modelom

Model	zmena I	zmena O	posun I	posun O
CCR-I	áno	áno	nie	nie
CCR-O	áno	áno	nie	nie
Model A CRS	áno	áno	nie	nie
BCC-I	áno	áno	nie	áno
BCC-O	áno	áno	áno	nie
Model A VRS	áno	áno	nie (+)	nie (+)

Tabuľka 2.1: Prehľad invariantností modelov na zmenu alebo posun jednotiek.

Legenda: nie (+) znamená, že model nie je invariantný, avšak zachováva rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne.

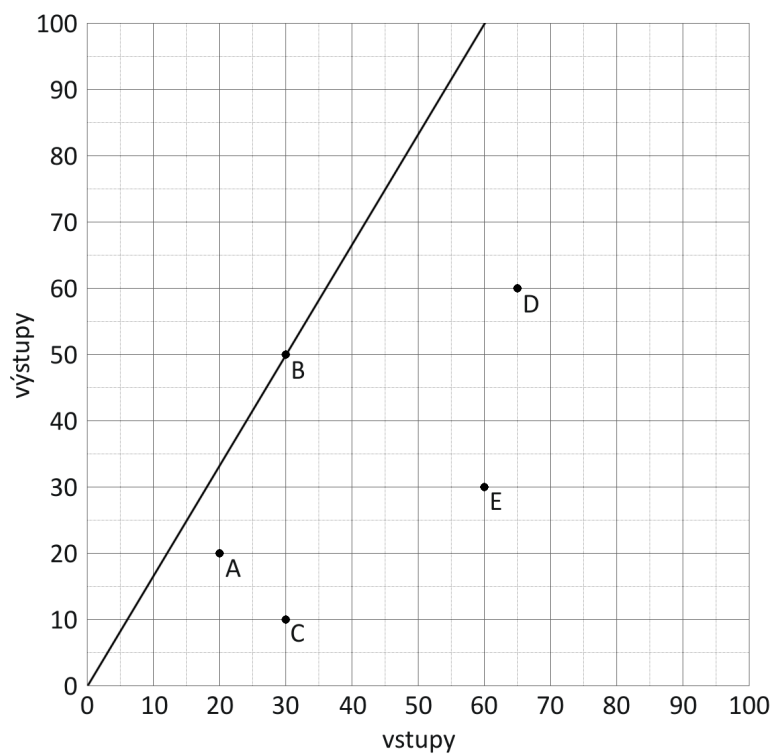
2.2 Porovnanie modelov A a CCR

V tejto podkapitole sa budeme venovať porovnaniu dvoch modelov - nášho Modelu A a známejšieho modelu CCR. Obidva odpovedajú konštatným výnosom z rozsahu (CRS). Pre jednoduchosť sme zvolili príklad s jednorozmernými vstupmi aj výstupmi. Budeme tak mať lepšiu geometrickú predstavu o tom, čo sa deje pri riešení úloh matematického programovania. Všetky časti programu vytvoreného v Matlabe sú však uspôsobené aj na väčšie rozmery a prechod do nich je pomerne jednoduchý.

Príklad 1. *Majme 5 útvarov s jednorozmerným vstupom a jednorozmerným výstupom. Dáta sú uvedené v Tabuľke 2.2. Postupne na ne aplikujme modely CCR-I, CCR-O, Model A, BCC-I, BCC-O a Model A s VRS.*

	A	B	C	D	E
vstupy	20	30	30	65	60
výstupy	20	50	10	60	30

Tabuľka 2.2: Vstupy a výstupy 5 DMU v **Príklade 1.**



Obr. 2: Dáta zakreslené spolu s hranicou množiny M_{CRS} pre **Príklad 1**.

Kedže Model A je neorientovaný a mení súčasne vstupy aj výstupy, je potrebné ho porovnávať s CCR orientovaným na vstupy a aj s druhým, orientovaným na výstupy. Výsledky našich výpočtov zaokrúhlené na dve desatinné miesta uvádzame v Tabuľke 2.3. Nulové hodnoty ostatných λ a *slackov* sme kvôli rozsahu tabuľky vypustili.

Model	Premenná	A	B	C	D	E
CCR-I	θ	0,6	1	0,2	0,55	0,3
	λ_2	0,4	1	0,2	1,2	0,6
	efektívny vzor (vstupy)	12	30	6	36	18
	efektívny vzor (výstupy)	20	50	10	60	30
CCR-O	ψ	1,67	1	5	1,81	3,33
	λ_2	0,67	1	1	2,17	2
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	30	65	60
	efektívny vzor (výstupy)	33,33	50	50	108,33	100
Model A	$1 - \delta$	0,75	1	0,33	0,71	0,46
	λ_2	0,5	1	0,33	1,54	0,92
	efektívny vzor (vstupy)	15	30	10	46,34	27,69
	efektívny vzor (výstupy)	25	50	16,67	77,23	46,15

Tabuľka 2.3: Výsledky výpočtov Model A vs. CCR v **Príklade 1**.

Všetky premenné uvedené v Tabuľke 2.3 sú optimálnymi riešeniami a teda správne by pri každom z nich malo byť označenie *, pre jednoduchšiu podobu tabuliek to však neuvádzame ani tu, ani v ďalších kapitolách, no stále budeme mať na mysli optimálne riešenia.

Z predchádzajúcich poznatkov z teórie DEA modelovania vieme, že pri vstupne orientovanom CCR modeli je efektivita daného útvaru reprezentovaná optimálnou hodnotou θ^* a pri výstupne orientovanom je to prevrátená hodnota k optimálnemu ψ^* , teda $\frac{1}{\psi^*}$. Model A sa však zaoberá obidvoma premennými súčasne, a teda za efektívny útvar sme podľa **Definície 2** vyhlásili taký, ktorého optimálna hodnota δ^* vyšla rovná 0 a zároveň v každom optimálnom riešení sú prvé dve nerovnice v Modeli A splnené ako rovnice. Ako sme odvodili na začiatku tejto kapitoly, mieru efektivity zaznamenáme ako číslo $1 - \delta^*$.

Model	Premenná	A	B	C	D	E
CCR-I	θ (efektivita)	0,6	1	0,2	0,55	0,3
CCR-O	ψ	1,67	1	5	1,81	3,33
	$\frac{1}{\psi}$ (efektivita)	0,6	1	0,2	0,55	0,3
Model A	$1 - \delta$ (efektivita)	0,75	1	0,33	0,71	0,46
	δ	0,25	0	0,67	0,29	0,54
	$1 + \delta$	1,25	1	1,67	1,29	1,54
	$\frac{1}{1+\delta}$	0,8	1	0,6	0,78	0,65

Tabuľka 2.4: Porovnanie efektív modelov s CRS v **Príklade 1**.

Všimnime si, že Model A dáva vyššie hodnoty efektív ako dávajú CCR-I, resp. CCR-O. V nasledujúcom tvrdení dokážeme, že toto je všeobecná vlastnosť.

Tvrdenie 2. *Nech δ^* je optimálnym riešením pre (x_o, y_o) v Modeli A pre CRS. Nech θ^* je optimálnym riešením v CCR-I a nech ψ^* je optimálnym riešením v CCR-O. Potom platí vzťah:*

$$\frac{1}{\psi^*} = \theta^* \leq 1 - \delta^* \leq \frac{1}{1 + \delta^*}. \quad (2.6)$$

To znamená, že Model A pre CRS nadhodnocuje efektivitu každého útvaru v porovnaní s CCR modelmi.

Dôkaz. Nech δ^* a λ^* je optimálne riešenie Modelu A, teda nutne platia vzťahy $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_j \leq (1 - \delta^*)x_o$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_j \geq (1 + \delta^*)y_o$. Potom $\bar{\theta}$ a $\bar{\lambda}$, zvolené ako:

$$\bar{\theta} = 1 - \delta^*, \quad \bar{\lambda} = \lambda^*,$$

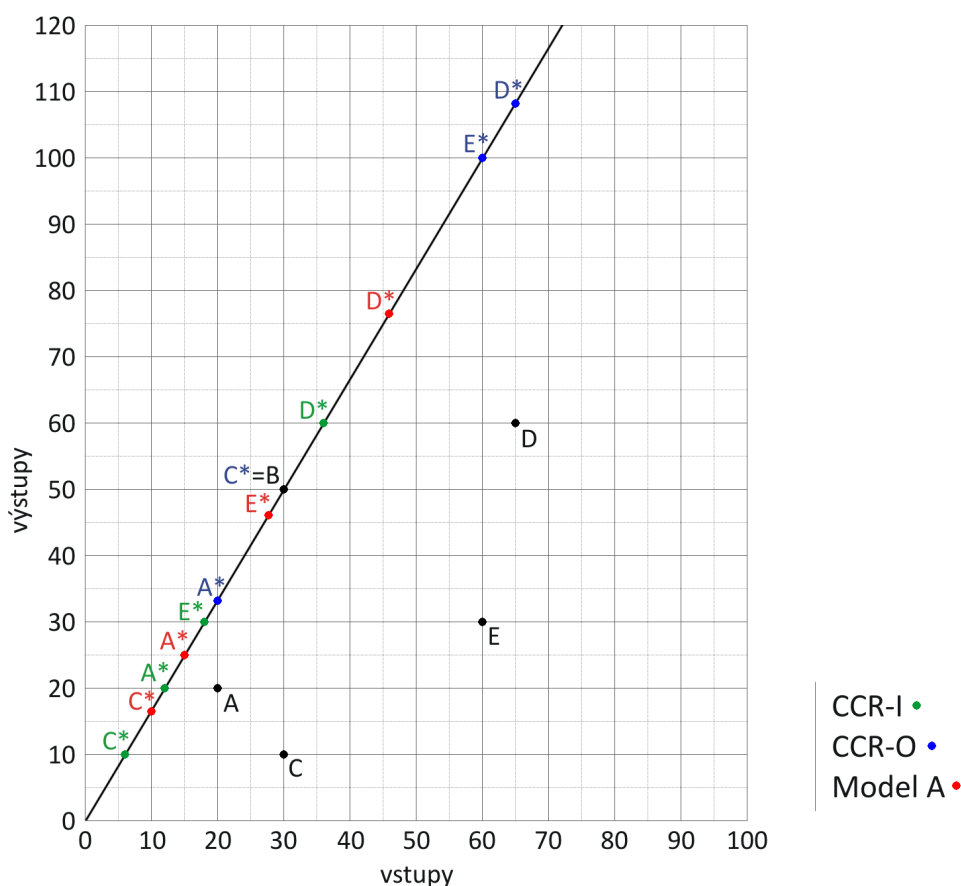
je určité riešením systému:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_j &\leq (1 - \delta^*)x_o = \bar{\theta}x_o, \\ \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j y_j &\geq (1 + \delta^*)y_o \geq y_o. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $\bar{\theta}$ a $\bar{\lambda}$ je prípustné riešenie pre CCR-I. Hodnotu θ v úlohe minimalizujeme, takže všetky prípustné riešenia úlohy sú väčšie, nanajvýš rovné optimálnej

hodnote θ^* a teda platí $\bar{\theta} = 1 - \delta^* \geq \theta^* = \frac{1}{\psi^*}$. Platnosť druhej časti nerovnosti nám zabezpečí vzťah (2.2), ktorý sme odvodili na začiatku kapitoly. Týmto sme dokázali, že oba vzťahy (2.6) platia. \square

Na Obrázku 3 sme zakreslili pozície útvarov a ich efektívne vzory určené CCR-I, CCR-O a Modelom A, ktoré sme od seba farebne odlišili.



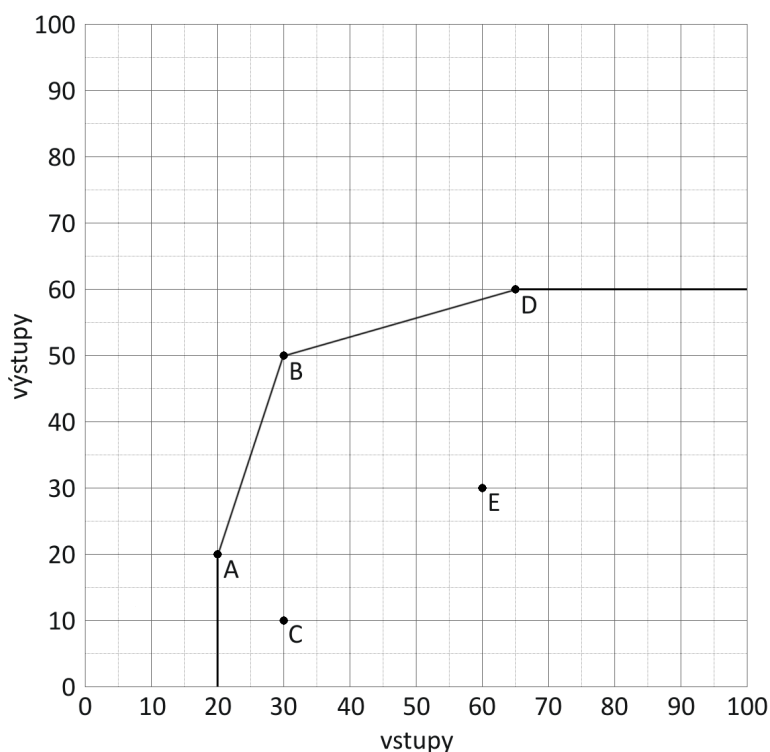
Obr. 3: Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{CRS} pre Príklad 1.

2.3 Porovnanie modelov A a BCC

Doteraz sme sa zaoberali Modelom A odpovedajúcim konštantným výnosom z rozsahu. Prechod k variabilným výnosom z rozsahu (VRS) nám umožní priradiť nové ohraničenie na premenné λ v tvare: $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, podobne ako je tomu pri prechode z CCR ku BCC modelom alebo aditívneho modelu k aditívnemu modelu s VRS. Naše výsledné modely, ktoré porovnávame budú vyzeráť nasledovne:

Model BCC-I	Model BCC-O	Model A s VRS
$\min_{\theta, \lambda} \theta$	$\max_{\psi, \lambda} \psi$	$\min_{\delta, \lambda} 1 - \delta$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \theta x_o,$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_o,$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq (1 - \delta) x_o,$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_o,$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq \psi y_o,$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq (1 + \delta) y_o,$
$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$
$\lambda \geq 0,$	$\lambda \geq 0,$	$\lambda \geq 0.$

Praktický príklad na porovnanie sme zvolili rovnaký ako v predošlej podkapitole, dáta použijeme z Tabuľky 2.2. Dáta sme vybrali tak, aby nám v prípade BCC modelov vyšli nejaké pseudoeфекtívne riešenia. Je to z dôvodu, aby sme zistili, ako si s nimi Model A poradí a ako ich vyhodnotí on. Na Obrázku 4 je zakreslená nová hranica množiny.



Obr. 4: Dáta zakreslené spolu s hranicou množiny M_{VRS} pre **Príklad 1**.

V Tabuľke 2.5 uvádzame výsledky našich výpočtov. Ako si môžeme všimnúť, za efektívne označili všetky modely rovnaké útvary. Značkou P sú označené pseudoefektivity.

Model	Premenná	A	B	C	D	E
BCC-I	θ	1	1	0,67 ^P	1	0,39
	λ_1	1	0	1	0	0,67
	λ_2	0	1	0	0	0,33
	λ_4	0	0	0	1	0
	s^y	0	0	10	0	0
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	20	65	23,33
	efektívny vzor (výstupy)	20	50	20	60	30
BCC-O	ψ	1	1	5	1	1,95
	λ_1	1	0	0	0	0
	λ_2	0	1	1	0	0,14
	λ_4	0	0	0	1	0,86
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	30	65	60
	efektívny vzor (výstupy)	20	50	50	60	58,57
Model A s VRS	$1 - \delta$	1	1	0,67 ^P	1	0,48
	λ_1	1	0	1	0	0,14
	λ_2	0	1	0	0	0,86
	λ_4	0	0	0	1	0
	s^y	0	0	6,67	0	0
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	20	65	28,57
	efektívny vzor (výstupy)	20	50	20	60	45,71

Tabuľka 2.5: Výsledky výpočtov Model A vs. BCC v **Príklade 1.**

V ďalšej Tabuľke 2.6 sme ešte zhrnuli hodnoty efektívít a ďalších premenných našich troch modelov.

Model	Premenná	A	B	C	D	E
BCC-I	θ (efektivita)	1	1	0,67 ^P	1	0,39
BCC-O	ψ	1	1	5	1	1,95
	$\frac{1}{\psi}$ (efektivita)	1	1	0,2	1	0,51
Model A s VRS	$1 - \delta$ (efektivita)	1	1	0,67 ^P	1	0,48
	δ	0	0	0,33	0	0,52
	$1 + \delta$	1	1	1,33	1	1,52
	$\frac{1}{1+\delta}$	1	1	0,75	1	0,66

Tabuľka 2.6: Porovnanie efektívít modelov s VRS v **Príklade 1**.

Keďže pri tomto type výnosov z rozsahu neplatí, že optimálna hodnota θ^* sa rovná hodnote $\frac{1}{\psi^*}$, tak aj vzťah medzi efektivitou Modelu A s VRS a efektivitami BCC modelov bude komplikovanejší v porovnaní s Modelom A pre CRS a CCR. Ukazujú to aj výsledky z Tabuľky 2.6. Vidíme, že vzťah $\frac{1}{\psi^*} \leq 1 - \delta^*$ z **Tvrdenia 2** už nemusí platiť pre každé *DMU*. Konkrétne v našom **Príklade 1** pre *DMU_C* platí a pre *DMU_E* nie. Všimnime si však, že stále platí $\theta^* \leq 1 - \delta^*$ a $\psi^* \geq 1 + \delta^*$. V nasledujúcom tvrdení sformulujeme a dokážeme, že posledné dva vzťahy platia vo všeobecnosti.

Tvrdenie 3. *Nech δ^* je optimálnym riešením pre (x_o, y_o) v Modeli A pre VRS. Nech θ^* je optimálnym riešením v BCC-I a nech ψ^* je optimálnym riešením v BCC-O. Potom platia vzťahy:*

$$\theta^* \leq 1 - \delta^* \quad a \quad \frac{1}{\psi^*} \leq \frac{1}{1 + \delta^*}. \quad (2.7)$$

Dôkaz. Dôkaz prvého vzťahu v (2.7) je rovnaký ako v **Tvrdení 2**. Pri dôkaze druhej nerovnosti budeme postupovať podobne ako v predošlej podkapitole. Nech hodnoty δ^* a λ^* sú optimálnym riešením Modelu A. Zvolíme premenné $\bar{\psi} = 1 + \delta^*$, $\bar{\lambda} = \lambda^*$. Tým

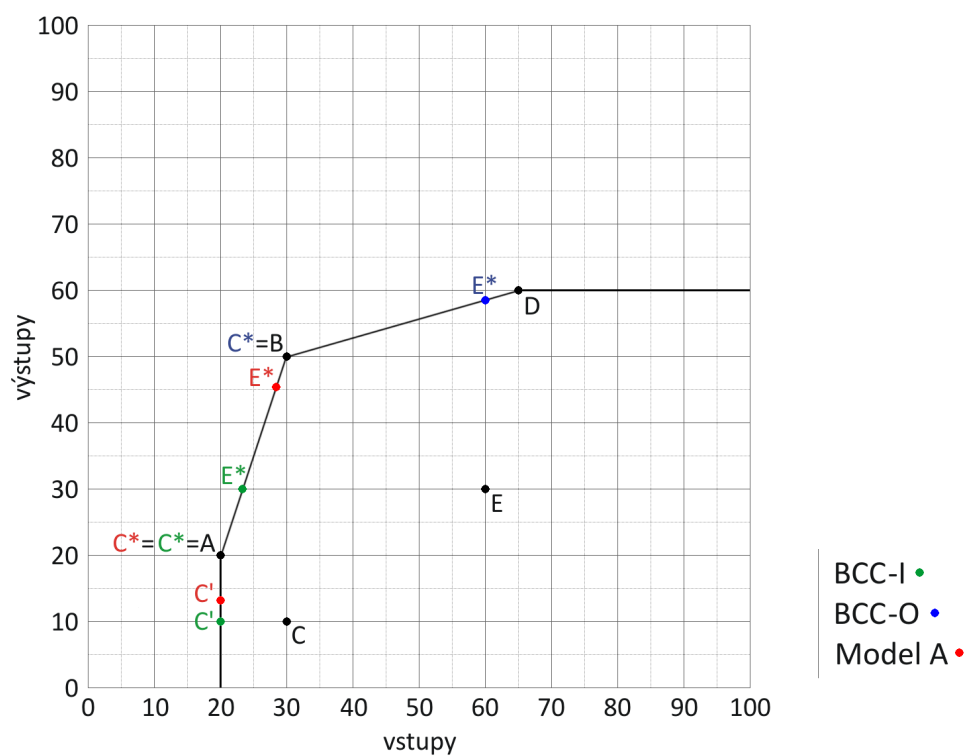
pádov budú splnené nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_j \leq (1 - \delta^*) x_o \leq x_o, \\ \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_j \geq (1 + \delta^*) y_o = \bar{\psi} y_o, \\ \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^* = 1.\end{aligned}$$

Ukázali sme, že $\bar{\psi} = 1 + \delta^*$ je prípustným riešením BCC-O modelu. Prípustné riešenie v maximalizačnej úlohe bude menšie, nanajvýš rovné ako optimálne riešenie a teda dostávame platnosť vzťahov (2.7). \square

Z uvedených vzťahov (2.7) pre optimálne hodnoty vyplýva, že efektívny vzor v prípade Modelu A sa nachádza medzi efektívnym vzorom pri vstupnom BCC a efektívnym vzorom pri výstupnom modeli BCC, prípadne sa môžu zhodovať. Táto situácia je vidieť aj na Obrázku 5.

V prípade Modelu A s VRS aj modelu BCC-I dostaneme projekciu na pseudoefektívnu časť hranice na Obrázku 5 označenú ako C' . Až po dopočítaní druhej fázy sa dostaneme do skutočného efektívneho vzoru – bodu A. Všimnime si, že v prípade Modelu A je pseudoefektívny vzor bližšie k efektívnemu ako v prípade BCC-I. Je to z dôvodu posunu v smere doľava nahor a nielen doľava, teda úpravou aj vstupov aj výstupov oproti len skráteniu vstupov. Z tohto hľadiska je Model A výhodnejší.



Obr. 5: Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{VRS} pre Príklad 1.

3 Neradiálny neorientovaný model

Ako druhý netradičný model vytvoríme neradiálny neorientovaný model a pracovne ho nazveme Model B. Podobne ako Model A sa sústreďuje na vstupy aj výstupy súčasne. Rozdiel medzi nimi spočíva v koeficientoch. Pri Modeli A sme vstupy skracovali pomocou čísla $(1 - \delta)$ a výstupy predlžovali pomocou $(1 + \delta)$. Pri Modeli B budeme používať rôzny koeficient pre každý typ vstupu a výstupu zvlášť. Preto vzniklo pomenovanie neradiálny. Premenné x_o a y_o prenášobené koeficientami budú vyzerat nasledovne:

$$\begin{pmatrix} (1 - \sigma_1)x_{1o} \\ \vdots \\ (1 - \sigma_i)x_{io} \\ \vdots \\ (1 - \sigma_m)x_{mo} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1 + \gamma_1)y_{1o} \\ \vdots \\ (1 + \gamma_r)y_{ro} \\ \vdots \\ (1 + \gamma_s)y_{so} \end{pmatrix}.$$

Kedže uvažujeme len posun v smere zmenšenia vstupov a zväčšenia výstupov, požadujeme aby koeficienty $\sigma_i, i = 1, \dots, m$ a $\gamma_r, r = 1, \dots, s$, boli nezáporné.

Aby sme dosiahli tohto javu, vytvoríme maticu, kde na diagonále budeme mať koeficienty a násobíme zľava. Model tak bude vyzerat:

$$\begin{aligned} (\text{Model B1})_o : \min_{\sigma, \gamma, \lambda} & -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j & \leq \begin{pmatrix} 1 - \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 - \sigma_m \end{pmatrix} x_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j & \geq \begin{pmatrix} 1 + \gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 + \gamma_r \end{pmatrix} y_o, \\ \sigma & \geq 0_m, \quad \gamma \geq 0_s, \quad \lambda \geq 0_n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T$ a $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)^T$. K modelu B1 vzápätí vytvoríme duálnu úlohu a podľa nej ešte doupravíme niektoré ohraničenia a podmienky.

<p>PRIMÁRNA ÚLOHA:</p> $\min_{\sigma, \gamma, \lambda} -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right)$ <p>s.t. $-diag(x_o)\sigma - X\lambda \geq -x_o,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$-diag(y_o)\gamma + Y\lambda \geq y_o,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$\sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n,$</p>	<p>DUÁLNA ÚLOHA:</p> $\max_{v, u} y_o^T u - x_o^T v,$ <p>s.t. $-diag(x_o)v \leq -\frac{1}{m} \cdot \mathbb{1}_m,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$-diag(y_o)u \leq -\frac{1}{s} \cdot \mathbb{1}_s,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$Y^T u - X^T v \leq 0_n,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$v \geq 0_m, u \geq 0_s.$</p>
---	---

V ďalšom kroku odstránime požiadavku na kladnosť váh u a v . Dôvod je jednoduchý – po úpravách dostaneme požiadavku na dolné ohraničenie váh u aj v a je celkom zbytočné ohraničovať aj nulou:

$$-diag(x_o)v \leq -\frac{1}{m} \cdot \mathbb{1}_m \iff v \geq \frac{1}{m}(diag(x_o))^{-1} \cdot \mathbb{1}_m,$$

$$-diag(y_o)u \leq -\frac{1}{s} \cdot \mathbb{1}_s \iff u \geq \frac{1}{s}(diag(y_o))^{-1} \cdot \mathbb{1}_s.$$

V primárnej úlohe sa to prejaví v podobe zmeny ohraničení z nerovností na rovnosti.

<p>PRIMÁRNA ÚLOHA:</p> $\min_{\sigma, \gamma, \lambda} -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right)$ <p>s.t. $-diag(x_o)\sigma - X\lambda = -x_o,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$-diag(y_o)\gamma + Y\lambda = y_o,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$\sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n,$</p>	<p>DUÁLNA ÚLOHA:</p> $\max_{v, u} y_o^T u - x_o^T v$ <p>s.t. $-diag(x_o)v \leq -\frac{1}{m} \cdot \mathbb{1}_m,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$-diag(y_o)u \leq -\frac{1}{s} \cdot \mathbb{1}_s,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$Y^T u - X^T v \leq 0_n,$</p> <p style="padding-left: 2em;">$v, u \in \mathbb{R}^{m+s}.$</p>
---	---

Definícia 3. Pod Modelom B odpovedajúcom CRS aplikovaným na DMU = (x_o, y_o) rozumieme nasledujúcu úlohu LP:

$$\begin{aligned}
 (Model\ B)_o : \quad \min_{\sigma, \gamma, \lambda} & -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\
 \text{s.t.} \quad & diag(x_o)\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = x_o, \\
 & -diag(y_o)\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = y_o, \\
 & \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pod Modelom B odpovedajúcom VRS rozumieme úlohu:

$$\begin{aligned}
 (\text{Model B s VRS})_o : \quad & \min_{\sigma, \gamma, \lambda} -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\
 \text{s.t.} \quad & \text{diag}(x_o)\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = x_o, \\
 & -\text{diag}(y_o)\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = y_o, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

V tomto prípade máme obe premenné σ a γ nezáporné, to znamená, že optimálna hodnota účelovej funkcie $-\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right)$ spadá do intervalu $(-\infty, 0]$ podobne ako pri aditívnom modeli. Nevieme sa obmedziť len na interval $[0, 1]$ ani po pripočítaní 1 k hodnote účelovej funkcie, čo potvrdzujú aj príklady ďalej v kapitole. Preto optimálnu hodnotu účelovej funkcie nemôžeme interpretovať ako efektivitu, i keď môže poskytovať určitú mieru neefektivity – čím je hodnota menšia, tým je útvar menej efektívny. Ak chceme mať hodnotu interpretovateľnú ako efektivitu, môžeme ju napríklad dopočítať pomocou vzorca (1.12) rovnako ako pri aditívnom modeli.

Dalo by sa povedať, že Model B je istou modifikáciou klasického aditívneho modelu, prípadne, že sa ponáša na aditívny model s váhami bližšie popísaný v skriptách [5]. Výsledný λ^* -vzor bude teda rovno efektívnym vzorom. Ak je optimálna hodnota účelovej funkcie rovná 0, tak je útvar efektívny, ak je < 0 , tak je útvar neefektívny.

Aditívny model:	Model B:
$ \begin{aligned} & \min_{\lambda, s^x, s^y} -(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^x = x_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^y = y_o, \\ & s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s, \lambda \geq 0_n, \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & \min_{\sigma, \gamma, \lambda} -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \text{diag}(x_o)\sigma = x_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - \text{diag}(y_o)\gamma = y_o, \\ & \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n. \end{aligned} $

Vidíme, že v Modeli B posúvame (x_o, y_o) v smere $(-\text{diag}(x_o)\sigma, \text{diag}(y_o)\gamma)$, to znamená v smere znižovania vstupov a zväčšovania výstupov. Rovnakým spôsobom sme posúvali pri aditívnom modeli, ibaže sme mali vektor posunu vyjadrený pomocou $(-s^x, s^y)$. To značí, že množina prípustných posunov je rovnaká pre obidva modely.

Rozdiel však bude v účelovej funkcii. Zatiaľ čo v aditívnom modeli sa posun vykonával tak, aby sa maximalizovala hodnota súčtu zložiek vektorov s^x a s^y , v Modeli B

sa maximalizuje vážený normovaný súčet zložiek vektorov posunu. Ak totiž označíme $diag(x_o)\sigma = s^x$ a $diag(y_o)\gamma = s^y$, tak účelovú funkciu v Modeli B vieme prepísať do tvaru $-(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{io}} + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^y}{y_{ro}})$.

Aby sme vedeli dokázať nasledujúce **Tvrdenie 4**, vytvoríme duálnu úlohu aj k Modelu B s VRS:

<p style="text-align: center;">PRIMÁRNA ÚLOHA:</p> $\min_{\sigma, \gamma, \lambda} \quad -(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r)$ <p style="text-align: center;">s.t. $-diag(x_o)\sigma - X\lambda = -x_o,$</p> <p style="text-align: center;">$-diag(y_o)\gamma + Y\lambda = y_o,$</p> <p style="text-align: center;">$0\sigma + 0\gamma + \mathbb{1}^T \lambda = 1,$</p> <p style="text-align: center;">$\sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n,$</p>		<p style="text-align: center;">DUÁLNA ÚLOHA:</p> $\max_{v, u, z} \quad y_o^T u - x_o^T v + z$ <p style="text-align: center;">s.t. $-diag(x_o)v \leq -\frac{1}{m} \cdot \mathbb{1}_m,$</p> <p style="text-align: center;">$-diag(y_o)u \leq -\frac{1}{s} \cdot \mathbb{1}_s,$</p> <p style="text-align: center;">$Y^T u - X^T v + z \leq 0_n,$</p> <p style="text-align: center;">$v, u, z \in \mathbb{R}^{m+s+1}.$</p>
--	--	--

Tvrdenie 4. Úloha $(Model\ B)_o$ a $(Model\ B\ s\ VRS)_o$ má optimálne riešenie pre akýkoľvek súbor dát spĺňajúci Predpoklad (1.1).

Dôkaz. Podobne ako v predchádzajúcej kapitole, aj tu odvodíme existenciu optimálneho riešenia z duálnej úlohy. Opäť ukážeme dve vlastnosti:

(i) OHRANIČENOSŤ funkcie $1 + y_o^T u - x_o^T v$

Ohraničenosť účelovej funkcie zhora vyplýva z podmienky $y_j^T u - x_j^T v \leq 0$ pre všetky $j = 1, \dots, n$.

(ii) PRÍPUSTNOSŤ duálnej úlohy

V tejto časti hľadáme kandidátov na váhy v a u spĺňajúce podmienky v tvare:

$$\begin{aligned} v &\geq \frac{1}{m} (diag(x_o))^{-1} \cdot \mathbb{1}, \\ u &\geq \frac{1}{s} (diag(y_o))^{-1} \cdot \mathbb{1}, \\ y_j^T u - x_j^T v &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Pre jednotlivé zložky vektorov budú prvé dve podmienky vyzerat $v_i \geq \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{x_{io}}, u_r \geq \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{y_{ro}}$. Položme \bar{u}_r rovné $\frac{1}{s \cdot y_{ro}}$ pre všetky $r = 1, \dots, s$ a \bar{v}_i rovné $\frac{1}{m \cdot x_{io}}$ pr všetky $i = 1, \dots, m$. Na to aby bola splnená nerovnosť $y_j^T u - \varepsilon x_j^T v \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$, potrebujeme nájsť kandidáta na ε , ktorý spĺňa podmienku $\varepsilon \geq \frac{y_j^T \bar{u}}{x_j^T \bar{v}}$ pre všetky $j = 1, \dots, n$. Zvolíme ho

teda ako:

$$\bar{\varepsilon} = \max_j \frac{y_j^T \bar{u}}{x_j^T \bar{v}}.$$

Takýmto spôsobom sme ukázali, že úloha má prípustné riešenie a teda, že duálna úloha má optimálne riešenie. Zo silnej vety o dualite vyplýva, že aj primárna úloha má optimálne riešenie.

V duálnej úlohe k úlohe (Model B s VRS)_o opäť pribudla premenná z , ktorú zvolíme ako $\bar{z} = 0$ a ďalej v dôkaze postupujeme analogicky ako pri úlohe (Model B)_o. Týmto sme dokázali existenciu optimálneho riešenia pre obe úlohy. \square

3.1 Základné vlastnosti

Invariantnosť modelu na zmenu jednotiek

Definujeme matice transformácií jednotiek A a B . Rovnako ako v predošlej kapitole nové vstupy a výstupy prislúchajúce j -tej DMU označíme x'_j a y'_j a budú vyzerat nasledovne:

$$Ax_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{1j} \\ \vdots \\ x'_{mj} \end{pmatrix} = x'_j, \quad \alpha_i > 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

$$By_j = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{sj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_{1j} \\ \vdots \\ y'_{sj} \end{pmatrix} = y'_j, \quad \beta_r > 0 \quad r = 1, \dots, s.$$

Nové premenné dosadíme do Modelu B a porovnáваме s pôvodnou úlohou:

<p>úloha pred transformáciou:</p> $\min_{\sigma, \gamma, \lambda} -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right)$ $diag(x_o)\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = x_o,$ $-diag(y_o)\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = y_o,$ $\sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n,$	<p>úloha po transformácii:</p> $\min_{\sigma, \gamma, \lambda} -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right)$ $A \cdot diag(x_o)\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j Ax_j = Ax_o,$ $-B \cdot diag(y_o)\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j By_j = By_o,$ $\sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n.$
---	--

Vidíme, že účelová funkcia a požiadavky na nezápornosť σ, γ, λ sa zachovávajú a obidve ohraničenia sú ekvivalentné. Pri Modeli B odpovedajúcim variabílnym výnosom z

rozsahu, by nám k ohraničeniam pribudla ešte požiadavka $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, ktorá by bola rovnaká pre úlohu s pôvodnými aj zmenenými jednotkami. Môžeme teda vyhlásiť, že Model B s CRS aj s VRS **je invariantný na zmenu jednotiek**. Je to výhodou oproti aditívnemu modelu.

Invariantnosť modelu na posun

Nové premenné x'_j a $y'_j, j = 1, \dots, n$, dostaneme pripočítaním vektorov posunu Δx a Δy :

$$x_j \rightarrow x_j + \Delta x = x'_j,$$

$$y_j \rightarrow y_j + \Delta y = y'_j.$$

úloha pred transformáciou:

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma, \lambda} & -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\ \text{diag}(x_o)\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j & = x_o, \\ -\text{diag}(y_o)\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j & = y_o, \\ \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda & \geq 0_n, \end{aligned}$$

úloha po transformácii:

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma, \lambda} & -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\ (\text{diag}(x_o) + \text{diag}(\Delta x))\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j + \Delta x) & = x_o + \Delta x, \\ -(\text{diag}(y_o) + \text{diag}(\Delta y))\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j + \Delta y) & = y_o + \Delta y, \\ \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda & \geq 0_n. \end{aligned}$$

Na ekvivalenciu oboch úloh by sme potrebovali platnosť rovníc:

$$\begin{aligned} \text{diag}(\Delta x)\sigma + \sum_{j=1}^n \lambda_j \Delta x = \Delta x & \iff \Delta x_i \sigma_i + \Delta x_i \sum_{j=1}^n \lambda_j = \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ -\text{diag}(\Delta y)\gamma + \sum_{j=1}^n \lambda_j \Delta y = \Delta y & \iff -\Delta y_r \gamma_r + \Delta y_r \sum_{j=1}^n \lambda_j = \Delta y_r, \quad r = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

čo by znamenalo:

$$\begin{aligned} \sigma_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j & = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ -\gamma_r + \sum_{j=1}^n \lambda_j & = 1, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Žiadne takéto ohraničenia v Modeli B nemáme, to znamená, že Model B **nie je invariantný na posun jednotiek**. Ak však vezmeme do úvahy variabilné výnosy z rozsahu, to značí pridáme ohraničenie $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, tak v prípade efektívnych útvarov budú koeficienty $\sigma_i, i = 1, \dots, m$ a $\gamma_r, r = 1, \dots, s$, rovné 0 a budú splnené rovnice (3.4). Model B s VRS teda zachováva rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne.

Porovnanie vlastností s aditívnym modelom

Model	zmena I	zmena O	posun I	posun O
Aditívny model s CRS	nie (+)	nie (+)	nie	nie
Model B s CRS	áno	áno	nie	nie
Aditívny model s VRS	nie (+)	nie (+)	áno	áno
Model B s VRS	áno	áno	nie (+)	nie (+)

Tabuľka 3.1: Prehľad invariantností modelov na zmenu alebo posun jednotiek.

Legenda: nie (+) znamená, že model nie je invariantný, avšak zachováva rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne.

3.2 Porovnanie modelov B a AD s CRS

V tejto podkapitole sa venujeme porovnávaniu dvoch neorientovaných modelov – Modelu B a aditívnemu modelu na konkrétnom príklade. Oba odpovedajú konštantným výnosom z rozsahu.

<p style="text-align: center;">Aditívny model:</p> $\begin{aligned} \min_{\lambda, s^x, s^y} & -(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^x = x_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^y = y_o, \\ & s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s, \lambda \geq 0_n, \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">Model B:</p> $\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma, \lambda} & -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \text{diag}(x_o)\sigma = x_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - \text{diag}(y_o)\gamma = y_o, \\ & \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda \geq 0_n. \end{aligned}$
---	---

Na porovnanie sme v tejto kapitole vybrali trochu odlišný príklad ako v predošlej. Je to z dôvodu, že s týmito dátami vychádzajú iné efektívne vzory pre Model B ako pre aditívny model.

Príklad 2. *Majme 5 útvarov s jednorozmerným vstupom a jednorozmerným výstupom. Dáta sú uvedené v Tabuľke 3.2. Postupne na ne aplikujme aditívny model, Model B, aditívny model s VRS a Model B s VRS.*

	A	B	C	D	E
vstupy	20	30	45	65	70
výstupy	20	50	30	60	15

Tabuľka 3.2: Vstupy a výstupy 5 DMU v **Príklade 2**.

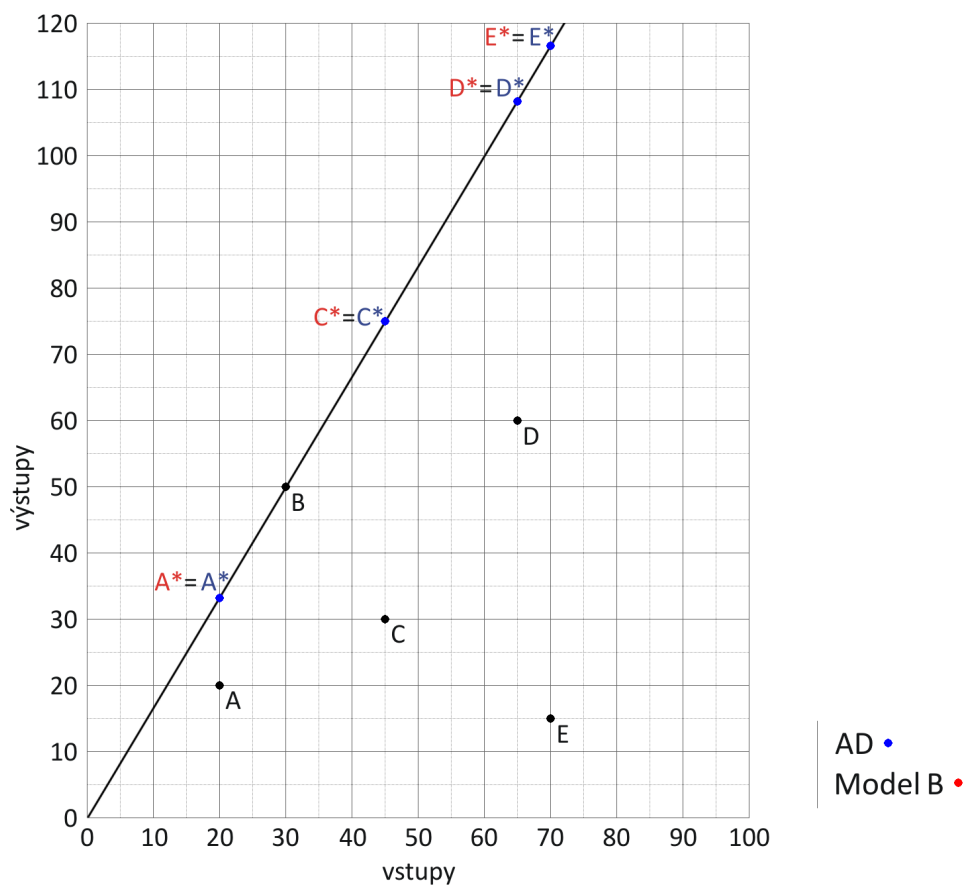
Výsledky výpočtov sme zaznamenali do Tabuľky 3.3.

Model	Premenná	A	B	C	D	E
Aditívny model	$-(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y)$	-13,33	0	-45	-48,33	-101,67
	λ_2	0,67	1	1,5	2,17	2,33
	s^x	0	0	0	0	0
	s^y	13,33	0	45	48,33	101,67
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	45	65	70
	efektívny vzor (výstupy)	33,33	50	75	108,33	116,67
	efektivita	0,8	1	0,7	0,78	0,56
Model B	$-(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r)$	-0,67	0	-1,5	-0,81	-6,78
	λ_2	0,67	1	1,5	2,17	2,33
	σ_1	0	0	0	0	0
	γ_1	0,67	0	1,5	0,81	6,78
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	45	65	70
	efektívny vzor (výstupy)	33,33	50	75	108,33	116,67
	efektivita	0,8	1	0,7	0,78	0,56

Tabuľka 3.3: Výsledky výpočtov Model B vs. aditívny model s CRS v **Príklade 2**.

Efektivitu pri aditívnom modeli aj pri Modeli B sme dopočítali podľa vzorca (1.12) pomocou priemeru parciálnych efektívít. Keďže pri oboch vyšli rovnaké efektívne vzory, ktoré sa používajú na dopočítanie efektivity, aj hodnoty efektívít vyšli rovnaké.

Na Obrázku 6 sme vyznačili efektívne vzory. V tomto špeciálnom dvojrozmernom prípade vyšli identické ako tie, čo navrhol aditívny model.



Obr. 6: Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{CRS} pre **Príklad 2**.

3.3 Porovnanie modelov B a AD s VRS

V poslednej podkapitole sa zameriame na rovnaké modely ako v minulej, ibaže tentoraz pre prípad variabilných výnosov z rozsahu, to značí že k ohraničeniam pribudla požiadavka na λ :

Aditívny model s VRS:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, s^x, s^y} & -(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^x &= x_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^y &= y_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s, \lambda &\geq 0_n, \end{aligned}$$

Model B s VRS:

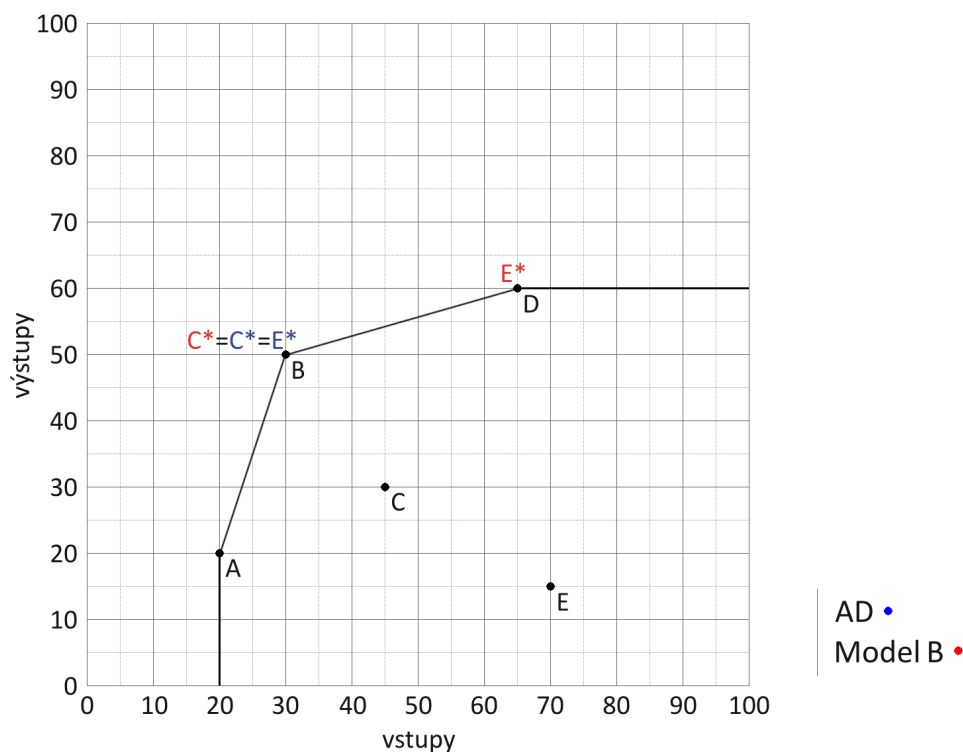
$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma, \lambda} & -\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r\right) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \text{diag}(x_o) \sigma &= x_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - \text{diag}(y_o) \gamma &= y_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \sigma \geq 0_m, \gamma \geq 0_s, \lambda &\geq 0_n. \end{aligned}$$

Porovnanie budeme opäť robiť na dvojrozmernom príklade s dátami z Tabuľky 3.2. V Tabuľke 3.4 uvádzame výsledky výpočtov, pričom nulové λ sme neuviedli, kvôli rozmerom tabuľky.

Model	Premenná	A	B	C	D	E
AD model s VRS	$-(\mathbb{1}_m^T s^x + \mathbb{1}_s^T s^y)$	0	0	-35	0	-75
	λ_1	1	0	0	0	0
	λ_2	0	1	1	0	1
	λ_4	0	0	0	1	0
	s^x	0	0	15	0	40
	s^y	0	0	20	0	35
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	30	65	30
	efektívny vzor (výstupy)	20	50	50	60	50
	efektivita	1	1	0,63	1	0,36
Model B s VRS	$-(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r)$	0	0	-1	0	-3,07
	λ_1	1	0	0	0	0
	λ_2	0	1	1	0	0
	λ_4	0	0	0	1	1
	σ_1	0	0	0,33	0	0,07
	γ_1	0	0	0,67	0	3
	efektívny vzor (vstupy)	20	30	30	65	65
	efektívny vzor (výstupy)	20	50	50	60	60
	efektivita	1	1	0,63	1	0,59

Tabuľka 3.4: Výsledky výpočtov Model B vs. aditívny model s VRS v **Príklade 2**.

Hodnoty efektívít sme pri aditívnom modeli aj pri Modeli B opäť dorátali pomocou vzorca (1.12). Na Obrázku 7 sme graficky znázornili nájdené efektívne vzory. Tentoraz sa už všetky nezhodujú ako v prípade CRS, takže to skutočne nie je pravidlom.



Obr. 7: Efektívne vzory označené * na hranici množiny M_{VRS} pre **Príklad 2**.

Rozoberieme si hlbšie tento dvojrozmerný prípad a hľadanie efektívnych vzorov. Keďže máme len jeden vstup a jeden výstup, modely vieme upraviť do tvaru:

Aditívny model s VRS:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, s^x, s^y} -(s^x + s^y) &\iff \max_{\lambda, s^x, s^y} (s^x + s^y) \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j x_j + s^x &= x_o, \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j y_j - s^y &= y_o, \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j &= 1, \\ s^x \geq 0, s^y \geq 0, \lambda &\geq 0_5, \end{aligned}$$

Model B s VRS:

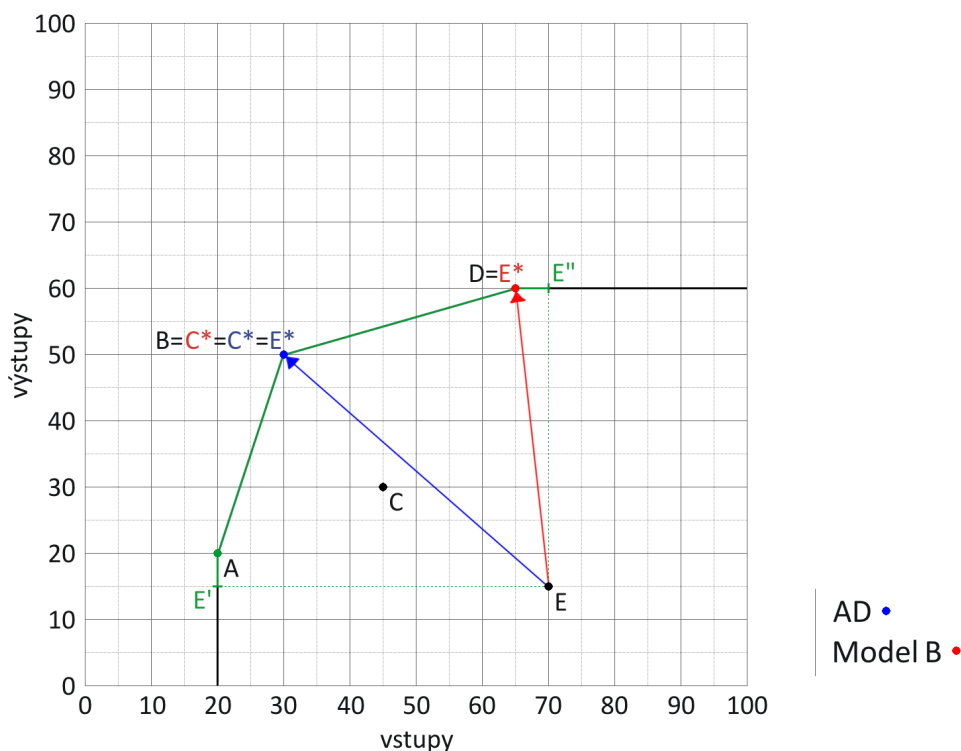
$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma, \lambda} -(\sigma + \gamma) &\iff \max_{\sigma, \gamma, \lambda} (\sigma + \gamma) \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j x_j + x_o \sigma &= x_o, \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j y_j - y_o \gamma &= y_o, \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j &= 1, \\ \sigma \geq 0, \gamma \geq 0, \lambda &\geq 0_5. \end{aligned}$$

Označme teraz $x_o \sigma = s^x$ a $y_o \gamma = s^y$. Dostávame:

Model B s VRS:

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \gamma, \lambda} -(\sigma + \gamma) &\iff \max_{\sigma, \gamma, \lambda} (\sigma + \gamma) \iff \max_{s^x, s^y} \frac{s^x}{x_o} + \frac{s^y}{y_o} \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j x_j + s^x &= x_o, \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j y_j - s^y &= y_o, \\ \sum_{j=1}^5 \lambda_j &= 1, \\ \sigma \geq 0, \gamma \geq 0, \lambda &\geq 0_5. \end{aligned}$$

Pre oba modely mnohoúhelník $E'ABDE''E$ tvorí množinu prípustných bodov, do ktorých môže byť bod E posunutý pomocou vektorov s^x a s^y . Na Obrázku 8 sme ju vykreslili zelenou. Na tejto množine smerov pri aditívnom modeli maximalizujeme $(s^x + s^y)$ a pri Modeli B s VRS maximalizujeme výraz $(\frac{s^x}{70} + \frac{s^y}{15})$.



Obr. 8: Rôzne efektívne vzory pre Príklad 2.

4 Japonské banky

Ako praktický viacrozmerný príklad sme si vybrali porovnanie jednotlivých japonských bánk. Zozbierané dáta sú reálne dáta z roku 1999 z článku [6]. Budeme pracovať s tromi vstupmi – celkovým kapitálom banky, počtom pobočiek a počtom zamestnancov. Ako dva výstupy nám bude slúžiť celkový zisk a vklady. Údaje, s ktorými ďalej pracujeme, sú uvedené v Tabuľke 4.1.

	Názov banky	Kapitál	Pobočky	Zamestnanci	Zisk	Vklady
1	Daiichikangyou	859	371	15 788	218 938	28 910
2	Sakura	1 043	436	14 930	159 932	29 804
3	Fuji	1 040	327	13 567	223 340	27 405
4	Tokyo Mitsubishi	786	374	17 412	218 989	39 653
5	Asahi	605	369	12 148	88 091	20 146
6	Sanwa	843	338	13 020	175 483	28 254
7	Sumitomo	753	353	14 394	176 477	27 388
8	Daiwa	465	193	7 315	37 611	9 998
9	Toukai	723	281	10 750	118 963	18 546
10	Hokkaido	71	135	2 584	12 765	3 286
11	Gunma	49	173	3 714	20 308	4 753
12	Ashikaga	132	189	4 073	17 666	4 986
13	Chiba	107	163	4 569	29 830	6 610
14	Yokohama	185	186	5 323	51154	8 648
15	Hokuriku	121	191	3 976	10194	5 289
16	Shizuoka	91	189	4 509	42982	6 578
17	Kyoto	27	115	2 862	8 633	3 749
18	Hiroshima	52	222	3 832	7 606	4 917
19	Hukuoka	59	177	4 261	9 733	5 585
20	Nishinohon	51	194	3 492	5 765	3 763

Tabuľka 4.1: Údaje o japonských bankách.

4.1 Model A vs. CCR

V prvej podkapitole sme na dáta aplikovali modely odpovedajúce konštantným výnosom z rozsahu – dva CCR modely a Model A. Všetky tri vyhodnotili ako efektívne banky Daiichikangyou (1), Fuji (3), Tokyo Mitsubishi (4), Shizuoka (16) a Kyoto (17). V nasledujúcej Tabuľke 4.2 uvádzame hodnoty týchto efektívít, pričom veľkým P sú označené pseudoeфекtivity. Všimnime si, že Model A opäť vracia vyššie optimálne hodnoty.

	CCR-I	CCR-O	Model A	Model A
	θ	$\frac{1}{\psi}$	$1 - \delta$	$\frac{1}{1+\delta}$
1	1	1	1	1
2	0,877 ^P	0,877 ^P	0,934 ^P	0,938
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0,728 ^P	0,728 ^P	0,843 ^P	0,864
6	0,985 ^P	0,985 ^P	0,992 ^P	0,992
7	0,908 ^P	0,908 ^P	0,952 ^P	0,954
8	0,600 ^P	0,600 ^P	0,750 ^P	0,800
9	0,790 ^P	0,790 ^P	0,883 ^P	0,895
10	0,707 ^P	0,707 ^P	0,828 ^P	0,853
11	0,998 ^P	0,998 ^P	0,999 ^P	0,999
12	0,634 ^P	0,634 ^P	0,776 ^P	0,817
13	0,871 ^P	0,871 ^P	0,931 ^P	0,936
14	0,849 ^P	0,849 ^P	0,919 ^P	0,925
15	0,708 ^P	0,708 ^P	0,829 ^P	0,854
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	0,902 ^P	0,902 ^P	0,949 ^P	0,951
19	0,917 ^P	0,917 ^P	0,957 ^P	0,958
20	0,743 ^P	0,743 ^P	0,853 ^P	0,872

Tabuľka 4.2: Porovnanie efektívít jednotlivých modelov s CRS.

Ďalej ešte uvádzame dve tabuľky obsahujúce efektívne vzory. Kvôli rozsahu kapitoly sme sa rozhodli podrobnejšie výsledky uviesť až v prílohe. V Tabuľke 4.3 sú hodnoty efektívnych vstupov a v Tabuľke 4.4 zase efektívne výstupy. Pri všetkých efektívnych

útvarech sa pochopiteľne zachovali pôvodné hodnoty. Model CCR-I šetrí najviac aj na vstupoch aj na výstupoch, model CCR-O dáva najväčšie hodnoty efektívnych vzorov a Model A je niekde uprostred. Z tohto dôvodu ho môžeme považovať za dobrý kompromis – nenúti nás ani prehnane šetriť a ani prehnane zvyšovať produkciu.

	CCR-I	A	CCR-O	CCR-I	A	CCR-O	CCR-I	A	CCR-O
	Kapitál	Kapitál	Kapitál	Pob	Pob	Pob	Zam	Zam	Zam
1	859	859	859	371	371	371	15 788	15 788	15 788
2	590,77	629,63	673,96	281,11	299,60	320,69	13 087,21	13 948	14 930
3	1 040	1 040	1 040	327	327	327	13 567	13 567	13 567
4	786	786	786	374	374	374	17 412	17 412	17 412
5	399,33	462,13	548,38	190,01	219,90	260,93	8 846,30	10 237,52	12 148
6	694,24	699,59	705,03	285	287,19	289,42	12 820,74	12 919,60	13 020
7	683,36	716,49	753	293,75	308	323,69	13 062,83	13 696,14	14 394
8	198,18	247,70	330,21	94,30	117,86	157,12	4 390,21	5 487,20	7 315
9	481,75	538,17	609,56	190,67	213	241,25	8 495,98	9 491	10 750
10	50,20	58,81	71	56,14	65,78	79,41	1 826,82	2 140,42	2 584
11	48,91	48,95	49	141,50	141,64	141,77	3 456	3 459,33	3 462,67
12	83,62	102,38	132	72,63	88,93	114,65	2 580,25	3 159,17	4 073
13	93,24	99,65	107	136,71	146,11	156,89	3 981,43	4 255,03	4 569
14	157,12	169,92	185	136,93	148,09	161,23	4 520,86	4 889,25	5 323
15	85,67	100,31	121	82,15	96,20	116,03	2 815,04	3 296,28	3 976
16	91	91	91	189	189	189	4 509	4 509	4 509
17	27	27	27	115	115	115	2 862	2 862	2 862
18	46,92	49,33	52	131,45	138,20	145,68	3 457,86	3 635,33	3 832
19	54,10	56,44	59	147,96	154,37	161,37	3 907,04	4 076,35	4 261
20	37,90	43,49	51	97,25	111,58	130,86	2 595,14	2 977,50	3 492

Tabuľka 4.3: Efektívne vzory pre vstupy CCR modelov a Modelu A s CRS.

	CCR-I Zisk	A Zisk	CCR-O Zisk	CCR-I Vklady	A Vklady	CCR-O Vklady
1	218 938	218 938	218 938	28 910	28 910	28 910
2	164 596,58	175 422,66	187 773,13	29 804	31 764,31	34 000,65
3	223 340	223 340	223 340	27 405	27 405	27 405
4	218 989	218 989	218 989	39 653	39 653	39 653
5	111 258,98	128 756,32	152 784,19	20 146	23 314,30	27 665,10
6	175 483	176 836,14	178 210,31	28 254	28 471,87	28 693,12
7	176 477	185 033,03	194 460,96	27 388	28 715,84	30 178,99
8	55 215,29	69 011,96	92 000,03	9 998	12 496,20	16 658,72
9	118 963	132 895,55	150 524,46	18 546	20 718,05	23 466,34
10	14 335,61	16 796,53	20 277,44	3 286	3 850,09	4 647,98
11	20 308	20 327,57	20 347,17	4 753	4 757,58	4 762,17
12	23 655,13	28 962,49	37 340,31	4 986	6 104,68	7 870,55
13	29 830	31 879,87	34 232,26	6 610	7 064,23	7 585,49
14	51 154	55 322,36	60 230,32	8 648	9 352,70	10 182,43
15	24 318,32	28 475,66	34 347,53	5 289	6 193,18	7 470,25
16	42 982	42 982	42 982	6 578	6 578	6 578
17	8 633	8 633	8 633	3 749	3 749	3 749
18	14 259,55	14 991,41	15 802,45	4 917	5 169,36	5 449,02
19	16 401,21	17 111,96	17 887,10	5 585	5 827,03	6 090,98
20	11 420,95	13 103,67	15 367,92	3 763	4 317,43	5 063,46

Tabuľka 4.4: Efektívne vzory pre výstupy CCR modelov a Modelu A s CRS.

4.2 Model A s VRS vs. BCC

V tejto podkapitole sa venujeme dvom orientovaným modelom BCC a Modelu A s variabilnými výnosmi z rozsahu. Spomíname aj tento typ výnosov, nakoľko nemáme žiadnu ďalšiu informáciu o charaktere bánk.

V Tabuľke 4.5 sú spísané efektivity. Opäť platí, že P sú označené pseudoefektivity. V tomto prípade Model A vždy vrátil vyššiu optimálnu hodnotu efektivity ako model BCC-O, čo však nemusí byť pravidlom, ako sme ukázali v druhej kapitole. K efektívnym útvarom okrem tých, ktoré boli efektívne pri CRS – Daiichikangyou (1), Fuji (3), Tokyo Mitsubishi (4), Shizuoka (16) a Kyoto (17), pribudli aj banky Sanwa (6), Hokkaido (10),

Gunma (11) a Hukuoka (19).

	BCC-I	BCC-O	Model A s VRS	Model A s VRS
	θ	$\frac{1}{\psi}$	$1 - \delta$	$\frac{1}{1+\delta}$
1	1	1	1	1
2	0,897 ^P	0,888 ^P	0,943 ^P	0,946
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0,779 ^P	0,753 ^P	0,868 ^P	0,883
6	1	1	1	1
7	0,910 ^P	0,909 ^P	0,952 ^P	0,955
8	0,829 ^P	0,687 ^P	0,876 ^P	0,890
9	0,852 ^P	0,824 ^P	0,912 ^P	0,919
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	0,805 ^P	0,723 ^P	0,870 ^P	0,885
13	0,902	0,879 ^P	0,937 ^P	0,941
14	0,961	0,943	0,976	0,977
15	0,858 ^P	0,797 ^P	0,909 ^P	0,917
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	0,940 ^P	0,958 ^P	0,975 ^P	0,975
19	1	1	1	1
20	0,814 ^P	0,760 ^P	0,873 ^P	0,887

Tabuľka 4.5: Porovnanie efektívít jednotlivých modelov s VRS.

Pri efektívnych vzoroch opäť platí isté pravidlo, že model BCC zameraný na vstupy dáva najnižšie hodnoty efektívnych vzorov, model BCC orientovaný na výstupy najvyššie a Model A s VRS sa pohybuje medzi týmito dvoma. Kompletne efektívne vzory nájdeme v Tabuľke 4.6 a v Tabuľke 4.7. Zvyšné údaje o λ a *slackoch* sú uvedené v prílohe.

	BCC-I	A s VRS	BCC-O	BCC-I	A s VRS	BCC-O	BCC-I	A s VRS	BCC-O
	Kap	Kap	Kap	Pob	Pob	Pob	Zam	Zam	Zam
1	859	859	859	371	371	371	15 788	15 788	15 788
2	592,36	625,55	666,32	309,27	320,37	333,99	13 396,24	14 084,46	14 930
3	1 040	1 040	1 040	327	327	327	13 567	13 567	13 567
4	786	786	786	374	374	374	17 412	17 412	17 412
5	402,48	454,80	532,17	245,80	263,29	289,15	9 458,37	10 543,37	12 148
6	843	843	843	338	338	338	13 020	13 020	13 020
7	684,89	717,14	753	315,93	325,60	336,36	13 092,11	13 708,51	14 394
8	159,10	185,35	255,58	160,08	169,03	193	5 394,39	5 897,51	7 243,85
9	500,98	546,09	645,27	239,41	256,14	281	9 158,84	9 798,76	10 750
10	71	71	71	135	135	135	2 584	2 584	2 584
11	49	49	49	173	173	173	3 714	3 714	3 714
12	104,42	114,88	132	146,17	149,44	154,39	3 277,14	3 544,66	4 073
13	96,52	100,28	107	147,04	150,48	159,36	4 121,50	4 281,98	4 569
14	177,86	180,65	185	178,82	181,63	186	5 117,63	5 197,84	5 323
15	103,83	109,98	121	145,32	147,04	150,13	3 411,70	3 613,76	3 976
16	91	91	91	189	189	189	4 509	4 509	4 509
17	27	27	27	115	115	115	2 862	2 862	2 862
18	48,90	50,69	52	143,40	150,33	155,44	3 603,61	3 735,11	3 832
19	59	59	59	177	177	177	4 261	4 261	4 261
20	41,53	44,53	51	121,28	121,64	134,24	2 843,75	3 049,09	3 492

Tabuľka 4.6: Efektívne vzory pre vstupy BCC modelov a Modelu A s VRS.

	BCC-I Zisk	A s VRS Zisk	BCC-O Zisk	BCC-I Vklady	A s VRS Vklady	BCC-O Vklady
1	218 938	218 938	218 938	28 910	28 910	28 910
2	163 138,91	172 710,43	184 469,98	29 804	31 491,91	33 565,67
3	223 340	223 340	223 340	27 405	27 405	27 405
4	218 989	218 989	218 989	39 653	39 653	39 653
5	108 371,91	123 461,92	145 778,65	20 146	22 807,08	26 742,57
6	175 483	175 483	175 483	28 254	28 254	28 254
7	176 477	184 881,47	194 228,03	27 388	28 692,32	30 142,84
8	45 244,93	52 518,72	71 983,46	9 998	11 239,51	14 561,79
9	118 963	129 489,69	144 378,66	18 546	20 187,08	22 508,23
10	12 765	12 765	12 765	3 286	3 286	3 286
11	20 308	20 308	20 308	4 753	4 753	4 753
12	22 405,08	25 784,86	31 968,99	4 986	5 632,78	6 896,74
13	29 830	31 703,86	33 928,08	6 610	7 025,23	7 518,09
14	51 154	52 356,77	54 233,45	8 648	8 851,34	9 168,61
15	23 289,33	25 598,75	29 738,98	5 289	5 770,87	6 634,74
16	42 982	42 982	42 982	6 578	6 578	6 578
17	8 633	8 633	8 633	3 749	3 749	3 749
18	11 520,62	11 053,01	10 708,47	4 917	5 041,33	5 132,93
19	9 733	9 733	9 733	5 585	5 585	5 585
20	10 526,67	12 420,68	13 604,15	3 763	4 240,29	4 954,01

Tabuľka 4.7: Efektívne vzory pre výstupy BCC modelov a Modelu A s VRS.

4.3 Model B vs. aditívny model s CRS

V tejto podkapitole sme porovnávali ako dáta vyhodnotí Model B oproti aditívnemu modelu. Najprv sme sa zamerali na prípad konštantných výnosov z rozsahu. Pri oboch modeloch nám vyšlo rovnakých 5 efektívnych útvarov ako aj pri CCR – banky Daiichikangyou (1), Fuji (3), Tokyo Mitsubishi (4), Shizuoka (16) a Kyoto (17).

Do Tabuľky 4.8 sme zaznamenali efektivity jednotlivých útvarov, ktoré sme aj pre aditívny model aj pre Model B dopočítali pomocou vzorca (1.12). V ľavej časti tabuľky uvádzame aj optimálne hodnoty účelových funkcií a vpravo sme všetky útvary usporiadali od najefektívnejších po najmenej efektívne, aby sme zistili, či spolu korešpondujú.

	AD Hodnota	B Hodnota	AD Efektivita	B Efektivita		AD Efektivita		B Efektivita
1	0	0	1	1	1	1	3	1
2	-74 602,791	-0,364	0,891	0,822	16	1	16	1
3	0	0	1	1	17	1	1	1
4	0	0	1	1	3	1	4	1
5	-78 833,621	-0,683	0,802	0,784	4	1	17	1
6	-9 484,433	-0,124	0,944	0,928	11	0,949	11	0,949
7	-21 865,722	-0,198	0,934	0,910	6	0,944	6	0,928
8	-76 590,318	-1,265	0,772	0,772	7	0,934	7	0,910
9	-49 569,706	-0,397	0,888	0,826	13	0,916	13	0,889
10	-15 310,138	-0,827	0,782	0,782	14	0,909	19	0,855
11	-350,823	-0,085	0,949	0,949	2	0,891	14	0,832
12	-29 882,094	-1,135	0,748	0,748	9	0,888	9	0,826
13	-14 140,376	-0,277	0,916	0,889	19	0,855	2	0,822
14	-10 736,914	-0,296	0,909	0,832	5	0,802	18	0,787
15	-34 584,139	-1,878	0,735	0,735	18	0,787	5	0,784
16	0	0	1	1	10	0,782	10	0,782
17	0	0	1	1	8	0,772	8	0,772
18	-14 649,654	-1,078	0,787	0,787	12	0,748	12	0,748
19	-15 337,533	-0,814	0,855	0,855	15	0,735	15	0,735
20	-19 134,352	-1,807	0,708	0,708	20	0,708	20	0,708

Tabuľka 4.8: Porovnanie efektívít pre aditívny model a Model B s CRS.

V Tabuľke 4.9 uvádzame efektívne vzory pre tri vstupy – kapitál, pobočky a zamestnanci, nájdené najprv pomocou aditívneho modelu a potom pomocou Modelu B. Červenou sú zvýraznené vyššie hodnoty vstupov, modrou nižšie. V tomto prípade nám vždy pri aditívnom modeli vyšli vyššie efektívne vstupy, čo môže byť isté plus, pretože nás nenútiť až tolko šetriť v porovnaní s Modelom B.

	AD	B	AD	B	AD	B
	Kapitál	Kapitál	Pobočky	Pobočky	Zamestnanci	Zamestnanci
1	859	859	371	371	15 788	15 788
2	1 043	673,96	351,40	320,69	14 930	14 930
3	1 040	1 040	327	327	13 567	13 567
4	786	786	374	374	17 412	17 412
5	605	548,38	265,65	260,93	12 148	12 148
6	758,80	682,91	293,90	287,58	13 020	13 020
7	753	649,76	317,77	309,18	14 394	14 394
8	465	465	168,34	168,34	7 315	7 315
9	723	485,27	250,69	230,90	10 750	10 750
10	71	71	92,88	92,88	2 584	2 584
11	49	49	141,47	141,47	3 454,90	3 454,90
12	132	132	129,95	129,95	4 073	4 073
13	107	107	163	139,78	4 288,28	3 890,87
14	185	185	159,60	88,03	5 323	4 098,24
15	121	121	133,29	133,29	3 976	3 976
16	91	91	189	189	4 509	4 509
17	27	27	115	115	2 862	2 862
18	52	52	145,97	145,97	3 558,72	3 558,72
19	59	59	165,82	165,82	4 042,95	4 042,95
20	51	51	108,43	108,43	2 591,84	2 591,84

Tabuľka 4.9: Efektívne vzory pre vstupy aditívneho modelu a Modelu B s CRS.

Čo sa týka efektívnych výstupov, v tomto prípade sú modely trochu rozpoltené a nemôžeme jasne povedať, že nám jeden alebo druhý model dáva vždy vyššie hodnoty vzorov. Ako vidíme v Tabuľke 4.10 pri výstupe zisk ponúka vyššie efektívne vzory aditívny model, pri vkladoch zase Model B. Táto rozpoltenosť však nastáva len v prípade 3 bánk, inak oba modely vracajú identické návrhy na efektívne výstupy.

	AD Zisk	B Zisk	AD Vklady	B Vklady
1	218 938	218 938	28 910	28 910
2	233 267,23	187 773,13	30 986,96	34 000,65
3	223 340	223 340	27 405	27 405
4	218 989	218 989	39 653	39 653
5	159 764,57	152 784,19	27 202,69	27 665,10
6	184 839,13	175 483	28 254	28 873,78
7	193 758,55	181 031,91	31 936,94	32 780
8	108 616,68	108 616,68	15 557,98	15 557,98
9	164 508,40	135 201,69	22 540	24 481,38
10	26 931,18	26 931,18	4 387,83	4 387,83
11	20 368,19	20 368,19	4 753	4 753
12	44 900,07	44 900,07	7 574,97	7 574,97
13	43 372,90	40 562,93	6 926,75	6 610
14	60 203,24	51 543,21	10 309,28	9 333,09
15	42 872,48	42 872,48	7 136,94	7 136,94
16	42 982	42 982	6 578	6 578
17	8 633	8 633	3 749	3 749
18	21 906,34	21 906,34	4 917	4 917
19	24 841,30	24 841,30	5 585	5 585
20	23 913,62	23 913,62	3 763	3 763

Tabuľka 4.10: Efektívne vzory pre výstupy aditívneho modelu a Modelu B s CRS.

4.4 Model B s VRS vs. aditívny model s VRS

Na úplne posledné porovnanie sme si zvolili aditívny model s VRS a Model B, taktiež verziu s VRS. Efektívne útvary vyšli rovnaké banky ako pri BCC modeloch – Daiichikangyou (1), Fuji (3), Tokyo Mitsubishi (4), Sanwa (6), Hokkaido (10), Gunma (11), Shizuoka (16), Kyoto (17) a Hukuoka (19).

V Tabuľke 4.11 sa nachádzajú efektivity jednotlivých bánk, dopočítané podľa vzorca (1.12) a v pravej časti opäť usporiadané efektivity. Ani v tomto prípade spolu postupnosti nekorešpondujú, avšak celkom často sa stáva, že pri rovnakom útvare vyjde rovnaká hodnota efektivity.

	AD Hodnota	B Hodnota	AD Efektivita	B Efektivita		AD Efektivita		B Efektivita
1	0	0	1	1	3	1	3	1
2	-63 993,757	-0,340	0,872	0,830	4	1	11	1
3	0	0	1	1	6	1	4	1
4	0	0	1	1	10	1	17	1
5	-77 273,917	-0,605	0,830	0,830	16	1	10	1
6	0	0	1	1	17	1	1	1
7	-21 180,268	-0,169	0,946	0,921	19	1	16	1
8	-53 052,255	-0,858	0,804	0,804	1	1	19	1
9	-47 376,903	-0,303	0,921	0,857	11	1	6	1
10	0	0	1	1	14	0,979	14	0,950
11	0	0	1	1	7	0,946	13	0,937
12	-21 654,099	-0,744	0,836	0,787	13	0,937	7	0,921
13	-8 418,718	-0,191	0,937	0,937	9	0,921	9	0,857
14	-4 763,045	-0,093	0,979	0,950	2	0,872	5	0,830
15	-26 629,401	-1,370	0,813	0,813	12	0,836	2	0,830
16	0	0	1	1	5	0,830	18	0,829
17	0	0	1	1	18	0,829	15	0,813
18	-13 048,327	-0,927	0,829	0,829	15	0,813	8	0,804
19	0	0	1	1	8	0,804	12	0,787
20	-16 859,375	-1,594	0,757	0,757	20	0,757	20	0,757

Tabuľka 4.11: Porovnanie efektívít pre aditívny model a Model B s VRS.

Doteraz sme sa stretávali len s prípadom, keď jeden model ponúkal pre všetky banky väčší efektívny vzor pre vstup, prípadne pre všetky menší efektívny výstup. V prípade týchto dvoch modelov to však také jasné nie je – ako vidíme v Tabuľke 4.12, prípadne v Tabuľke 4.13, nie vždy nastáva takáto situácia a pri niektorých bankách sú odporúčania Modelu B väčšie ako pri aditívnom modeli, pri niektorých menšie. Dané skutočnosti sú opäť farebne vyznačené – červenou väčšie čísla, modrou menšie. Ďalším zaujímavým javom je, že efektívne vzory pre vstup zamestnanci sú pre oba modely rovnaké.

	AD	B	AD	B	AD	B
	Kapitál	Kapitál	Pobočky	Pobočky	Zamestnanci	Zamestnanci
1	859	859	371	371	15 788	15 788
2	949,96	656,53	343,66	329,82	14 930	14 930
3	1 040	1 040	327	327	13 567	13 567
4	786	786	374	374	17 412	17 412
5	605	605	300,33	300,33	12 148	12 148
6	843	843	338	338	13 020	13 020
7	753	637,06	333,01	320,68	14 394	14 394
8	399,71	399,71	193	193	6 800,63	6 800,63
9	723	438,48	281	255,41	10 750	10 750
10	71	71	135	135	2 584	2 584
11	49	49	173	173	3 714	3 714
12	132	86,47	170,59	176,77	4 073	4 073
13	107	107	163	163	4 562,33	4 562,33
14	185	146,52	186	186	5 323	5 323
15	121	121	169,22	169,22	3 976	3 976
16	91	91	189	189	4 509	4 509
17	27	27	115	115	2 862	2 862
18	52	52	174,16	174,16	3 801,06	3 801,06
19	59	59	177	177	4 261	4 261
20	51	51	142,75	142,75	3 479,63	3 479,63

Tabuľka 4.12: Efektívne vzory pre vstupy aditívneho modelu a Modelu B s VRS.

	AD Zisk	B Zisk	AD Vklady	B Vklady
1	218 938	218 938	28 910	28 910
2	221 797,63	183 105,59	31 746,75	33 528,35
3	223 340	223 340	27 405	27 405
4	218 989	218 989	39 653	39 653
5	159 814,65	159 814,65	25 627,60	25 627,60
6	175 483	175 483	28 254	28 254
7	193 780,56	176 477	31 244,72	32 154,10
8	87 628,97	87 628,97	12 452,62	12 452,62
9	163 763,87	122 673,42	21 122,03	23 213,66
10	12 765	12 765	3 286	3 286
11	20 308	20 308	4 753	4 753
12	38 171,08	36 138,05	6 116,60	5 832,38
13	37 397,47	37 397,47	7 454,58	7 454,58
14	55 695,09	51 154	8 869,95	9 049,27
15	36 202,28	36 202,28	5 888,34	5 888,34
16	42 982	42 982	6 578	6 578
17	8 633	8 633	3749	3 749
18	20 575,55	20 575,55	4917	4 917
19	9 733	9 733	5585	5 585
20	21 513,87	21 513,87	4 809,87	4 809,87

Tabuľka 4.13: Efektívne vzory pre výstupy aditívneho modelu a Modelu B s VRS.

Záver

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce bola analýza dvoch nových neštandardných modelov v teórii DEA modelovania, ktoré boli doteraz v literatúre spomenuté len veľmi okrajovo. Tieto dva modely sme následne porovnávali s tromi štandardnými modelmi.

Na začiatok sme zhrnuli pár známych základných pojmov z DEA modelovania, pričom sme vychádzali najmä z [2] a [5] a predstavili sme štandardné modely – CCR, BCC a aditívny model.

V ďalšej časti sme definovali prvý neštandardný model – radiálny neorientovaný model, skrátene nazývaný aj ako Model A. V **Definícii 2** sme objasnili kedy vyhlásime útvar za efektívny, pseudoefektívny alebo neefektívny. Podarilo sa nám dokázať existenciu optimálneho riešenia v **Tvrdení 1** a na základe jednoduchého dvojrozmerného príkladu sme v **Tvrdení 2** a **Tvrdení 3** sformulovali a dokázali všeobecné vzťahy medzi efektivitami CCR modelov a Modelu A a BCC modelov a Modelu A s VRS. Taktiež sme zhrnuli jeho základné vlastnosti a porovnávali v Tabulke 2.1. Za hlavnú výhodu Modelu A oproti tradičným orientovaným modelom považujeme fakt, že upravuje aj vstupy aj výstupy súčasne, čo sa z praktického hľadiska ukazuje ako veľké plus, nakoľko nás nenúti ani prehnane šetriť a ani prehnane zväčšovať produkciu. Táto vlastnosť sa pekne odzrkadlila aj v poslednej kapitole, kde sme Model A porovnávali s CCR a BCC modelmi na príklade s reálnymi dátami z článku [6] s tromi vstupmi a dvoma výstupmi. Ďalším pozitívom je, že hoci aj pri tomto druhu modelu sa stretávame s prípadom pseudoefektívneho vzoru, takýto vzor sa nachádza bližšie k efektívnemu, než je tomu napríklad v prípade BCC-I alebo BCC-O modelu. Táto situácia je vidieť na Obrázku 5.

Druhý model, ktorému sme sa podrobne venovali v tretej časti našej práce je neradiálny neorientovaný model, skrátene sme ho nazvali Model B. Aj pre tento model sme dokázali existenciu optimálneho riešenia v **Tvrdení 4**. Hlavnou výhodou Modelu B oproti aditívnemu modelu, s ktorým sme ho porovnávali, je invariantnosť na zmenu jednotiek pri konštantných aj variabilných výnosoch z rozsahu. Na druhú stranu nevýhodou je, že Model B s VRS nie je invariantný na posun, len zachováva rozdelenie útvarov na efektívne a neefektívne, kým aditívny model s VRS je. Okrem týchto rozdielov sú si tieto dva modely svojimi vlastnosťami dosť podobné. Oba sú neorientované,

to znamená upravujú aj vstupy aj výstupy naraz a pri obidvoch mieru efektivity nedostaneme priamo ako optimálnu hodnotu účelovej funkcie, ale musíme ju dopočítať pomocou vzorca (1.12). Tak isto výhodou je, že sa ani pri jednom nemusíme potýkať s otázkou pseudoefektívneho vzoru, nakoľko oba nájdú rovno efektívny vzor. Tieto efektívne vzory sa však nemusia zhodovať a ani nevieme nájsť nejaké jasné všeobecné vzťahy medzi nimi, čo je vidieť aj na praktickom príklade zo štvrtej kapitoly, napríklad v Tabuľke 4.12 alebo 4.13.

Hlavný prínos tejto práce vidíme v analyzovaní celkom nových modelov v DEA a v tom, že sa nám podarilo objaviť mnohé pozitívne vlastnosti týchto modelov. Do budúcnosti by sa ešte dala skúmať vlastnosť monotónnosti, superefektivity, prípadne vytvoriť tretí neštandardný model ako kombináciu týchto dvoch. Bol by to istý prechod medzi nimi – štruktúrou by sa podobal na Model B, avšak namiesto $m + s$ rôznych koeficientov σ a γ by sa použili len dva – jeden pre skrátenie vstupov a jeden pre predlžovanie výstupov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Bräutigam, K. R., Jörissen, J., Priefer, C.: *Technologické možnosti ako nasýtiť 10 miliárd ľudí*, STOA, Brusel, 2013, dostupné na internete (2013):
<http://www.europarl.europa.eu/stoa/>
- [2] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000
- [3] Dupačová, J., Plesník, J., Vlach, M.: *Lineárne programovanie*, Alfa, Bratislava, 1990
- [4] DEA zone: All you need to know about Data Envelopment Analysis (DEA), dostupné na internete (10.10.2011):
<http://www.deazone.com/>
- [5] Halická, M.: *DEA modely*, učebné texty, FMFI UK, Bratislava, 2015, dostupné na internete (10.5.2015):
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/text/TextDEA40.pdf>
- [6] Sekitani, K., Sueyoshi, T.: *Computational strategy for Russell measure in DEA: Second-order cone programming*, European Journal of Operational Research 180 (2007), 459-471, dostupné na internete (26.5.2006):
<http://www.sciencedirect.com/>

Príloha A: Zdrojové kódy naprogramovaných funkcií

Zdrojové kódy k funkciám z Matlabu.

CCR-I:

```
function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD, V3, H3]=CCR_I(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s,n);
HodP = zeros(s,n);
beqP = 1;
bP = zeros(n,1);
AP = [-X' Y'];
lbP = zeros(m+s,1);
FP = [zeros(n,m) Y'];
AeqP = [X' zeros(n,s)];
for j = 1:n
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP(j,:),AP,bP,AeqP(j,:),beqP,lbP,[]); end
HodP = -HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(1+n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [zeros(m,n); Y];
AeqD = [zeros(m,1) X eye(m) zeros(m,s);
zeros(s,1) Y zeros(s,m) -eye(s)];
lbD = zeros(1+n+m+s,1);
lbD(1,1) = - Inf;
FD = [1 zeros(1,n+m+s)];
for j = 1:n
AeqD(:,1)=[-X(:,j); zeros(s,1)];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(FD,[],[],AeqD,beqD(:,j),lbD,[]); end
%%% maximalizacia slackov:
V3 = zeros(n+m+s,n);
H3 = zeros(1,n);
F3 = [zeros(1,n) ones(1,m) ones(1,s)];
Aeq3 = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s)];
beq3 = zeros(m+s,n);
lb3 = zeros(n+s+m,1);
for j=1:n
beq3(:,j) = [HodD(j) * X(:,j);
Y(:,j)];
[V3(:,j), H3(1,j)] = linprog(-F3,[],[],Aeq3,beq3(:,j),lb3,[]); end
H3 = -H3; end
```

CCR-O:

```
function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD, V3, H3]=CCR_0(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s,n);
HodP = zeros(m,n);
```

```

beqP = 1;
bP = zeros(n,1);
AP = [-X' Y'];
lbP = zeros(m+s,1);
FP = [X' zeros(n,s)];
AeqP = [zeros(n,m) Y'];
for j = 1:n
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(FP(j,:),AP,bP,AeqP(j,:),beqP,lbP,[]); end
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(1+n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; zeros(s,n)];
AeqD = [zeros(m,1) X eye(m) zeros(m,s);
zeros(s,1) Y zeros(s,m) -eye(s)];
lbD = zeros(1+n+m+s,1);
lbD(1,1) = - Inf;
FD = [1 zeros(1,n+m+s)];
for j = 1:n
AeqD(:,1)=[zeros(m,1); -Y(:,j)];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(-FD,[],[],AeqD,beqD(:,j),lbD,[]); end
HodD = -HodD;
%%% maximalizacia slackov:
V3 = zeros(n+m+s,n);
H3 = zeros(1,n);
F3 = [zeros(1,n) ones(1,m) ones(1,s)];
Aeq3 = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s)];
beq3 = zeros(m+s,n);
lb3 = zeros(n+s+m,1);
for j=1:n
beq3(:,j) = [X(:,j);
HodD(j) * Y(:,j)];
[V3(:,j), H3(1,j)] = linprog(-F3,[],[],Aeq3,beq3(:,j),lb3,[]); end
H3 = -H3; end

```

BCC-I:

```

function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD, V3, H3]=BCC_I(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s+1,n);
HodP = zeros(m,n);
beqP = 1;
bP = zeros(n,1);
AP = [-X' Y' ones(n,1)];
lbP = zeros(m+s+1,1);
lbP(m+s+1,1) = -Inf;
FP = [zeros(n,m) Y' ones(n,1)];
AeqP = [X' zeros(n,s) zeros(n,1)];
for j = 1:n
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP(j,:),AP,bP,AeqP(j,:),beqP,lbP,[]); end
HodP = -HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(1+n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [zeros(m,n); Y; ones(1,n)];

```

```

AeqD = [zeros(m,1) X eye(m) zeros(m,s);
zeros(s,1) Y zeros(s,m) -eye(s);
zeros(1,1) ones(1,n) zeros(1,m+s)];
lbD = zeros(1+n+m+s,1);
lbD(1,1) = - Inf;
FD = [1 zeros(1,n+m+s)];
for j = 1:n
AeqD(:,1)=[-X(:,j); zeros(s,1); 0];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(FD, [], [], AeqD, beqD(:,j), lbD, []); end
%%% maximalizacia slackov:
V3 = zeros(n+m+s,n);
H3 = zeros(1,n);
F3 = [zeros(1,n) ones(1,m) ones(1,s)];
Aeq3 = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s);
ones(1,n) zeros(1,m+s)];
lb3 = zeros(n+s+m,1);
for j=1:n
beq3 = [HodD(1,j) * X(:,j);
Y(:,j);
1];
[V3(:,j), H3(1,j)] = linprog(-F3, [], [], Aeq3, beq3, lb3, []); end
H3 = -H3; end

```

BCC-O:

```

function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD, V3, H3]=BCC_0(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s+1,n);
HodP = zeros(m,n);
beqP = 1;
bP = zeros(n,1);
AP = [-X' Y' ones(n,1)];
lbP = zeros(m+s+1,1);
lbP(m+s+1,1) = -Inf;
FP = [X' zeros(n,s) -ones(n,1)];
AeqP = [zeros(n,m) Y' zeros(n,1)];
for j = 1:n
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(FP(j,:), AP, bP, AeqP(j,:), beqP, lbP, []); end
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(1+n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; zeros(s,n); ones(1,n)];
AeqD = [zeros(m,1) X eye(m) zeros(m,s);
zeros(s,1) Y zeros(s,m) -eye(s);
zeros(1,1) ones(1,n) zeros(1,m+s)];
lbD = zeros(1+n+m+s,1);
lbD(1,1) = - Inf;
FD = [1 zeros(1,n+m+s)];
for j = 1:n
AeqD(:,1)=[zeros(m,1); -Y(:,j); 0];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(-FD, [], [], AeqD, beqD(:,j), lbD, []); end
HodD = -HodD;
%%% maximalizacia slackov:
V3 = zeros(n+m+s,n);

```

```

H3 = zeros(1,n);
F3 = [zeros(1,n) ones(1,m) ones(1,s)];
Aeq3 = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s);
ones(1,n) zeros(1,m+s)];
beq3 = [zeros(m+s,n); ones(1,n)];
lb3 = zeros(n+s+m,1);
for j=1:n
beq3(:,j) = [X(:,j);
HodD(j) * Y(:,j);
1];
[V3(:,j), H3(1,j)] = linprog(-F3, [], [], Aeq3, beq3(:,j), lb3, []); end
H3 = -H3; end

```

Model A s CRS:

```

function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD, V3, H3]=Model_A_CRS(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s,n);
HodP = zeros(1,n);
bP = zeros(n,1);
beqP = 1;
AeqP = [X' Y'];
AP = [-X' Y'];
FP = [-X' Y'];
lbP = zeros(m+s,1);
for j = 1:n
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP(j,:), AP, bP, AeqP(j,:), beqP, lbP, []); end
HodP = -HodP;
HodP = ones(1,n) + HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(1+n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; -Y];
AeqD = [zeros(m,1) X eye(m) zeros(m,s);
zeros(s,1) -Y zeros(s,m) eye(s)];
FD = [-1 zeros(1,n+m+s)];
lbD = zeros(1+n+m+s,1);
lbD(1,1) = - Inf;
for j = 1:n
AeqD(:,1) = [X(:,j); Y(:,j)];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(FD, [], [], AeqD, beqD(:,j), lbD, []); end
HodD = ones(1,n) + HodD;
%%% maximalizacia slackov:
V3 = zeros(n+m+s,n);
H3 = zeros(1,n);
F3 = [zeros(1,n) ones(1,m) ones(1,s)];
Aeq3 = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s)];
beq3 = zeros(m+s,n);
lb3 = zeros(n+s+m,1);
for j=1:n
beq3(:,j) = [HodD(j) * X(:,j);
(2-HodD(j)) * Y(:,j)];
[V3(:,j), H3(1,j)] = linprog(-F3, [], [], Aeq3, beq3(:,j), lb3, []); end

```

```
H3 = -H3; end
```

Model A s VRS:

```
function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD, V3, H3]=Model_A_VRS(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s+1,n);
HodP = zeros(1,n);
bP = zeros(n,1);
beqP = 1;
AeqP = [X' Y' zeros(n,1)];
AP = [-X' Y' ones(n,1)];
FP = [-X' Y' ones(n,1)];
lbP = zeros(m+s+1,1);
lbP(m+s+1,1) = -Inf;
for j = 1:n
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP(j,:), AP, bP, AeqP(j,:), beqP, lbP, []); end
HodP = -HodP;
HodP = ones(1,n) + HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(1+n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; -Y; ones(1,n)];
AeqD = [zeros(m,1) X eye(m) zeros(m,s);
zeros(s,1) -Y zeros(s,m) eye(s);
zeros(1,1) ones(1,n) zeros(1,m+s)];
FD = [-1 zeros(1,n+m+s)];
lbD = zeros(1+n+m+s,1);
lbD(1,1) = - Inf;
for j = 1:n
AeqD(:,1) = [X(:,j); Y(:,j); 0];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(FD, [], [], AeqD, beqD(:,j), lbD, []); end
HodD = ones(1,n) + HodD;
%%% maximalizacia slackov:
V3 = zeros(n+m+s,n);
H3 = zeros(1,n);
F3 = [zeros(1,n) ones(1,m) ones(1,s)];
Aeq3 = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s);
ones(1,n) zeros(1,m+s)];
beq3 = zeros(m+s+1,n);
lb3 = zeros(n+s+m,1);
for j=1:n
beq3(:,j) = [HodD(j) * X(:,j);
(2-HodD(j)) * Y(:,j);
1];
[V3(:,j), H3(1,j)] = linprog(-F3, [], [], Aeq3, beq3(:,j), lb3, []); end
H3 = -H3; end
```

Aditívny model s CRS:

```
function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD]=AD_OM_CRs(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
```

```

VysledkyP = zeros(m+s,n);
HodP = zeros(1,n);
bP = zeros(1,n);
AP = [-X' Y'];
lbP = ones(m+s,1);
for j = 1:n
FP = [-(X(:,j))' (Y(:,j))'];
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP,AP,bP,[],[],lbP,[]); end
HodP = -HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; Y];
AeqD = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s)];
lbD = zeros(n+m+s,1);
FD = [zeros(1,n) ones(1,m+s)];
for j = 1:n
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(-FD,[],[],AeqD,beqD(:,j),lbD,[]); end end

```

Aditívny model s VRS:

```

function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD]=AD_OM_VRS(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s+1,n);
HodP = zeros(1,n);
bP = zeros(1,n);
AP = [-X' Y' ones(n,1)];
lbP = ones(m+s,1);
for j = 1:n
FP = [-(X(:,j))' (Y(:,j))' 1];
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP,AP,bP,[],[],lbP,[]); end
HodP = -HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; Y; ones(1,n)];
AeqD = [X eye(m) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -eye(s);
ones(1,n) zeros(1,m) zeros(1,s)];
lbD = zeros(n+m+s,1);
FD = [zeros(1,n) ones(1,m+s)];
for j = 1:n
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(-FD,[],[],AeqD,beqD(:,j),lbD,[]); end end

```

Model B s CRS:

```

function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD] = Model_B_CRS(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s,n);
HodP = zeros(1,n);
bP = [zeros(n,1);
-(1/m)*ones(m,1)];

```

```

-(1/s)*ones(s,1)];
FP = [-X' Y']
for j = 1:n
AP = [-X' Y';
-diag(X(:,j)) zeros(m,s);
zeros(s,m) -diag(Y(:,j))]];
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP(j,:), AP, bP, [], [], [], []); end
HodP = -HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; Y];
FD = [-zeros(1,n) -(1/m)*ones(1,m) -(1/s)*ones(1,s)];
lbD = zeros(n+m+s,1);
for j = 1:n
AeqD = [X diag(X(:,j)) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -diag(Y(:,j))]];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(FD, [], [], AeqD, beqD(:,j), lbD, []); end end

```

Model B s VRS:

```

function [VysledkyP, HodP, VysledkyD, HodD] = Model_B_VRS(X,Y)
[m,n] = size(X); % n = pocet DMU, m = pocet vstupov
[s,n] = size(Y); % n = pocet DMU, s = pocet vystupov
%%% primarna uloha - MM:
VysledkyP = zeros(m+s+1,n);
HodP = zeros(1,n);
bP = [zeros(n,1);
-(1/m)*ones(m,1);
-(1/s)*ones(s,1)];
FP = [-X' Y' ones(n,1)]
for j = 1:n
AP = [-X' Y' ones(n,1);
-diag(X(:,j)) zeros(m,s) zeros(m,1);
zeros(s,m) -diag(Y(:,j)) zeros(s,1)];
[VysledkyP(:,j), HodP(1,j)] = linprog(-FP(j,:), AP, bP, [], [], [], []); end
HodP = -HodP;
%%% dualna uloha - OM:
VysledkyD = zeros(n+m+s,n);
HodD = zeros(1,n);
beqD = [X; Y; ones(1,n)];
FD = [-zeros(1,n) -(1/m)*ones(1,m) -(1/s)*ones(1,s)];
lbD = zeros(n+m+s,1);
AeqD = [ones(1,n) zeros(1,m+s)];
for j = 1:n
AeqD = [X diag(X(:,j)) zeros(m,s);
Y zeros(s,m) -diag(Y(:,j));
ones(1,n) zeros(1,m) zeros(1,s)];
[VysledkyD(:,j), HodD(1,j)] = linprog(FD, [], [], AeqD, beqD(:,j), lbD, []); end end

```


Príloha B: Japonské banky – výsledky výpočtov

CCR-I:

	θ	λ_1	λ_3	λ_4	λ_{16}	λ_{17}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,877	0	0	0,75	0	0	323,49	101,08	0	4 664,58
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0,728	0	0	0,51	0	0	41,23	78,70	0	23 167,98
6	0,985	0	0,27	0,53	0	0	135,86	47,83	0	0
7	0,908	0,27	0,13	0,40	0	0	0	26,60	0	0
8	0,600	0	0	0,25	0	0	80,90	21,53	0	17 604,29
9	0,790	0	0,23	0,31	0	0	89,65	31,42	0	0
10	0,707	0	0	0,05	0	0,32	0	39,30	0	1 570,61
11	0,998	0	0	0	0,34	0,68	0	31,17	250,85	0
12	0,634	0	0	0,10	0	0,32	0	47,10	0	5 989,13
13	0,871	0	0	0,08	0,18	0,65	0	5,33	0	0
14	0,849	0,01	0	0,14	0,43	0	0	21,04	0	0
15	0,708	0	0	0,10	0	0,41	0	53,08	0	14 124,32
16	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
18	0,902	0	0	0,02	0	1,07	0	68,87	0	6 653,55
19	0,917	0	0	0,03	0	1,20	0	14,33	0	6 668,21
20	0,743	0	0	0,02	0	0,78	0	46,93	0	5 655,95

Tabuľka B.1: Výsledky výpočtov s modelom CCR-I.

CCR-O:

	ψ	λ_1	λ_3	λ_4	λ_{16}	λ_{17}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1,141	0	0	0,86	0	0	369,04	115,31	0	5 321,39
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	1,373	0	0	0,70	0	0	56,62	108,07	0	31 814,97
6	1,016	0	0,27	0,53	0	0	137,97	48,58	0	0
7	1,102	0,30	0,14	0,45	0	0	0	29,31	0	0
8	1,666	0	0	0,42	0	0	134,79	35,88	0	29 332,37
9	1,265	0	0,29	0,39	0	0	113,44	39,75	0	0
10	1,414	0	0	0,07	0	0,45	0	55,59	0	2 221,60
11	1,002	0	0	0	0,34	0,68	0	31,23	251,33	0
12	1,579	0	0	0,15	0	0,51	0	74,35	0	9 454,01
13	1,148	0	0	0,09	0,20	0,75	0	6,11	0	0
14	1,177	0,01	0	0,17	0,51	0	0	24,77	0	0
15	1,412	0	0	0,13	0	0,57	0	74,97	0	19 949,39
16	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
18	1,108	0	0	0,03	0	1,18	0	76,32	0	7 373,47
19	1,091	0	0	0,03	0	1,30	0	15,63	0	7 272,32
20	1,346	0	0	0,03	0	1,04	0	63,14	0	7 610,59

Tabuľka B.2: Výsledky výpočtov s modelom CCR-O.

Model A:

	$1 - \delta$	λ_1	λ_3	λ_4	λ_{16}	λ_{17}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,934	0	0	0,80	0	0	344,77	107,73	0	4 971,38
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0,843	0	0	0,59	0	0	47,72	91,07	0	26 811,53
6	0,992	0	0,27	0,53	0	0	136,91	48,20	0	0
7	0,952	0,29	0,13	0,42	0	0	0	27,89	0	0
8	0,750	0	0	0,32	0	0	101,11	26,91	0	22 003,08
9	0,883	0	0,26	0,35	0	0	100,15	35,09	0	0
10	0,828	0	0	0,06	0	0,37	0	46,05	0	1 840,23
11	0,999	0	0	0	0,34	0,68	0	31,20	251,09	0
12	0,776	0	0	0,12	0	0,39	0	57,67	0	7 332,87
13	0,931	0	0	0,08	0,19	0,70	0	5,69	0	0
14	0,919	0,01	0	0,15	0,46	0	0	22,75	0	0
15	0,829	0	0	0,11	0	0,47	0	62,15	0	16 538,94
16	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
18	0,949	0	0	0,02	0	1,12	0	72,41	0	6 995,04
19	0,957	0	0	0,03	0	1,25	0	14,96	0	6 957,18
20	0,853	0	0	0,02	0	0,89	0	53,84	0	6 489,28

Tabuľka B.3: Výsledky výpočtov s Modelom A.

BCC-I:

	θ	λ_1	λ_3	λ_4	λ_6	λ_{10}	λ_{11}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{19}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y	s_2^y
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,897	0	0	0,73	0	0,27	0	0	0	0	343,49	81,94	0	3 206,91	0
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,779	0	0	0,46	0	0,54	0	0	0	0	68,57	41,50	0	20 280,91	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,910	0,09	0,25	0,41	0	0	0	0,25	0	0	0	5,14	0	0	0
8	0,829	0	0	0,17	0	0	0	0	0,83	0	226,58	0	672,83	7 633,93	0
9	0,852	0	0,29	0,23	0	0,25	0	0	0,24	0	115,01	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,805	0	0	0,05	0	0,95	0	0	0	0	1,78	5,90	0	4 739,08	0
13	0,902	0	0,01	0,06	0	0,05	0	0,18	0,70	0	0	0	0	0	0
14	0,961	0	0,07	0,06	0	0,16	0	0,41	0,30	0	0	0	0	0	0
15	0,858	0	0	0,05	0	0,82	0	0	0,12	0	0	18,57	0	13 095,33	0
16	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18	0,940	0	0	0,01	0	0	0	0	0,58	0,41	0	65,37	0	3 914,62	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	0,814	0	0	0	0	0,26	0	0	0,73	0	0	36,71	0	4 761,67	0

Tabuľka B.4: Výsledky výpočtov s modelom BCC-I.

BCC-O:

	$\frac{1}{\psi}$	λ_1	λ_3	λ_4	λ_6	λ_{10}	λ_{11}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{19}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y	s_2^y
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,888	0	0	0,83	0	0,17	0	0	0	0	376,68	102,01	0	4 352,38	0
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,753	0	0	0,64	0	0,36	0	0	0	0	72,83	79,85	0	28 843,30	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,909	0,19	0,21	0,45	0	0	0	0,15	0	0	0	16,64	0	0	0
8	0,687	0	0	0,30	0	0	0	0	0,70	0	209,42	0	71,15	17 204,16	0
9	0,824	0	0,21	0,17	0,32	0,30	0	0	0	0	77,73	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,723	0	0	0,10	0	0,71	0	0	0,19	0	0	34,61	0	7 533,00	0
13	0,879	0	0	0,08	0	0	0	0,23	0,59	0,10	0	3,64	0	0	0
14	0,943	0	0,06	0,08	0	0,24	0	0,45	0,17	0	0	0	0	0	0
15	0,797	0	0	0,09	0	0,61	0	0	0,30	0	0	40,87	0	16 951,21	0
16	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18	0,958	0	0	0,01	0	0	0	0	0,37	0,62	0	66,56	0	2 768,45	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	0,760	0	0	0,02	0	0	0	0	0,76	0,22	0	59,76	0	6 014,49	0

Tabuľka B.5: Výsledky výpočtov s modelom BCC-I.

Model A s VRS:

	$1 - \delta$	λ_1	λ_3	λ_4	λ_6	λ_{10}	λ_{11}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{19}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y	s_2^y
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,943	0	0	0,78	0	0,22	0	0	0	0	358,38	90,94	0	3 720,90	0
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,868	0	0	0,54	0	0,46	0	0	0	0	70,29	56,97	0	23 735,01	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,952	0,14	0,24	0,43	0	0	0	0,20	0	0	0	10,59	0	0	0
8	0,876	0	0	0,21	0	0	0	0	0,79	0	221,91	0,00	509,15	10 237,36	0
9	0,912	0	0,28	0,27	0,02	0,44	0	0	0	0	112,94	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,870	0	0	0,06	0	0,89	0	0	0,04	0	0	15,04	0	5 827,25	0
13	0,937	0	0	0,08	0	0,06	0	0,20	0,67	0	0	2,28	0	0	0
14	0,976	0	0,07	0,07	0	0,19	0	0,42	0,25	0	0	0	0	0	0
15	0,909	0	0	0,07	0	0,75	0	0	0,19	0	0	26,55	0	14 476,00	0
16	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18	0,975	0	0	0,01	0	0	0	0	0,46	0,53	0	66,06	0	3 254,69	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	0,873	0	0	0,02	0	0,13	0	0	0,85	0	0	47,75	0	5 924,47	0

Tabuľka B.6: Výsledky výpočtov s Modelom A s VRS.

Aditívny model:

	Hodnota	λ_1	λ_3	λ_4	λ_{16}	λ_{17}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y	s_1^y
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-74 602,79	0	0,86	0,18	0	0	0	84,60	0	73 335,23	1 182,96
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	-78 833,62	0	0,13	0,59	0	0	0	103,35	0	71 673,57	7 056,69
6	-9 484,43	0	0,40	0,44	0	0	84,20	44,10	0	9 356,13	0
7	-21 865,72	0	0,24	0,64	0	0	0	35,23	0	17 281,55	4 548,94
8	-76 590,32	0	0,32	0,17	0	0	0	24,66	0	71 005,68	5 559,98
9	-49 569,71	0	0,56	0,18	0	0	0	30,31	0	45 545,40	3 994,00
10	-15 310,14	0	0	0,04	0,41	0	0	42,12	0	14 166,18	1 101,83
11	-350,823	0	0	0	0,34	0,67	0	31,53	259,10	60,19	0
12	-29 882,09	0	0	0,11	0,46	0	0	59,05	0	27 234,07	2 588,97
13	-14 140,38	0	0	0,05	0,77	0	0	0	280,72	13 542,90	316,75
14	-10 736,91	0	0	0,18	0,49	0	0	26,40	0	9 049,24	1 661,28
15	-34 584,14	0	0	0,09	0,52	0	0	57,71	0	32 678,48	1 847,94
16	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
18	-14 649,65	0	0	0	0,38	0,64	0	76,03	273,28	14 300,34	0
19	-15 337,53	0	0	0	0,43	0,73	0	11,18	218,05	15 108,30	0
20	-19 134,35	0	0	0	0,55	0,04	0	85,57	900,16	18 148,62	0

Tabuľka B.7: Výsledky výpočtov s aditívnym modelom.

Model B:

	Hodnota	λ_1	λ_3	λ_4	λ_{16}	λ_{17}	σ_1	σ_2	σ_3	γ_1	γ_2
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,364	0	0	0,86	0	0	0,35	0,26	0	0,17	0,14
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	-0,683	0	0	0,70	0	0	0,09	0,29	0	0,73	0,37
6	-0,124	0	0,22	0,57	0	0	0,19	0,15	0	0	0,02
7	-0,198	0	0	0,83	0	0	0,14	0,12	0	0,03	0,20
8	-1,265	0	0,32	0,17	0	0	0	0,13	0	1,89	0,56
9	-0,397	0	0	0,62	0	0	0,33	0,18	0	0,14	0,32
10	-0,827	0	0	0,04	0,41	0	0	0,31	0	1,11	0,34
11	-0,085	0	0	0	0,34	0,67	0	0,18	0,07	0	0
12	-1,135	0	0	0,11	0,46	0	0	0,31	0	1,54	0,52
13	-0,277	0	0	0,07	0,61	0	0	0,14	0,15	0,36	0
14	-0,296	0	0	0,24	0	0	0	0,53	0,23	0,01	0,08
15	-1,878	0	0	0,09	0,52	0	0	0,30	0	3,21	0,35
16	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
18	-1,078	0	0	0	0,38	0,64	0	0,34	0,07	1,88	0
19	-0,814	0	0	0	0,43	0,73	0	0,06	0,05	1,55	0
20	-1,807	0	0	0	0,55	0,04	0	0,44	0,26	3,15	0

Tabuľka B.8: Výsledky výpočtov s Modelom B.

Aditívny model s VRS:

	Hodnota	λ_1	λ_3	λ_4	λ_6	λ_{10}	λ_{11}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{19}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y	s_2^y
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-63 993,76	0	0,65	0,35	0	0	0	0	0	0	93,04	92,34	0	61 865,63	1 942,75
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-77 273,92	0	0,22	0,44	0	0	0	0,34	0	0	0	68,67	0	71 723,65	5 481,60
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-21 180,27	0	0,28	0,57	0	0	0	0,15	0	0	0	19,99	0	17 303,56	3 856,72
8	-53 052,25	0	0,37	0	0	0	0	0	0,63	0	65,29	0	514,37	50 017,97	2 454,62
9	-47 376,90	0	0,64	0,04	0	0	0	0,27	0,05	0	0	0	0	44 800,87	2 576,03
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	-21 654,10	0	0,05	0	0	0,48	0	0,47	0	0	0	18,41	0	20 505,08	1 130,60
13	-8 418,72	0	0	0,07	0	0	0	0,40	0,53	0	0	0	6,67	7 567,47	844,58
14	-4 763,05	0	0,09	0,04	0	0	0	0,56	0,31	0	0	0	0	4 541,09	221,95
15	-26 629,40	0	0,04	0	0	0,47	0	0,49	0	0	0	21,78	0	26 008,28	599,34
16	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18	-13 048,33	0	0	0	0	0	0,86	0,05	0	0,08	0	47,84	30,94	12 969,55	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	-16 859,37	0	0	0	0	0	0	0,37	0,62	0	0	51,25	12,37	15 748,87	1 046,87

Tabuľka B.9: Výsledky výpočtov s aditívnym modelom s VRS.

Model B s VRS:

	Hodnota	λ_1	λ_3	λ_4	λ_6	λ_{10}	λ_{11}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{19}	s_1^x	s_2^x	s_3^x	s_1^y	s_2^y
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,340	0	0	0,83	0	0	0	0	0,17	0	0,37	0,24	0	0,14	0,12
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-0,605	0	0,22	0,44	0	0	0	0,34	0	0	0	0,19	0	0,81	0,27
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-0,169	0	0,02	0,78	0	0	0	0	0,20	0	0,15	0,09	0	0	0,17
8	-0,858	0	0,37	0	0	0	0	0	0,63	0	0,14	0	0,07	1,33	0,25
9	-0,303	0	0	0,54	0	0	0	0	0,46	0	0,39	0,09	0	0,03	0,25
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	-0,744	0	0	0	0	0,23	0	0,77	0	0	0,34	0,06	0	1,05	0,17
13	-0,191	0	0	0,07	0	0	0	0,40	0,53	0	0	0	0	0,25	0,13
14	-0,093	0	0,01	0,09	0	0	0	0,60	0,29	0	0,21	0	0	0	0,05
15	-1,370	0	0,04	0	0	0,47	0	0,49	0	0	0	0,11	0	2,55	0,11
16	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18	-0,927	0	0	0	0	0	0,86	0,05	0	0,08	0	0,22	0,01	1,71	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	-1,594	0	0	0	0	0	0	0,37	0,62	0	0	0,26	0	2,73	0,28

Tabuľka B.10: Výsledky výpočtov s Modelom B s VRS.