Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Optimálne riadenie II

Spojité úlohy s aplikáciami do ekonómie a financií

Učebný text

Margaréta Halická
Pavol Jurča

Bratislava, 2015, ostatná modifikácia: september 2025

Autori: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc., Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.
Názov: Optimálne riadenie II
Podnázov: Spojité úlohy s aplikáciami do ekonómie a financií
Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK
Rok vydania: 2025
Miesto vydania: Bratislava
Vydanie: prvé
Počet strán (číslované): 180
http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/optimalne_riadenie_2.pdf
ISBN 978-80-8147-162-9
EAN 9788081471629

Obsah

. 9

Predhovor **1**

I Úvod **3**

1 Formulácia úloh a všeobecná schéma **4**

1.1 Motivačné príklady 4
1.2 Formulácia všeobecnej úlohy optimálneho riadenia 6
1.3 Klasifikácia úloh optimálneho riadenia 8
1.4 Späť k príkladom 10
1.5 Súvis úloh optimálneho riadenia a variačného počtu 11
1.6 Úlohy na samostatné riešenie 12

II Úlohy variačného počtu **15**

2 Základná úloha variačného počtu. Eulerova rovnica **16**

2.1 Formulácia základnej úlohy 16
2.2 Odvodenie nutných podmienok optimality 18
2.3 Riešenie úloh 20
2.4 Úlohy na samostatné riešenie 23

3 Modifikácie základnej úlohy variačného počtu **26**

3.1 Úloha s pevným časom a voľným koncom 26
3.2 Úloha s voľným časom a voľným koncom 27
3.3 Úloha s voľným časom a pevným koncom 28
3.4 Úloha s voľným časom a čiastočne pevným koncom 29
3.5 Úlohy na samostatné riešenie 30

4 Niektoré špeciálne úlohy variačného počtu **33**
4.1 Viacrozmerné úlohy 33
4.2 Úlohy vyššieho rádu 33
4.3 Bolzova úloha 34
4.4 Izoperimetrická úloha 34
4.5 Úlohy na samostatné riešenie 35

III Úlohy optimálneho riadenia s konečným časom **36**

5 Autonómna úloha s voľným časom. Pontrjaginov princíp maxima (PPM) **37**
5.1 Formulácia autonómnej úlohy s voľným časom 37
5.2 Formulácia PPM 38
5.3 Poznámky 40
5.4 Riešenie úloh 41
5.5 Úlohy na samostatné riešenie 45

6 Neautonómna úloha. Úloha s pevným časom **48**
6.1 Formulácia úlohy 48
6.2 Prevedenie úlohy na autonómnu úlohu s voľným časom 49
6.3 Odvodenie nutných podmienkok optimality 50
6.4 Formulácia nutných podmienok 51
6.5 Riešenie úloh 52
6.6 Úlohy na samostatné riešenie 54

7 Rozšírenia k Pontrjaginovmu princípu maxima **58**
7.1 Pontrjaginov princíp maxima pre diskontovanú úlohu 58
7.2 Súvis Pontrjaginovho princípu maxima a Eulerovej rovnice 61
7.3 Poznámky o ψ^0 62
7.4 PPM a kvalitatívna analýza 63
7.5 Úloha o plánovaní výroby 65
7.6 Úlohy na samostatné riešenie 69

8 PPM ako prostriedok na numerické riešenie úloh **70**
8.1 Okrajová úloha 70
8.2 Numerické riešenie okrajovej úlohy 72
8.3 Úlohy na samostatné riešenie 75

9 Ramseyho model a analýza fázového portrétu. **78**
9.1 Formulácia Ramseyho modelu na konečnom časovom horizonte 78
9.2 Okrajová úloha pre Ramseyho model 79

9.3 Analýza fázového potrétu pre Ramseyho model 80
9.4 Numerické riešenie Ramseyho modelu 82
9.5 Všeobecnejší pohľad na analýzu fázového portrétu 84
9.6 Úlohy na samostatné riešenie 87

10 Bolzova úloha 89
10.1 Formulácia Bolzovej úlohy 89
10.2 Odvodenie PPM pre Bolzovu úlohu 90
10.3 Riešenie úloh 91
10.4 Úlohy na samostatné riešenie 95

11 Ekonomická interpretácia PPM. Dynamické programovanie 99
11.1 Odvodenie RDP 100
11.2 Vzťah RDP a PPM 102
11.3 Ekonomická interpretácia PPM 103
11.4 Úlohy na samostatné riešenie 105

12 Úlohy s ohraničeniami na stavové premenné 107
12.1 Ohraničenia typu nerovnosti na cieľový stav 107
12.2 Ohraničenia na stavové a riadiace premenné 108
12.3 Ohraničenia len na stavové premenné 109
12.4 Úloha o optimálnej spotrebe s podmienkou typu nerovnosti na koncový stav 110
12.5 Úlohy na samostatné riešenie 112

13 Optimalita riadení vyhovujúcich PPM. Existencia optimálnych riadení 114
13.1 Existencia optimálnych riadení 114
13.2 Postačujúcosť PPM 115
13.3 Úlohy na samostatné riešenie 117

14 Lineárna úloha najrýchlejšieho prechodu 118
14.1 Formulácia lineárnej úlohy najrýchlejšieho prechodu 118
14.2 PPM pre lineárnu úlohu najrýchlejšieho prechodu 119
14.3 Úloha na syntézu optimálneho riadenia 120
14.4 Normalita 123
14.5 Mantinelovosť a jednoznačnosť 125
14.6 Úlohy na samostatné riešenie 126

15 Singulárne optimálne riadenia 128
15.1 Príklad úlohy na singulárne riadenie 128
15.2 Definícia singulárneho riadenia 131

15.3 Nutné podmienky optimality vyššieho rádu 132
15.4 Syntéza optimálneho riadenia pre Solowov model 133
15.5 Úlohy na samostatné riešenie 137

IV Úlohy optimálneho riadenia s nekonečným časom 140

16 PPM pre úlohu na nekonečnom časovom horizonte 141
16.1 Formulácia štandardnej úlohy 141
16.2 Pontrjaginov princíp maxima 141
16.3 Poznámka o podmienke transverzality 145
16.4 Postačujúce podmienky optimality 146
16.5 Riešenie úloh 147
16.6 Úlohy na samostatné riešenie 149

17 Nutné podmienky pre autonómnu úlohu s diskontným faktorom 150
17.1 Úlohy s diskontným faktorom 150
17.2 Limitná podmienka Hamiltoniánu 150
17.3 Riešenie úloh 154
17.4 Ramseyho model na nekonečnom horizonte 158
17.5 Úlohy na samostatné riešenie 160

V Riešenia úloh a prílohy 162

Riešenia úloh 163

Príloha A: Zhrnutie podmienok Pontriaginovho princípu maxima pre všeobecnú úlohu na konečnom časovom horizonte 173

Príloha B: Elementy z teórie diferenciálnych rovníc 175

Príloha C: Diplomové práce z optimálneho riadenia 177

Literatúra 179

Predhovor

Tento text je študijnou pomôckou k predmetom Optimálne riadenie II a Seminár z optimálneho riadenia, ktoré sa vyučujú v rámci magisterského štúdia programu Ekonomicko-finančná matematika a modelovanie. Obsahom je predovšetkým spojitá teória optimálneho riadenia so zameraním na aplikácie v ekonómii a financiách. Niektoré časti textu svojím rozsahom presahujú požiadavky osnov týchto predmetov. V týchto rozširujúcich častiach môže text pomôcť diplomantom ako aj študentom doktorandského štúdia v prípade ich hlbšieho záujmu o danú problematiku.

Text iba voľne nadväzuje na knihu [12], ktorá je odporúčanou literatúrou k predmetu Optimálne riadenie I a ktorá sa venuje diskrétnym úlohám optimálneho riadenia. Hoci sa v texte nachádzajú odvolávky na analógie s diskrétnou teóriou, z veľkej časti sa dá výklad sledovať aj bez znalosti diskrétnej teórie optimálneho riadenia. Nevyhnutnou prerekvizitou na zvládnutie problematiky spojitej teórie optimálneho riadenia je ovládanie základov diferenciálnych rovníc.

Podkladom a motiváciou pre predkladaný text boli predovšetkým niekoľkoročné skúsenosti autorov z vedenia prednášok a cvičení z optimálneho riadenia, z vedenia početných študentských záverečných prác, ale aj z individuálneho štúdia problematiky a vlastnej vedecko výskumnej činnosti v tejto oblasti.

Problematika spojitých úloh optimálneho riadenia je veľmi dobre spracovaná vo svetovej knižnej literatúre. Väčšina prác je však určená matematicky vysoko erudovanému čitateľovi a aplikácie sa obmedzujú spravidla na niekoľko fyzikálnych príkladov. Medzi takéto práce môžeme zaradiť aj jedinú knihu v slovenskom jazyku z tejto oblasti [3]. Takéto zameranie existujúcej literatúry je prirodzené, keď zvážime obtiažnosť a matematickú hĺbku základných výsledkov spojitej teórie, ako aj motivácie pre jej vznik v počiatkoch rozvoja kozmickej techniky.

V súčasnosti spojitá teória optimálneho riadenia nachádza svoje uplatnenie nielen vo fyzike pri riadení kozmických objektov, v elektrotechnike, robotike, chemickom inžinierstve, biológii, v rozličných oblastiach finančnej matematiky, ale aj v ekonómii, napríklad pri modelovaní úloh ekonomického rastu. Využitie optimálneho riadenia v ekonomickom modelovaní má pritom svoje špecifiká. Ekonomické modely sa často uvažujú na nekonečnom časovom horizonte a do formulácií vstupujú prirodzené ohraničenia na nezápornosť mnohých ekonomických veličín. Potreba riešiť takéto úlohy spätne podnietila rozvoj niektorých oblastí teórie optimálneho riadenia, ktoré predtým neboli v centre záujmu. Tieto špecifiká, ako aj potreba vyložiť teóriu optimálneho riadenia

matematicky menej erudovanym odborníkom zaujímajúcich sa o ekonomické aplikácie, viedli odborníkov k napísaniu niekoľkých kníh a učebníc o aplikáciách optimálneho riadenia v ekonómii, z ktorých spomenieme [25, 7, 26, 20, 19, 16]. Obsahujú veľa aplikácií a vyznačujú sa rozličnou mierou zjednodušovania a dodržovania matematickej korektnosti. Z týchto kníh, najmä vzhľadom na matematicky korektný výklad, odporúčame [25, 7].

Tento učebný text v čase svojho vzniku v roku 2015 vychádzal predovšetkým z knihy [3]. Postupne sa však, najmä pod vplyvom kníh [25, 7, 26, 19], množstva časopiseckých článkov, vedených záverečných prác (pozri Príloha C) a vlastného výskumu ([9, 17, 18, 4, 10, 11, 5]) upravoval tak, aby viacej vyhovoval potrebám, možnostiam a schopnostiam študentov EFM. V súčastnosti predstavuje, podľa mienky autorov, zdravý kompromis medzi jednoduchosťou výkladu a matematickou presnosťou. Študent sa v ňom oboznámi so základnými výsledkami spojitej teórie optimálneho riadenia, ktoré ho pripravia na štúdium pokročilej makroekonómie, teórie rastu a na štúdium odborných článkov z tejto oblasti. Text oboznamuje študenta s nutnými podmienkami optimality ako aj s ďalšími poznatkami, ktoré sa využívajú pri dynamickom modelovaní v ekonómii. Vedie ho ku schopnosti modifikovať tieto výsledky pre také obmeny základných úloh, s ktorými sa možno najčastejšie stretnúť v ekonomických aplikáciach. Na veľkom množstve riešených úloh učí používať nutné podmienky na analytické, prípadne numerické riešenie úloh, ale aj na získavanie kvalitatívnych výsledkov. Podáva nástroje umožňujúce ekonomickú interpretáciu získaných výsledkov. Okrem veľkého množstva riešených úloh obsahuje príklady na precvičovanie a overovanie získaných vedomostí a schopností.

Autori ďakujú Soni Kilianovej a Jane Szolgayovej za početné pripomienky, ktoré umožnili odstrániť niektoré chyby a nedostatky v texte.

Časť I

Úvod

Kapitola 1

Formulácia úloh a všeobecná schéma

1.1 Motivačné príklady

Začneme s fyzikálnym príkladom, ktorý je modelovým príkladom pre úlohy optimálneho riadenia. Bol podrobne analyzovaný už v prvých prácach z optimálneho riadenia (napr. [22, 6, 3]), a možno ho nájsť v každej učebnici optimálneho riadenia.

Príklad 1.1. Najrýchlejšie premiestnenie.

Úlohou je čo najrýchlejšie premiestniť vozík z jedného bodu do druhého. Premiestňujeme po rovných koľajničkách pomocou vonkajšej ohraničenej sily. Jej kladné hodnoty znamenajú roztláčanie vozíka a záporné zase brzdenie. Odpor prostredia zanedbávame. K matematickej formulácii tejto úlohy potrebujeme zaviesť niektoré označenia a upresnenia.

Označíme $[0, T]$ obdobie trvania celého procesu, čo znamená, že T minimalizujeme a $t \in [0, T]$. V smere koľajničiek zavedieme dĺžkovú súradnicu y a teda $y(t)$ označuje polohu vozíka v čase t. Predpokladáme, že na začiatku procesu sa vozík nachádza v kľude v počiatku súradnej sústavy, to znamená $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 0$. Chceme, aby na konci celého procesu bol vozík v bode y_1 a aby tam zastal, t.j. predpokladáme, že $y(T) = y_1$ a $\dot{y}(T) = 0$. Vonkajšiu silu, ktorou v čase t pôsobíme na vozík označíme $u(t)$. Predpokladáme, že táto sila môže nadobúdať hodnoty v intervale $[-\alpha, \beta]$, α, $\beta > 0$. Pohyb vozíka popíšeme pomocou Newtonovho zákona, z ktorého vyplýva, že dráha $y(t)$, ktorú vozík prešiel za čas t, bude riešením diferenciálnej rovnice

$$m\ddot{y}(t) = u(t), \tag{1.1}$$

kde m je hmotnosť vozíka. Pri tomto značení a predpoklade $m = 1$ môžeme úlohu sformulovať nasledovne:

Úlohou je nájsť čas T a program pôsobenia sily $u(t)$ na vozík tak, aby

$$\begin{aligned} \min_{T,u(.)} \quad & T, \\ \text{s.t.} \quad & \ddot{y}(t) = u(t), \\ & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \\ & y(T) = y_1, \quad \dot{y}(T) = 0, \\ & u(t) \in [-\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Intuitívne je jasné, aký má mať $u(t)$ tvar: najprv treba vozík maximálnou silou ťahať ($u(t) = \beta$) až dovtedy, kým ho ešte stačíme do bodu y_1 zbrzdiť, potom ho treba maximálnou silou brzdiť ($u(t) = -\alpha$). Neskôr uvidíme, že tento výsledok možno exaktne dostať z princípu maxima.

Nasledujúca úloha je veľmi zjednodušenou verziou modelov ekonomického rastu.

Príklad 1.2. Optimálna spotreba. Úlohou je maximalizovať diskontovaný úžitok zo spotreby za dané obdobie pri daných hodnotách počiatočného a koncového kapitálu a pri predpoklade že držaný kapitál sa spojite zhodnocuje konštantnou úrokovou mierou.

K matematickej formulácii úlohy zavedieme nasledovné označenie a upresnenia formulácie úlohy. Uvažujeme čas $t \in [0, T]$, kde T je dané. Symbolom $k(t)$ označíme hodnotu držaného kapitálu v čase t; $ik(t)$ predstavuje dôchodok z kapitálu v čase t, kde i je úroková miera. Počiatočnú hodnotu kapitálu označíme k_0 a teda $k(0) = k_0$, predpísanú koncovú hodnotu kapitálu označíme k_T a teda $k(T) = k_T$. Spotrebu v čase t označíme $c(t)$ a diskontovaný úžitok z jej spotreby $e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))$, kde r je mierkou netrpezlivosti spotrebovávať a U je daná úžitková funkcia definovaná len pre $c \geq 0$. Vývoj kapitálu v čase možno popísať diferenciálnou rovnicou $\dot{k}(t) = ik(t) - c(t),\ t \in [0, T]$.

V zavedenom označení môžeme teda formulovať: Úlohou je nájsť tok spotreby $c(.)$ tak, aby

$$\begin{aligned} & \max_{c(.)} \int_0^T e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))\ dt, \\ & \dot{k}(t) = ik(t) - c(t),\ t \in [0, T], \\ & k(0) = k_0, \\ & k(T) = k_T. \end{aligned}$$

Budeme vidieť, že obidve tieto úlohy spadajú do všeobecnej schémy úloh optimálneho riadenia, ktoré sformulujeme v nasledujúcej časti.

1.2 Formulácia všeobecnej úlohy optimálneho riadenia

Uvažujme objekt, ktorého správanie budeme pozorovať v spojitom čase $t \in [t_0, T]$. Okamžitý vstup v čase t do tohoto objektu je určený veličinou $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a okamžitý stav veličinou $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Správanie objektu v meniacom sa čase je popísané *diferenciálnou rovnicou*,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

kde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je daná funkcia. Jednotlivé vstupy a stavy sú ohraničené ďalšími podmienkami. Takými podmienkami sú: *počiatočná podmienka* $x(t_0) = x_0$, kde x_0 je dané z $\mathbb{R}^n$; *koncová podmienka*, alebo podmienka na stavovú premennú v koncovom čase $x(T) \in C$, kde C je danou podmnožinou $\mathbb{R}^n$; *ohraničenia na riadenie* $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, T]$, kde $U(t)$ je v každom čase t danou podmnožinou $\mathbb{R}^m$; *ohraničenia na stavovú premennú* $x(t) \in X(t)$, $t \in [t_0, T]$, kde $X(t)$ je v každom čase t danou podmnožinou $\mathbb{R}^n$. „Kvalitu“ jednotlivých vstupov v priebehu časového horizontu $[t_0, T]$ môžeme merať *účelovou funkciou*

$$J := \int_{t_0}^{T} f^0(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(T)) \tag{1.2}$$

kde $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sú dané funkcie. V snahe maximalizovať túto účelovú funkciu, môžeme dáta úlohy súhrne zapísať do nasledovnej všeobecnej schémy:

$$\begin{aligned}
\text{maximalizovať} \quad & J(u(.), x(.), T) := \int_{t_0}^{T} f^0(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(T)) && (1.3)\\
\text{pri podmienkach} \quad & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [t_0, T], && (1.4)\\
& x(t_0) = x_0, && (1.5)\\
& x(T) \in C, && (1.6)\\
& u(t) \in U(t), \quad \forall\, t \in [t_0, T] && (1.7)\\
& x(t) \in X(t), \quad \forall\, t \in [t_0, T]. && (1.8)
\end{aligned}$$

Vidíme, že sme dostali podobnú schému ako v [12] pre diskrétne úlohy. Rozdiel je len v tom, že diskrétny čas sme nahradili spojitým, sumu v účelovej funkcii integrálom a diferenčnú rovnicu diferenciálnou. Ak by sme v tejto analógii pokračovali, tak by sme mohli riadením nazvať ľubovoľnú funkciu $u(.)$, ktorá každému času $t \in [t_0, T]$ priradí hodnotu vstupu $u(t)$ do systému, a jeho odozvou príslušné riešenie $x(.)$ diferenciálnej rovnice (1.4) a počiatočnej podmienky (1.5). Čo však rozumieť pod riešením diferenciálnej rovnice (1.4) v prípade, že do jej pravej strany dosadíme ľubovoľnú funkciu $u(.)$? Vidíme, že v prípade spojitých úloh budeme musieť obmedziť pojem riadenia na funkcie z určitej triedy. Zároveň však túto triedu nesmieme zvoliť príliš úzku, aby sme v nej vedeli riešiť napríklad aj úlohy z predchádzajúceho odseku. Znamená to, že funkcie $u(.)$ musíme vyberať z takej triedy funkcií, aby boli splnené nasledovné podmienky:

(i) pre zvolené $u(.)$ z danej triedy existuje $x(.)$ riešenie diferenciálnej rovnice (1.4) s počiatočnou podmienkou (1.5) aspoň na nejakom intervale $(t_o, t_o + \epsilon)$, $\epsilon > 0$;

(ii) riešenie $x(.)$ z bodu (i) je jednoznačne určené;

(iii) vo zvolenej triede funkcií vieme riešiť dostatočne širokú triedu ÚOR.

Zvoľme funkciu $u(.)$ a dosaďme ju do systému (1.4). Dostaneme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) = \tilde{f}(t, x(t)).$$

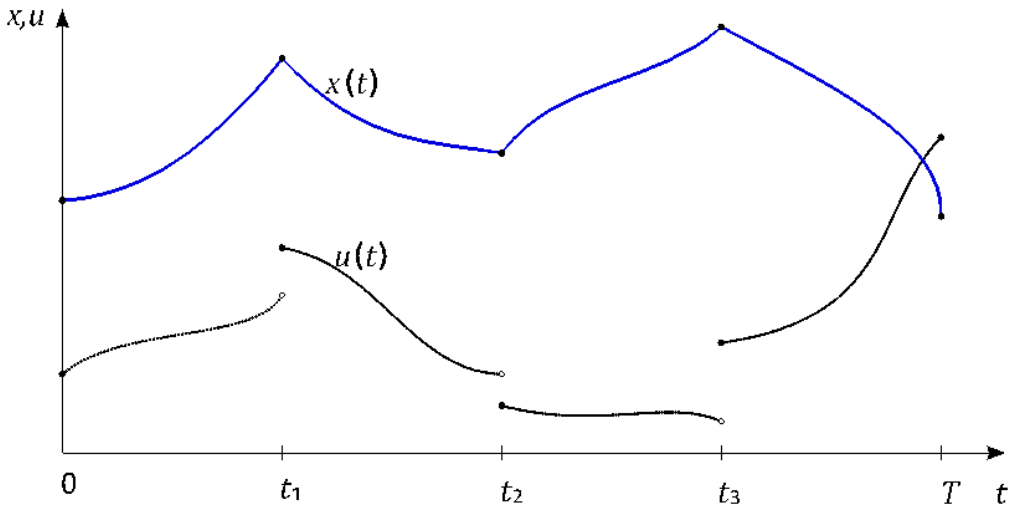
Z teórie diferenciálnych rovníc vieme, že ak $\tilde{f}$ je spojitá v t a spojite diferencovateľná v x, tak príslušná diferenciálna rovnica má vlastnosť lokálnej existencie a jednoznačnosti. To znamená, že v prípade, že funkcia f je spojitá v prvej a tretej premennej, t.j. v t a v u a spojite diferencovateľná v x, stačilo by žiadať, aby funkcie $u(.)$ boli spojité. Potom by pre každé takéto riadenie príslušná zložená funkcia $\tilde{f}$ spĺňala predpoklady zabezpečujúce splnenie našich podmienok (i) a (ii). Bola by však takáto trieda riadení dostatočne široká, aby spĺňala aj podmienku (iii)? Pozrime sa na úlohu najrýchlejšieho premiestnenia z Príkladu 1.1. Intuitívne je jasné, aké musí byť riešenie tejto úlohy: najprv musíme vozík maximálnou silou roztláčať a potom maximálnou silou brzdiť. Optimálnym riadením pre túto úlohu teda bude nespojité riadenie. Z tohoto príkladu je zrejmé, že triedu riadení musíme rozšíriť, ak v nej chceme zabezpečiť riešiteľnosť úloh typu Príkladu 1.1.

Vhodným rozšírením bude trieda po čiastkach spojitých[1] funkcií. Pre riadenia z takejto triedy tiež dostaneme splnenie podmienok (i) a (ii). Stačí iba aplikovať spomínanú teóriu diferenciálnych rovníc na každom z intervalov, kde je $u(.)$ spojité a príslušné riešenie $x(.)$ diferenciálnej rovnice „spojite nadpájať“. Príslušné riešenie $x(.)$ bude potom po čiastkach C^1 (viď Obr. 1.1).[2] Odteraz pod *riadeniami* budeme rozumieť po čiastkach spojité funkcie $[t_o, T] \to \mathbb{R}^m$. Aby sme sa vyhli nedorozumeniu, v každom bode nespojitosti budeme riadeniu prisudzovať ako hodnotu jeho limitu sprava a v pravom krajom bode intervalu definície limitu zľava. *Odozvou* $x(.)$ *na riadenie* $u(.)$ budeme rozumieť príslušné spojité riešenie $x(t) = x(t; x_0, u(t))$ rovnice (1.4) s počiatočnou podmienkou (1.5). Podotýkame, že odozva môže a nemusí byť definovaná na celom intervale $[t_0, T]$.

Pod *prípustným riadením* budeme rozumieť riadenie, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňa ohraničenia (1.6), (1.7) a (1.8), t.j. $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, T]$, príslušná odozva $x(.)$ je definovaná (existuje) na celom intervale $[t_0, T]$, pričom $x(t) \in X(t)$ $t \in [t_0, T]$ a

[1] Po čiastkach spojitá funkcia má konečný počet bodov nespojitosti a v týchto bodoch má konečné jednostranné limity

[2] Triedu po čiastkach spojitých riadení možno ďalej rozšíriť na triedu merateľných funkcií pri použití tzv. Carathéodoryho teórie diferenciálnych rovníc. Pritom niektoré výsledky teórie optimálneho riadenia (napr. vety o existencii optimálnych riadení) sa dajú dokázať iba v triede merateľných riadení. My však bohato vystačíme s riadeniami po čiastkach spojitými.



Obr. 1.1: Po čiastach spojité riadenie a spojité nadpájanie odozvy (ilustratívny príklad).

$x(T) \in C$. *Optimálne riadenie* je také prípustné riadenie, ktoré maximalizuje účelovú funkciu

$$J(u(.)) := \int_{t_0}^{T} f^0(t, x(t; x_0, u(.)), u(t))dt + \varphi(x(T; x_0, u(.)))$$

v triede všetkých prípustných riadení.

1.3 Klasifikácia úloh optimálneho riadenia

Zavedieme niektoré pojmy, ktoré umožnia bližšie charakterizovať konkrétne úlohy optimálneho riadenia (ÚOR).

(1) Všobecná schéma úlohy optimálneho riadenia (1.3–1.8) bola formulovaná ako *maximalizačná úloha*. Rovnako však možno formulovať aj *minimalizačné úlohy*, v ktorých sa účelová funkcia (1.3) minimalizuje. Všetky teoretické výsledky budú formulované pre maximalizačné úlohy.

(2) Počiatočná podmienka formulovaná vzťahom (2), v ktorom je t_0 a x_0 dané, je najčastejšie sa vyskytujúcou podmienkou. Teóriu optimálneho riadenia však možno aplikovať aj na úlohy so všeobecne zadanými počiatočnými podmienkami typu $x(t_0) \in P$, kde P môže byť zadané podobne ako cieľová množina C a prípadne aj t_0 je voľné (viď nasledujúce dva odstavce).

(3) Podľa intervalu, na ktorom uvažujeme celý proces, poznáme úlohy s (a) *pevným časom* (interval $[t_0, T]$ je vopred zadaný), (b) *voľným časom* (interval je konečný, ale nie je vopred zadaný) a (c) *nekonečným časovým horizontom* (intervalom je

$[t_0, \infty)$). Prípad (a) a (b) nazývame spoločne aj ako úlohy s *konečným časom.* V prípade (b) optimalizujeme aj vzhľadom na koncové T (pri pevne zadanom t_0). a optimalizačné kritérium označujeme $J(T, u(.))$. Riadeniami sú po čiastkach spojité funkcie definované na konečných, ale vo všeobecnosti ľubovoľných intervaloch typu $[t_0, T]$. V prípade úloh na nekonečnom časovom horizonte treba tiež modifikovať pojem riadenia, to však budeme robiť až v Časti IV.

(4) Podľa typu koncovej podmienky delíme úlohy na úlohy s *voľným koncom* ($C = \mathbb{R}^n$), úlohy s *pevným koncom* ($C = \{x_T\}$, kde $x_T \in \mathbb{R}^n$ je dané). Častokrát býva množina C zadaná ohraničeniami typu rovnosti $C = \{x \mid g(x) = 0\}$, kde g je zadaná funkcia, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$. Takéto úlohy sa niekedy nazývajú úlohami s *čiastočne voľným koncom.* V ekonomických úlohách sa stretávame aj s cieľovou množinou typu $C = \{x \mid g(x) \geq 0\}$.

(5) Množiny $U(t)$, definujúce ohraničenia na riadenie bývajú uzavreté podmnožiny $\mathbb{R}^m$. V prípade, že $U = \mathbb{R}^m$ hovoríme o úlohe *bez ohraničení na riadenie.* Častokrát býva $U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u^i \in [\alpha_i, \beta_i], i = 1, \ldots, m\}$.

(6) Ohraničenia na stavovú premennú (pokiaľ sa vyskytujú) bývajú zvyčajne zadané v tvare $h(x(t)) \geq 0$, kde h je daná funkcia. V ekonomických úlohách sa často vyskytujú ohraničenia v tvare $x(t) \geq 0$. Treba povedať, že ohraničenia na stavovú premennú veľmi komplikujú teóriu riadenia. Trochu lepšie si vie teória poradiť s ohraničeniami zmiešaného typu $h(x(t), u(t)) \geq 0$. V štandardnej úlohe sa však nevyskytujú žiadne ohraničenia na stavovú premennú, t.j. $X(t) \equiv \mathbb{R}^n$.

(7) V prípade, že ÚOR má účelovú funkciu v tvare (1.2), t.j. je súčtom integrálu a funkcie koncového stavu, hovoríme, že úloha je *Bolzovom tvare.* V prípade, že účelová funkcia je definovaná iba pomocou integrálu (t.j. $\phi \equiv 0$), hovoríme o *Lagrangeovom tvare.* Nakoniec, ak je účelová funkcia definovaná iba ako funkcia koncového stavu (t.j. $f_0 \equiv 0$), tak hovoríme o *Mayerovom tvare* úlohy. Dá sa ukázať, že všetky tri typy úloh sú ekvivalentné v tom zmysle, že jedna sa dá previesť na hociktorú druhú (i keď niekedy vyššieho rozmeru).

V teórii optimálneho riadenia majú významné miesto minimalizačné úlohy, kde $f^0 \equiv 1$ a zároveň $\varphi \equiv 0$, t.j. $J = T - t_0$. V tomto prípade vlastne minimalizujeme čas a takéto úlohy sa nazývajú úlohy *najrýchlejšieho prechodu*, alebo časovo optimálne úlohy.

V prípade, že všetky zadané funkcie a množiny vstupujúce do horeuvedenej schémy nezávisia explicitne od t, hovoríme o *autonómnej* ÚOR.

1.4 Späť k príkladom

Je zrejmé, že úloha z **Príkladu 1.1 o najrýchlejšom premiestnení** sa pri označení $x^1 := y$ a $x^2 := \dot{y}$ a predpoklade $m = 1$ dá sformulovať nasledovne:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovať} \quad & T, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ je voľné}, \\ \text{pri podmienkach} \quad & \dot{x}^1(t) = x^2(t), \\ & \dot{x}^2(t) = u(t), \\ & x^1(0) = 0, \quad x^1(T) = y^1, \\ & x^2(0) = 0, \quad x^2(T) = 0, \\ & u(t) \in [-\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Ide teda o minimalizačnú úlohu (presnejšie, o úlohu najrýchlejšieho prechodu) s dvojrozmernou stavovou premennou a jednorozmerným riadením. Úloha má pevný koniec, má ohraničenia na riadenie, ale nemá ohraničenie na stavové premenné. Je to autonómna úloha.

Úlohu o optimálnej spotrebe z Príkladu 1.2 môžeme sformulovať do nasledovného tvaru [3]:

$$\max \int_0^T e^{-rt} \mathrm{U}(c(t))\, dt, \tag{1.9}$$

$$\dot{k}(t) = ik(t) - c(t), \ t \in [0, T], \tag{1.10}$$

$$k(0) = k_0, \tag{1.11}$$

$$k(T) = k_1, \tag{1.12}$$

kde $T > 0$, $r > 0$, $i > 0$, $k_0 > 0$ a $k_1 \geq 0$ sú dané konštanty a U(.) je daná funkcia. Je zrejmé, že ide o úlohu s pevným časom, pevným koncom, bez ohraničení na riadiace a stavové premenné.

Obidva uvedené príklady viedli na úlohy s konečným časom. V Priklade 1.1 bol čas voľný, v Príklade 1.2 zase pevný. Druhý príklad však budeme analyzovať aj ako úlohu na nekonečnom horizonte. Typickým predstaviteľom úloh na nekonečnom časovom horizonte je neklasický modelu ekonomického rastu známy pod menom **Ramsey model**, ktorý vedie na nasledovnú úlohu optimálneho riadenia:

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} \mathrm{U}(c(t)) dt \tag{1.13}$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \delta k(t) - c(t), \quad \forall\, t \geq 0, \tag{1.14}$$

$$k(0) = k_0, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t \to \infty} k(t) \geq 0, \tag{1.16}$$

[3] Často budeme používať skrátený zápis úlohy, v ktorom skracujeme slová maximalizovať na max, minimalizovať na min a slová „pri podmienkach“ budeme úplne vynechávať

kde k označuje kapitál na jednotku práce a c spotrebu, U(c) je daná úžitková funkcia, $f(k)$ je daná produkčná funkcia. Konštanta $\delta > 0$ je mierou znehodnocovania kapitálu, konštanta $r > 0$ mierou netrpezlivosti spotrebovávať.

Všimnime si, že v prípade, že zanedbávame amortizáciu kapitálu, t.j. $\delta = 0$ a ak predpokladáme lineárnu produkčnú funkciu $f(k) = ik$, kde i je kladná konštanta, dostaneme úlohu o optimálnej spotrebe z Príkladu 1.2 na nekonečnom časovom horizonte. K úlohe o optimálnej spotrebe a k Ramseyho modelu sa budeme viackrát vracať a riešiť ich v rozličných modifikáciách.

1.5 Súvis úloh optimálneho riadenia a variačného počtu

Optimálne riadenie je pomerne mladá matematická disciplína. Vznikla v 60-tych 20. storočia ako odpoveď na potreby riadiť pohybujúce sa objekty. Historicky úlohám optimálneho riadenia predchádzali úlohy variačného počtu, ktoré sa dajú chápať ako podtrieda úloh spojitého optimálneho riadenia. Na rozdiel od optimálneho riadenia, je variačný počet veľmi starou matematickou disciplínou. Počiatky variačného počtu sa datujú až do roku 1696, kedy Bernoulli formuloval úlohu o brachystochrone. [4] Variačný počet bol rozvíjaný v 18. storočí Lagrangeom a Eulerom a neskôr sa stal dôležitou súčasťou aplikovanej matematiky poskytujúci jednotný pohľad na mnohé problémy fyziky.

V úlohách variačného počtu hľadáme takú hladkú krivku $x(.)$ definovanú na intervale $[0, T]$, ktorá maximalizuje funkcionál

$$I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

kde $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná C^2 funkcia troch premenných. Pri tom sa na hľadanú krivku často kladú ešte ďalšie podmienky, zvyčajne vo forme predpísanej počiatočnej a koncovej hodnoty krivky:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \tag{1.17}$$

Ako súvisia takéto úlohy s úlohami optimálneho riadenia? Všimnime si, že funkcionál I sa podobá účelovej funkcii J z formulácie úlohy optimálneho riadenia, len namiesto člena $\dot{x}(t)$ je v J riadenie $u(t)$. Je zrejmé, že pomocou označenia

$$u(t) := \dot{x}$$

[4] Brachystochrona je krivka vo zvislej rovine, po ktorej sa pohybuje hmotný bod, ak sa chce dostať čo najrýchlejšie z bodu A do bodu B iba pod vplyvom svojej tiaže.

môžeme úlohu variačného počtu previesť na (špeciálnu) úlohu optimálneho riadenia s účelovou funkciou v tvare

$$I(u(.)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt,$$

s diferenciálnou rovnicou

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0, T],$$

a s podmienkami (2.2). Dostali sme veľmi jednoduchú úlohu optimálneho riadenia bez ohraničenia na riadenie.

Poznamenajme, že naopak, iba niektoré úlohy optimálneho riadenia, (ktoré ale musia byť bez ohraničenia na riadenie!) sa dajú previesť na úlohy variačného počtu. Takou je úloha o optimálnej spotrebe sformulovaná ako (1.9)–(1.12). Keďže z diferenciálnej rovnice (1.10) vieme vyjadriť $c = ik - \dot{k}$, dosadením do účelovej funkcie dostávame úlohu variačného počtu

$$\begin{aligned} \text{minimalizovať} \quad & \int_0^T e^{-rt}\mathrm{U}(ik(t) - \dot{k}(t))dt, \\ \text{pri podmienkach} \quad & k(0) = k_0, \quad k(T) = k_T. \end{aligned}$$

Dôležité je uvedomiť si, že principiálnym rozdielom medzi variačným počtom a optimálnym riadením je prítomnosť ohraničení na riadiace premenné v úlohách optimálneho riadenia. Tieto spôsobujú ťažkosti pri dôkaze nutných podmienok optimality v tvare Pontrjaginovho princípu maxima v optimálnom riadení. Pomerne jednoduché postupy variáce testovenej krivky použité pri odvodzovaní nutnej podmienky variačného počtu (tzv. Eulerova rovnica) nie je možné aplikovať na úlohy optimálneho riadenia práve kvôli existencii ohraničení na riadenie.

V nasledujúcej časti sa oboznámime s niektorými základnými výsledkami variačného počtu. Predovšetkým odvodíme nutné podmienky optimality v tvare Eulerovej rovnice. V ďalších kapitolách sa však už budeme zaoberať výlučne úlohami optimálneho riadenia, ktoré sú všeobecnejšími optimalizačnými úlohami. Všetky výsledky pre úlohy optimálneho riadenia možno aplikovať aj na úlohy variačného počtu po ich prevode na úlohu optimálneho riadenia postupom popísaným vyššie.

1.6 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 1.1. Aplikácia v marketingu (Gould, 1970).[5] Predpokladajme, že zisk nejakej firmy je rastúcou a konkávnou funkciou podielu ľudí, ktorí poznajú jej produkt

[5] Gould, J.P. (1970): Diffusion Processes and Optimal Advertising Policy, in Macroeconomics Foundations of Employment and Inlation Theory, New York: Norton, pp. 338-368.

(tento podiel označme x). Tento podiel môže firma ovplyvniť marketingom, pričom intenzitu marketingovej kampane označme u. Náklady na marketingovú kampaň sú rastúcou a konvexnou funkciou premennej u. Nech δ označuje mieru poklesu podielu ľudí oboznámených s produktom. Cieľom je maximalizovať celkový čistý zisk (po odpočítaní nákladov) diskontovaný sadzbou r na danom časovom horizonte $[0, T]$. Sformulujte model ako spojitú úlohu optimálneho riadenia.

Úloha 1.2. Aplikácia v ekonomike prírodných zdrojov (Schaefer, 1957).[6] Predpokladajme, že rast populácie rýb v jazere za jednotku času je daný funkciou $f(x) = ax(1 - x)$, kde x predstavuje veľkosť tejto populácie (vyjadrený ako percentuálny podiel z maximálnej kapacity rybníka) a a je konštantna. Cieľom je maximalizovať diskontovaný zisk z výlovu rýb za vopred stanovené obdobie. Predpokladajme, že veľkosť výlovu je priamo úmerná vynaloženému úsiliu u a aktuálnej veľkosti populácie rýb. Nech jednotková cena za ryby je p a náklady na výlov $c(u)$.

- Sformulujte model ako spojitú úlohu optimálneho riadenia.
- Uveďte charakterizáciu tejto úlohy v zmysle klasifikácie uvedenej v časti 1.3.
- Ako možno (pri zanedbaní ohraničení na x a u) preformulovať tento model v tvare úlohy variačného počtu?

Úloha 1.3. Model životného prostredia I. (Forster, 1977).[7] Model predpokladá, že vysoká spotreba prispieva k vyššej miere znečisťovania životného prostredia. Prináša tak na jednej strane vysoký úžitok zo spotreby, na strane druhej aj vysoké zníženie užitočnosti (*disutility*) zo znečisteného životného prostredia. Označme

P stav znečistenia životného prostredia,

C spotrebu,

$\mathrm{U}(C)$ užitočnosť zo spotreby,

$\mathrm{D}(P)$ zníženie užitočnosti kvôli znečistenému prostrediu,

γ miera samočistenia (t.j. za časovú jednotku sa zníži znečistenie prostredia o $100\gamma\%$).

Sformulujte ako spojitú úlohu optimálneho riadenia.

Úloha 1.4. Model životného prostredia II. (Ľuptáčik - Schubert, 1979).[8] Rozšírme predchádzajúci model o existenciu kapitálu nasledujúcim spôsobom: Pred-

[6] Schaefer, M.B. (1957): Some considerations of population dynamics and economics in relation to the management of marine fisheries, J. Fisheries Res. Board Canada 14, pp. 669-681.

[7] Forster, B.A. (1977): On a one state variable optimal control problem: consumption-pollution trade-offs, In: Pitchford, Turnovsky (Eds.): Application of Control Theory to Economic Analysis, Amsterdam, pp. 35-56.

[8] Ľuptáčik, M., Schubert, U. (1982): Optimal investment policy in productive capacity and pollution abatement processes in a growing economy, In: Feichtinger (Ed.): Optimal Control Theory and Economic Analysis, Amsterdam, pp. 231-243.

pokladajme, že za jednotku času sa v ekonomike vyprodukuje $F(K)$ kapitálu, kde K je aktuálny stav kapitálu a F je produkčná funkcia. Táto produkcia sa rozdeľuje na spotrebu C, investície do prírastku kapitálu a časti kapitálu použitej na zníženie znečistenia (A jednotiek kapitálu za časovú jednotku zníži znečistenie o $G(A)$ za časovú jednotku). Miera amortizácie kapitálu je δ. Cieľom je maximalizovať čistý úžitok zo spotreby (znížený o efekt znečisteného prostredia). Sformulujte model ako spojitú úlohu optimálneho riadenia.

Úloha 1.5. Fázový portrét. Nájdite stacionárne body systému diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{K} &= (1-\beta)K^{\alpha} - \delta K, \\ \dot{P} &= \beta K^{\alpha} - \gamma P, \end{aligned}$$

kde α, β, γ, δ sú z $(0,1)$. Vyšetrite ich stabilitu. Pre interpretáciu porov. predchádzajúci príklad - zadanie dostaneme pre Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu v tvare ($F(K) = K^{\alpha}$) a lineárnu funkciu závislosti prírastku znečistenia od postreby ($H(C) = C$), pričom spotreba je vo výške konštantne danej časti produkcie ($C = \beta F(K)$) a výška kapitálu na využitého na zlepšenie životného prostredia je nulová ($A \equiv 0$).

Úloha 1.6. Rôzne tvary formulácie úloh. Dokážte, že úlohu v Lagrangeovom tvare vieme ekvivaletne zapísať v Mayerovom tvare a naopak.

Časť II

Úlohy variačného počtu

Kapitola 2

Základná úloha variačného počtu. Eulerova rovnica

V mnohých prácach z ekonomického modelovania dynamických systémov sa možno stretnúť s použitím variačného počtu. Preto v tejto a v nasledujúcich dvoch kapitolách chceme oboznámiť čitateľa aspoň so základnými poznatkami tejto disciplíny. Zameriavame sa predovšetkým na nutné podmienky optimality a ich odvodenie, ich využitie ilustrujeme na riešení niekoľkých jednoduchých úloh. V prípade hlbšieho záujmu o problematiku odporúčame siahnuť po špecializovanej literatúre, ktorej je v tejto oblasti veľmi veľa. Klasickou učebnicou je napr. [8], na fakulte sú spracované učebné texty [24]. V prípade záujmu o početné ekonomické aplikácie možno siahnuť napríklad po [16], [19], kde je však teória spracovaná matematicky menej korektným spôsobom. Najvyváženejší súlad medzi aplikáciami a teóriou je v knihe [25].

2.1 Formulácia základnej úlohy

Ako sme už spomenuli v predchádzajúcej kapitole, v úlohách variačného počtu hľadáme takú hladkú krivku $x(.)$ definovanú na intervale $[0, T]$, ktorá maximalizuje funkcionál

$$I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \tag{2.1}$$

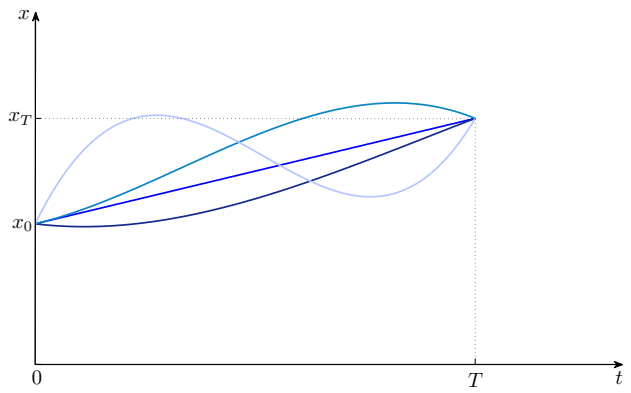
kde $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná C^2 funkcia. Pritom sa na hľadanú krivku často kladú ešte ďalšie podmienky. Ak sú tieto podmienky vo forme predpísanej počiatočnej a koncovej hodnoty krivky:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \tag{2.2}$$

kde $x_0,\ x_T \in \mathbb{R}^n$ sú dané vektory a T je dané kladné číslo, hovoríme o *základnej úlohe variačného počtu*. Pre túto úlohu zavedieme terminológiu tak, aby bola v súlade s terminológiou optimálneho riadenia.

Každú hladkú krivku (čiže spojite diferencovateľnú funkciu $x(.) : [0, T] \to R^n$) nazývame prípustnou, príp. prípustným riešením, ak spĺňa predpísané počiatočné a

koncové podmienky. V prípade tejto základnej úlohy sú to podmienky (2.2) a takúto situáciu možeme ilustrovať Obrázkom 2.1.



Obr. 2.1: Grafické znázornenie prípustných riešení základnej úlohy variačného počtu

Majúc stanovený funkcionál (2.1), môžeme hľadať jeho maximum, minimum, alebo oboje. Štandardne budeme funkcionál maximalizovať. Prípustnú krivku $\hat{x}(t)$ budeme nazývať optimálnym riešením, ak v tejto krivke nadobúda funkcionál svoje maximum v triede všetkých prípustných riešení. Takéto úlohy budeme niekedy formálne zapisovať v tvare

$$I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \max, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T,$$

prípadne v tvare

$$\max I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

$$\text{pri podmienkach } x(0) = x_0, x(T) = x_T. \tag{2.4}$$

V druhom zápise budeme slová *pri podmienkach* často vynechávať. Ak nás namiesto maxima zaujíma minimum, pripadne oboje, tak skratku *max* nahradíme skratkou *min*, pripadne *extr*. Podobná symbolika sa bude vzťahovať aj na zápis iných úloh variačného počtu analyzovaných v ďalších dvoch kapitolách.

Podintegrálna funkcia f^0 je funkciou troch premenných. Prvou je reálna premenná, druhou a treťou premennou je n-rozmerná reálna premenná. Parciálnu deriváciu funkcie f^0 podľa prvej premennej budeme zapisovať $\frac{\partial f^0}{\partial t}$, resp. f^0_t, podľa druhej $\frac{\partial f^0}{\partial x}$, resp. f^0_x, podľa tretej $\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}$, resp. $f^0_{\dot{x}}$.

2.2 Odvodenie nutných podmienok optimality

Našim cieľom je odvodiť nutné podmienky optimality pre úlohu (2.3)–(2.4) sformulovanú v predchádzajúcom odseku. Predpokladajme, že $\hat{x}(.)$ je optimálnym riešením[1] základnej úlohy variačného počtu (2.3)–(2.4). Hľadáme takú vlastnosť krivky $\hat{x}(.)$, ktorá by bola iná, než vlastnosti susedných kriviek. Susedné krivky budeme generovať pomocou tzv. variačných kriviek: $\delta x(.) \in C^1[0,T]$, spĺňajúcich

$$\delta x(0) = 0, \ \delta x(T) = 0. \tag{2.5}$$

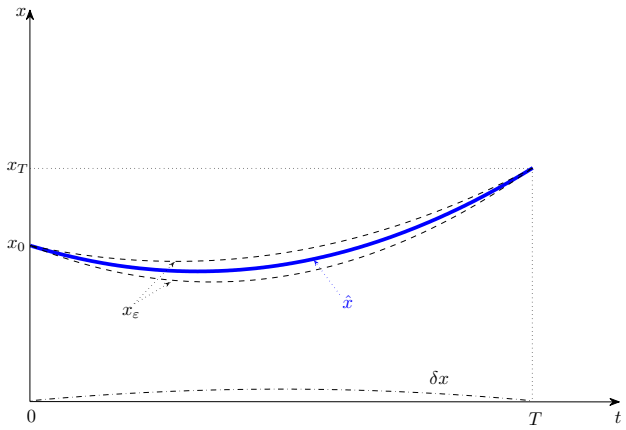
Takéto variačné krivky nazývame prípustné. Pre každú prípustnú variačnú krivku $\delta x(.)$ definujeme celú triedu susedných kriviek ku $\hat{x}(.)$ parametrizovanú parametrom ε nasledovne:

$$x^\varepsilon(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon \delta x(t).$$

Je zrejmé, že

$$\dot{x}^\epsilon(t) = \dot{\hat{x}}(t) + \varepsilon \dot{\delta x}(t)$$

a že keď $\varepsilon \to 0$ tak aj $x^\varepsilon(t)$ sa „blížia“ [2] ku $\hat{x}(t)$.



Obr. 2.2: Grafické znázornenie variačných a susedných kriviek

Zvoľme teraz jednu prípustnú variačnú krivku $\delta x(.)$. Pre ňu môžeme teraz definovať $I(x^\varepsilon(.))$ ako funkciu jednej reálnej premennej ε nasledovne

$$F(\varepsilon) := I(x^\varepsilon(.)) = \int_0^T f^0(t, x^\varepsilon(t), \dot{x}^\varepsilon(t))dt.$$

[1]Stačilo by predpokladať, že $\hat{x}(.)$ je lokálnym maximom v zmysle nejakej metriky na $C^1[0,T]$ priestore.

[2]Pod konvergenciou funkcií rozumieme konvergenciu v zmysle spomínanej metriky v $C^1[0,T]$ priestore.

Zrejme $F(0) = I(\hat{x}(.))$ a pretože $I(\hat{x}(.))$ bola maximálna hodnota funkcionálu I, tak aj funkcia $F(\varepsilon)$ nadobúda maximum v bode ε=0. Pretože $F(\varepsilon)$ je diferencovateľná, musí byť v bode ε=0 splnená nutná podmienka maxima. Dostávame (kvôli jednoduchosti zápisu budeme vynechávame argument t v zápise funkcií $\hat{x}(t)$, $\delta x(t)$ a ich derivácií):

$$0 = \left.\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_0^T \left.\frac{df^0(t, \hat{x} + \varepsilon\delta x, \dot{\hat{x}} + \varepsilon\delta\dot{x})}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} dt$$

$$= \int_0^T \left[\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right] dt.$$

Na druhý sčítanec použijeme per partes[3] a pokračujeme

$$0 = \int_0^T \left[\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial x}\delta x - \frac{d}{dt}\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}}\ \delta x\right] dt + \left[\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_0^T = \tag{2.6a}$$

$$= \int_0^T \left[\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}}\right] \delta x dt, \tag{2.6b}$$

kde sme použili vlastnosť (2.5) prípustných variačných kriviek. Dostali sme, že integrál (2.6b) má byť rovný nule a to pre ľubovoľnú prípustnú variačnú krivku $\delta x(.)$. Z toho sa dá odvodiť[4], že aj hodnota výrazu v hranatej zátvorke pod integrálom musí byť rovná nule v každom $t \in [0, T]$, t.j.

$$\frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.7}$$

Rovnica (2.7) sa nazýva *Eulerova rovnica.* Skrátene ju zapisujeme (bez argumentov) v tvare

$$f_x^0 - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}^0 = 0. \tag{ER}$$

Čo je to za rovnica? Rozpíšme deriváciu podľa času v druhom výraze v (2.7):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}\partial t} + \frac{\partial^2 f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}\partial x}\dot{\hat{x}} + \frac{\partial^2 f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}^2}\ddot{\hat{x}}$$

Teda Eulerova rovnica je vlastne diferenciálna rovnica druhého rádu:

$$\frac{\partial f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial x} - \frac{\partial^2 f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}\partial t} - \frac{\partial^2 f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}\partial x}\dot{\hat{x}} - \frac{\partial^2 f^0(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\partial \dot{x}^2}\ddot{\hat{x}} = 0. \tag{2.8}$$

Spolu s okrajovými podmienkami dáva Eulerova rovnica (formálne) dostatok podmienok na určenie $\hat{x}(.)$. Sformulujme odvodený výsledok v tvare vety:

[3]Mohlo by sa zdať, že na korektné použitie tohto kroku potrebujeme žiadať, aby prípustné krivky boli C^2 funkcie. To by zabezpečilo, že $\frac{d}{dt}\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}$ existuje a je spojitá. Nie je to však treba, lebo detailnejšiou analýzou to vyplynie z existujúcich predpokladov na úlohu–viď [8].

[4]Toto odvodenie bolo urobené na prednáške, možno ho nájsť aj v [25].

Veta 2.1. *Nech $\hat{x}(t)$ je optimálne riešenie úlohy (2.3)–(2.4). Potom $\hat{x}(t)$ spĺňa Eulerovu rovnicu (2.7).*

Poznámky:

(1) Eulerova rovnica je nutnou podmienkou optimality (prvého rádu) pre základnú úlohu variačného počtu. To znamená, že prípustné riešenie, ktoré je riešením Eulerovej rovnice, je len kandidátom na optimálne riešenie úlohy. Na druhej strane, ak úloha má optimálne riešenie, tak toto riešenie bude medzi riešeniami Eulerovej rovnice. Ak Eulerova rovnica nemá žiadne riešenie prípustné pre danú úlohu, tak úloha nemá optimálne riešenie.

(2) Eulerovu rovnicu sme odvodili ako nutnú podmienku optimality pre úlohu (2.3)–(2.4), ktorá je maximalizačnou úlohou. Ľahko však možno nahliadnuť (prechodom $\min \int_0^T f^0 dt \to \max \int_0^T (-f^0) dt$ že pre minimalizanú úlohu dostaneme tú istú Eulerovu rovnicu. To znamená, že Eulerova rovnica je nutnou podmienkou optimality spoločnou pre maximum aj minimum. Je to rovnaká vlastnosť, akú má nutná podmienka extrému prvého rádu v diferenciálnom počte, pomocou ktorej sme Eulerovu rovnicu vyvodili.

(3) Podobne ako v diferenciálnom počte, aj tu možno odvodiť nutné podmienky druhého rádu nazývané Legendrove podmienky. Tieto umožňujú rozlíšiť (lokálne) maximum od (lokálneho) minima. Pre maximum je to podmienka $f^0_{\dot{x}\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \leq 0, \ \forall t$ a pre minimum $f^0_{\dot{x}\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0, \ \forall t$.

(4) Ak $f^0(t, x, \dot{x})$ je konkávna (resp. konvexná) v premennej $(x, \dot{x})$, tak sa dá dokázať, že Eulerova rovnica spolu s podmienkami (2.4) je aj postačujúcou podmienkou pre maximum (resp. minimum). To znamená, ak v úlohe, kde $f^0(t, x, \dot{x})$ je konkávna, existuje prípustné riešenie, ktoré je riešením Eulerovej rovnice, tak existuje maximum pre (2.3)–(2.4) a každé takéto riešenie je optimálnym riešením úlohy.

2.3 Riešenie úloh

Príklad 2.1. Riešme nasledovnú základnú úlohu variačného počtu

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^2 (12tx + \dot{x}^2)\, \mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } x(0) = 0, x(2) = 8. \end{aligned}$$

Zrejme $f^0_x = 12t$, $f^0_{\dot{x}} = 2\dot{x}$, $f^0_{\dot{x}t} = 0$, $f^0_{\dot{x}x} = 0$, $f^0_{\dot{x}\dot{x}} = 2$. Dosadením týchto vzťahov do (2.8) dostávame nasledovný tvar Eulerovej rovnice pre danú úlohu:

$$12t - 2\ddot{x} = 0.$$

Hľadáme jej všeobecné riešenie

$$\ddot{x} = 6t \Rightarrow \dot{x} = 3t^2 + c_1 \Rightarrow x = t^3 + c_1 t + c_2.$$

Z okrajových podmienok vyplýva, že $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ a teda $x(t) = t^3$. Našli sme teda jediné riešenie nutných podmienok optimality a to $\hat{x}(t) = t^3$. Keďže $f^0_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$, tak $\hat{x}(t) = t^3$ je kandidátom na minimum. Podintegrálna funkcia $12tx + \dot{x}^2$ je však konvexnou funkciou v $(x, \dot{x})$ a teda nutné podmienky sú aj postačujúce pre minimum, z čoho vyplýva, že v nájdenom $\hat{x}(t) = t^3$ úloha nadobúda minimum.

Príklad 2.2. Úloha o optimálnej spotrebe. Riešme úlohu o optimálnej spotrebe z Kapitoly 1. Predpokladajme, že $i, r > 0$ a že úžitková funkcia spĺňa štandardné predpoklady úžitkových funkcií $\mathrm{U}' > 0$ a $\mathrm{U}'' < 0$. Túto úlohu formulujeme ako

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T e^{-rt}\mathrm{U}(ik(t) - \dot{k}(t))\,\mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } k(0) = k_0,\ k(T) = k_T, \end{aligned}$$

kde $T > 0$, $k_0 > 0$, $k_T \geq 0$ sú dané parametre. Vyčíslime najprv jednotlivé derivácie vstupujúce do Eulerovej rovnice. Zrejme platí:

$$f^0_k = e^{-rt}\mathrm{U}'(ik - \dot{k})i, \quad f^0_{\dot{k}} = e^{-rt}\mathrm{U}'(ik - \dot{k})(-1),$$

$$f^0_{kt} = re^{-rt}\mathrm{U}'(ik - \dot{k}), \quad f^0_{kk} = -e^{-rt}i\mathrm{U}''(ik - \dot{k}), \quad f^0_{\dot{k}\dot{k}} = e^{-rt}\mathrm{U}''(ik - \dot{k}).$$

Vzhľadom na naše predpoklady o funkcii U platí, že $f^0_{\dot{k}\dot{k}} = e^{-rt}\mathrm{U}''(ik - \dot{k}) < 0$, a teda riešením nutných podmienok získame kandidáta na maximum. Keďže však funkcia $e^{-rt}\mathrm{U}(ik - \dot{k})$ je konkávnou funkciou v $(k, \dot{k})$, tak každé prípustné riešenie nutných podmienok bude optimálnym riešením úlohy. Dosadenie hore uvedených vzťahov do Eulerovej rovnice (2.8) dáva:

$$e^{-rt}\mathrm{U}'(ik - \dot{k})i - re^{-rt}\mathrm{U}'(ik - \dot{k}) + e^{-rt}\mathrm{U}''(ik - \dot{k})i\dot{k} - e^{-rt}\mathrm{U}''(ik - \dot{k})\ddot{k} = 0. \tag{2.9}$$

Po úpravách a využitím $\dot{c} = i\dot{k} - \ddot{k}$, čo sme dostali derivovaním (1.10), získame nasledujúci vzťah

$$(i - r) = -\frac{\mathrm{U}''(ik - \dot{k})}{\mathrm{U}'(ik - \dot{k})}\dot{c},$$

ktorý umožňuje ekonomicky interpretovať optimálny tok spotreby $c(t)$. Naozaj, keďže $-\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'} > 0$, tak $\dot{c}$ má to isté znamienko ako $(i - r)$. Teda

- ak $i > r$, tak spotreba $c(t)$ v čase rastie,
- ak $i < r$, tak spotreba $c(t)$ v čase klesá,

- ak $i = r$, tak je spotreba $c(t)$ v čase konštantná.

To znamená, že ak je úroková miera i väčšia ako spotrebiteľova miera netrpezlivosti r, tak je optimálne odkladať spotrebu na neskôr a teda tok spotreby rastie v čase. Tento kvalitatívny výsledok sme dostali aj napriek tomu, že sme nepoznali konkrétny tvar funkcie U. Stačila nám k tomu znalosť len niektorých kvalitatívnych vlastností funkcie U. Takýto typ výsledkov je charakteristický pri využívaní nutných podmienkok optimality v ekonomickom modelovaní a označujeme ho ako kvalitatívna analýza.

Ak teraz zadáme konkrétny tvar úžitkovej funkcie napríklad v tvare $\mathrm{U}(c) = \ln(c)$, vieme z nutných podmienok nájsť explicitné riešenie. Kvôli jednoduchosti to urobíme pre $k_T = 0$. Dosaďme $\mathrm{U}(c) = \ln(c)$ do (2.9). Eulerova rovnica má potom tvar:

$$(i - r)\frac{1}{ik - \dot{k}} - \frac{1}{(ik - \dot{k})^2}(i\dot{k} - \ddot{k}) = 0,$$

ktorý po úpravách vedie k rovnici v tvare:

$$\ddot{k} + (r - 2i)\dot{k} + (i^2 - ir)k = 0.$$

Dostali sme diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre k. Charakteristickou rovnicou je

$$\lambda^2 + (r - 2i)\lambda + (i^2 - ir) = 0,$$

ktorá má dva korene

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = i - r.$$

Pomocou nich vieme napísať všeobecné riešenie v tvare

$$k(t) = Ae^{it} + Be^{(i-r)t}, \tag{2.10}$$

kde A a B sú konštanty. Na ich určenie využijeme počiatočnú a koncovú podmienku. Postupne dostaneme

$$k_0 = k(0) = A + B \Rightarrow A = k_0 - B,$$
$$0 = k_T = k(T) = (k_0 - B)e^{iT} + Be^{(i-r)T} = k_0 e^{iT} - e^{iT}B(1 - e^{-rT}),$$

a teda

$$B = \frac{k_0}{1 - e^{-rT}} \quad \text{a} \quad A = \frac{-k_0 e^{-rT}}{1 - e^{-rT}}.$$

Dosadením do (2.10) dostávame

$$k(t) = \frac{k_0 e^{(i-r)t}(1 - e^{-r(T-t)})}{1 - e^{-rT}}.$$

Dostali sme jediné optimálne riešenie danej úlohy. Dosadením do vzťahu $c(t) = ik(t) - \dot{k}(t)$ dostaneme, že

$$c(t) = \frac{rk_0 e^{(i-r)t}}{1 - e^{-rT}}.$$

Pretože rk_0 aj $1-e^{-rT}$ sú kladné konštanty, dostávame, že $c(t)$ sa mení s časom rovnako ako $e^{(i-r)t}$.

Všimnime si, že vďaka predpokladu $k_0 > 0$ je nielen $k(t) \geq 0$, ale aj $c(t) > 0$. Až toto pozorovanie potvrdzuje, že sme oprávnene ignorovali prirodzené ekonomické ohraničenia $k(t) \geq 0$, ale aj $c(t) > 0$ pri formulácii úlohy, čo nám umožnilo riešiť úlohu o optimálnej spotrebe prostriedkami variačného počtu.

2.4 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 2.1. Najkratšia krivka – formulácia úlohy. Sformulujte v tvare úlohy variačného počtu úlohu nájsť krivku najkratšej dĺžky v súradnicovom systéme (t, x), ktorá spája dva dané body $(0, x_0)$ a (T, x_T), pričom $T > 0$.

Úloha 2.2. Fyzikálna aplikácia. Ak dva rovnaké kruhy ponoríme do mydlového roztoku, vytiahneme ich a pomaly ich od seba oddialite, vznikne štruktúra s minimálnym povrchom (z dôvodu minimalizácie celkovej energie). Táto štruktúra sa nazýva *catenoid*. Jej matematický opis spolu s dôkazom, že ide o štruktúru s minimálnym povrchom, prvýkrát publikoval Leonard Euler.[5]

Obr. 2.3: Catenoid vytvorený z mydlovej vrstvy

Nájsť matematický popis tohto útvaru možno riešením nasledujúcej úlohy: Zo všetkých kriviek spájajúcich body $(0, x_0)$ a (T, x_T) treba vybrať tú, ktorá generuje najmenšiu plochu pri jej rotácii okolo osi t. Sformulujte túto úlohu ako úlohu variačného počtu.

Úloha 2.3. Odhadnite tvar optimálneho riešenia úlohy

$$\min \int_0^T \dot{x}(t)^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\text{pri podmienkach } x(0) = 0, \; x(T) = c,$$

[5] Euler, L. (1744): Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, in: Opera omnia I, 24.

kde $T > 0$, c sú dané parametre. Túto úlohu možno diskretizovať do tvaru

$$\min \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{T/k} \right)^2 (T/k),$$
$$\text{pri podmienkach } x_0 = 0,\ x_k = c,$$

kde k je počet deliacich bodov.

a) Nájdite optimálne riešenie tejto úlohy ako úlohy hľadania minima funkcie viacerých premenných.

b) Nájdite kandidáta na optimálne riešenie tejto úlohy pomocou Eulerovej rovnice.

Úloha 2.4. Úloha s diskontným faktorom. Nájdite kandidáta na optimálne riešenie nasledujúcej úlohy:

$$\text{extr} \int_0^T e^{-rt} (\dot{x}(t))^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\text{pri podmienkach } x(0) = 0,\ x(T) = c.$$

Úloha 2.5. Najkratšia krivka – riešenie úlohy. Nájdite optimálne riešenie úlohy sformulovanej v Úlohe 2.1.

Úloha 2.6. Neautonómna úloha. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\text{extr} \int_0^1 (\dot{x}(t)^2 + t^2 x(t)) \, \mathrm{d}t$$
$$\text{pri podmienkach } x(0) = 0,\ x(1) = 1/12.$$

Ide o minimum alebo maximum?

Úloha 2.7. Neautonómna úloha. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie úlohy

$$\text{extr} \int_0^\pi (x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 - 2x(t) \sin t \,) \, \mathrm{d}t$$
$$x(0) = 1,$$
$$x(\pi) = e.$$

Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum. Overte splnenie postačujúcej podmienky druhého rádu.

Úloha 2.8. Úloha o optimálnej spotrebe. V Príklade 2.2 sme riešili všeobecne sformulovanú úlohu o optimálnej spotrebe v tvare

$$\max \int_0^T e^{-rt} \mathrm{U}(ik(t) - \dot{k}(t)) \, dt, \quad T \text{ je dané},$$
$$k(0) = k_0 > 0 \text{ je dané},$$
$$k(T) = k_T > 0 \text{ je dané},$$

kde $i \in (0,1)$, $r \in (0,1)$, $T > 0$, $x_0 > 0$ a $x_T \geq 0$ sú dané parametre tak že $k_0 e^{iT} > k_T$.

a) Nájdite explicitné riešenie Eulerovej rovnice pre funkciu užitočnosti v tvare

$$U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta},$$

kde $\theta \in \left(1 - \frac{r}{i}, 1\right) \cap \mathbb{R}^+$ (tzv. funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie).

b) Ukážte, že pozdĺž tohto riešenia je spotreba (definovaná vzťahom $c(t) := ik(t) - \dot{k}(t)$) kladná.

c) Rozhodnite, či je splnená postačujúca podmienka na maximum.

Úloha 2.9. Degenerovaná úloha. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^1 (t\dot{x}(t) + x(t))\, \mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } x(0) = 2,\ x(1) = 1. \end{aligned}$$

Ide o minimum alebo maximum?

Úloha 2.10. Všeobecná autonómna úloha. Daná je úloha variačného počtu, v ktorej čas t nevystupuje explicitne vo funkcii pod integrálom v účelovej funkcii:

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^T f^0(x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t, \\ &x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \end{aligned}$$

kde $T > 0$, x_0 a x_T sú dané parametre. Dokážte, že potom je funkcia

$$C(t) := f^0(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial f^0(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \dot{x}(t)$$

prvým integrálom Eulerovej rovnice.

Kapitola 3

Modifikácie základnej úlohy variačného počtu

V základnej úlohe variačného počtu sme mali pevne zadaný časový interval $[0, T]$, na ktorom bol definovaný funkcionál a na ktorom teda mali byť definované prípustné krivky. Tiež bola zadaná počiatočná a koncová podmienka. Vo variačnom počte sa však skúmajú aj také úlohy, v ktorých časový horizont T nie je pevne daný, prípadne, kde koncová alebo počiatočná podmienka úplne chýba, alebo sa predpokladá, že koncový stav leží na nejakej variete. Niektorými takýmito typmi úloh sa budeme zaoberať v tejto kapitole. V tejto súvislosti budeme základnú úlohu variačného počtu nazývať úlohou s pevným časom a pevným koncom.

3.1 Úloha s pevným časom a voľným koncom

Pod takouto úlohou rozumieme

$$\begin{aligned} &\max I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t, \\ &\text{pri podmienke } x(0) = x_0, \end{aligned}$$

kde $T > 0$ a x_0 sú dané. Táto úloha sa líši od základnej úlohy iba tým, že koncový stav $x(T)$ nie je vopred zadaný. Miernou modifikáciou postupu z časti 2.2 možno odvodiť nutné podmienky aj pre takúto úlohu. Zrejme prípustné variačné krivky budú musieť spĺňať iba podmienku $\delta x(0) = 0$. To znamená prípustné budú aj variačné krivky spĺňajúce $\delta x(T) = 0$ aj $\delta x(T)$ ľubovoľné. Analogicky, ako v predchádzajúcom prípade, dostaneme vzťah (2.6a). Potom pomocou variačných kriviek, ktoré spĺňajú $\delta x(T) = 0$, dostaneme platnosť Eulerovej rovnice. Dosaďme ju do (2.6a). Z podmienky $\delta x(0) = 0$ dostaneme, že musí platiť

$$\frac{\partial f^0(T, \hat{x}(T), \dot{\hat{x}}(T))}{\partial \dot{x}} \delta x(T) = 0$$

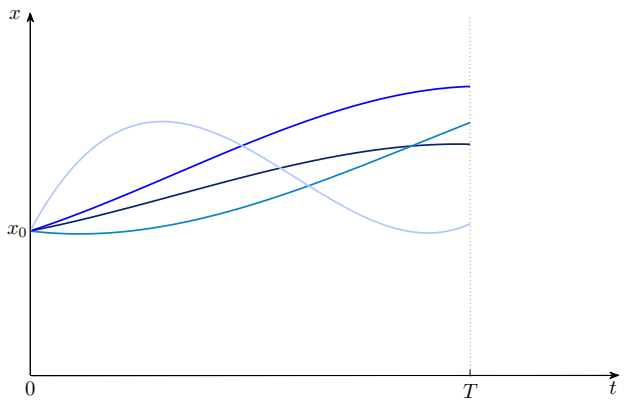
pre všetky variačné krivky $\delta x(.)$, (teda aj tie, ktoré majú $\delta x(T) \neq 0$). Dostávame teda podmienku

$$\frac{\partial f^0(T, \hat{x}(T), \dot{\hat{x}}(T))}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{3.1}$$

ktorú skrátene môžeme zapísať v tvare

$$\left(\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t=T} = 0. \tag{PT}$$

a nazveme ju *podmienkou transverzality* . Táto podmienka dopĺňa systém podmienok pre určenie $\hat{x}$ pre úlohu s voľným pravým koncom. Analogické podmienky v čase $t = 0$ možno odvodiť v prípade, že nie je zadané $x(0)$.



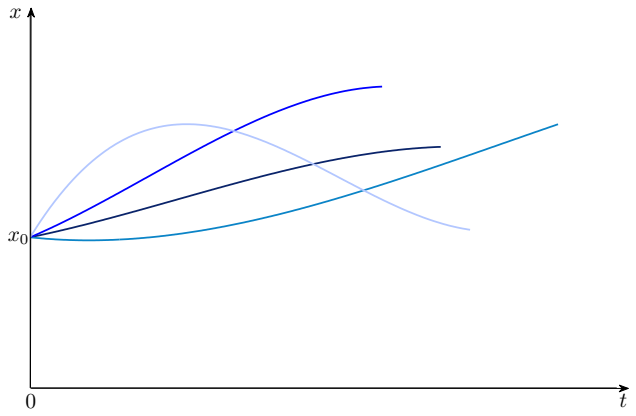
Obr. 3.1: Grafické znázornenie prípustných riešení úlohy s pevným časom a voľným koncom

3.2 Úloha s voľným časom a voľným koncom

V prípade, že nie je pevne zadaný koniec $x(T)$ ani koncový čas T, dostaneme úlohu

$$\begin{aligned} &\max I(x(.), T) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t, \\ &\text{pri podmienke } x(0) = x_0, \end{aligned}$$

kde x_0 je dané. V tomto prípade teda funkcionál I závisí nielen od krivky $x(.)$, ale aj od koncového času T intervalu $[0, T]$, na ktorom bude krivka definovaná. Aj v tomto prípade môžeme modifikovať odvodenie nutných podmienok z časti 2.2. Za triedu susedných kriviek treba zobrať krivky definované na intervaloch premenlivej dĺžky $[0, \hat{T}+\varepsilon\delta T]$



Obr. 3.2: Grafické znázornenie prípustných riešení úlohy s voľným časom a voľným koncom

a tomuto faktu sa dá prispôsobiť aj zvyšok dôkazu. Pri odvodzovaní nutných podmienok pritom treba zobrat do úvahy, že od ϵ bude závisieť nielen integrand, ale aj horná hranica príslušného integrálu. Ako výsledok k Eulerovej rovnici a k podmienke transverzality pribudne aj podmienka

$$f^0(\hat{T}, \hat{x}(\hat{T}), \dot{\hat{x}}(\hat{T})) = 0, \quad \text{skrátene} \quad f^0\Big|_{t=\hat{T}} = 0, \tag{3.2}$$

formálne umožňujúca vypočítať optimálne $\hat{T}$.

3.3 Úloha s voľným časom a pevným koncom

Ide o úlohu

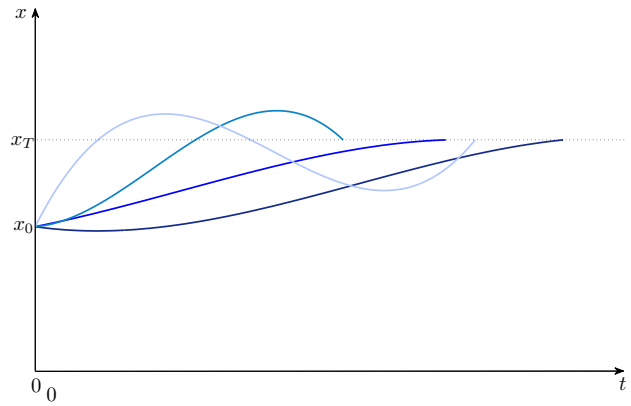
$$\max I(x(.), T) := \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$\text{pri podmienkach } x(0) = x_0,\ x(T) = x_T,$$

kde x_0 a x_T sú dané. Táto úloha je paradoxne na odvodenie nutných podmienok optimality komplikovanejšia ako predchádzajúca. Na korektné odvodenie nutných podmienok je potrebné použiť vetu o implicitnej funkcii. Ako výsledok k Eulerovej rovnici pribudne podmienka

$$f^0(\hat{T}, \hat{x}(\hat{T}), \dot{\hat{x}}(\hat{T})) - \frac{\partial f^0(\hat{T}, \hat{x}(\hat{T}), \dot{\hat{x}}(\hat{T}))}{\partial \dot{x}} \dot{\hat{x}}(T) = 0, \tag{3.3}$$

ktorú zapíšeme v skrátenej podobe ako

$$\left(f^0 - \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} \dot{\hat{x}} \right)\Bigg|_{t=\hat{T}} = 0, \tag{PS}$$



Obr. 3.3: Grafické znázornenie prípustných riešení úlohy s voľným časom a pevným koncom

a budeme ju nazývať *podmienkou stacionarity*.

Všimnime si, že v prípade, že platí podmienka transverzality, tak podmienka stacionarity je ekvivalentná s podmienkou (3.2).

3.4 Úloha s voľným časom a čiastočne pevným koncom

Ide o úlohu

$$\begin{aligned} &\max I(x(t),T) := \int_0^T f^0(t,x(t),\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } x(0)=x_0,\ x(T)=z(T), \end{aligned}$$

kde $z(.)$ je daná diferencovateľná funkcia. V tomto prípade extremálne riešenie spĺňa okrem Eulerovej rovnice aj nasledovnú podmienku

$$f^0(\hat{T},\hat{x}(\hat{T}),\dot{\hat{x}}(\hat{T})) - \frac{\partial f^0(\hat{T},\hat{x}(\hat{T}),\dot{\hat{x}}(\hat{T}))}{\partial \dot{x}}(\dot{\hat{x}}(\hat{T})-\dot{z}(\hat{T}))=0, \tag{3.4}$$

v skrátenom zápise

$$\left(f^0 - \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}(\dot{\hat{x}}-\dot{z})\right)\Bigg|_{t=\hat{T}} = 0. \tag{PS'}$$

Všimnime si, že keď $z(.) \equiv x_T$, (z čoho $\dot{z}=0$), dostávame úlohu s voľným časom a pevným koncom a podmienka (3.4) dáva (3.3).

3.5 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 3.1. Ilustrácia pre úlohu s voľným časom a (čiastočne) voľným koncom. V priestore (t, x) zakreslite ľubovoľnú funkciu $z(t)$ a ilustrujte prípustné krivky pre úlohu z odseku 3.4.

Úloha 3.2. Úloha s voľným časom a (čiastočne) voľným koncom. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie úlohy: [1]

$$\text{extr} \int_0^T (\dot{x}(t)^2 + x(t))\, dt, \quad T \text{ je voľné}$$

s okrajovými podmienkami

a) $x(0) = 1$, $x(T)$ je voľné;

b) $x(0) = 0$, $x(T) = T$.

Úloha 3.3. Úloha s voľným koncom a s pevným časom. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^\pi (\dot{x}(t)^2 + x(t)\cos t)\ \mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } x(0) = 0 \quad \text{a} \end{aligned}$$

(a) $x(\pi) = 2$,

(b) $x(\pi)$ je voľné.

Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum. Je splnená postačujúca podmienka optimality?

Úloha 3.4. Úloha s voľným koncom a s pevným časom. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^1 (\dot{x}(t)^2 + 2\dot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t))\ \mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } x(0) = 2,\ x(1) \text{ voľné.} \end{aligned}$$

Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum. Je splnená postačujúca podmienka optimality?

[1] Poznamenajme, že v prípade úloh s voľným časom nemožno aplikovať postačujúce podmienky v tvare sformulovanom pre úlohu s pevným časom. Úloha totiž musí spĺňať aj nejaký typ konvexnosti/konkávnosti vzhľadom na parameter T. V takomto prípade riešime úlohu najprv s pevným časom a vyjadríme riešenie $x(t; T)$ ako funkciu pevne daného parametra T. Overíme postačujúce podmienky optimality pri pevnom T. Následne vyjadríme hodnotu funkcionálu vo vypočítanom $x(t; T)$ ako funkciu T a analyzujeme jej konvexnosť/konkávnosť v T.

Úloha 3.5. Najkratšia spojnica bodu a priamky. Nájdite krivku najkratšej dĺžky, ktorá spája bod $(0, A)$ v priestore (t, x) s priamkou $t - T_d$, t.j. vyriešte nasledovnú úlohu variačného počtu:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^{T_d} \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt, \quad T_d \text{ je dané,} \\ &x(0) = A \text{ dané.} \end{aligned}$$

Úloha 3.6. Úloha s čiastočne voľným koncom a s voľným časom. Nájdite kandidátov na optimálne riešenie úlohy:

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^T \dot{x}(t)^2 dt, \quad T \text{ je voľné,} \\ &x(0) = 0, \\ &x(T) = -T - 1 \end{aligned}$$

Úloha 3.7. Parametrická úloha variačného počtu. Na nasledujúcom príklade možno ukázať, že

(i) úloha variačného počtu nemusí mať optimálne riešenie,

(ii) riešenie Eulerovej rovnice nemusí byť optimálnym,

(iii) Legendrove podmienky druhého rádu sú tiež len nutnými podmienkami.

Daná je nasledujúca úloha variačného počtu:

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^T \left(x(t)^2 + ax(t)\dot{x}(t) + b(\dot{x}(t))^2\right) \mathrm{d}t \\ &\text{pri podmienkach } x(0) = x_0, \ x(T) = x_T, \end{aligned}$$

kde $T > 0$, x_0, x_T, $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$ sú dané parametre.

a) Ako je výsledok ovplyvnený parametrom a? Prečo?

b) Nájdite kandidátov na riešenie pre túto úlohu pre $b = 1$, $b = 0$ a $b = -1$. Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum.

c) Ukážte, že pre úlohu s parametrom $b = -1$ nie je splnená postačujúca podmienka optimality druhého rádu. Uvažujte prípad $T = 2\pi$ a $x_0 = x_T = 0$. V tomto prípade možno ukázať, že Eulerova rovnica dáva nekonečne veľa kandidátov na maximum, ale maximum v skutočnosti neexistuje. Konkrétne ukážte, že $x(t) = t - \dfrac{t^2}{2\pi}$ je prípustné riešenie, pričom hodnota uvažovaného funkcionálu je pre toto riešenie vyššia ako pre riešenia Eulerovej rovnice.

Úloha 3.8. Ekonomická aplikácia (Hotelling, 1931). Majiteľ uhoľnej bane s celkovými zásobami uhlia B sa rozhoduje, koľko uhlia má v ktorom období vyťažiť tak, aby jeho celkový diskontovaný zisk bol čo najväčší. Nech $x(t)$ označuje celkový objem vyťaženého a predaného uhlia do času t a $\dot{x}(t)$ označuje tempo ťažby / predaja. Predpokladáme, že čistá jednotková cena (t.j. cena po odpočítaní nákladov na ťažbu) $p(\dot{x})$ je kladná klesajúca funkcia $\dot{x}$ spĺňajúca podmienku

$$\lim_{y \to 0} p'(y) < 0.$$

a) Sformulujte model v tvare úlohy variačného počtu s voľným časom a pevným koncom.

b) Napíšte Eulerovu rovnicu a ekonomicky ju interpretujte.

c) Pomocou Eulerovej rovnice, podmienky stacionarity, podmienky v koncovom čase a postačujúcich podmienok pre maximum ukážte, že optimálne tempo ťažby/predaja je klesajúcou funkciou v čase (t.j. že $\hat{x}(t)$ je klesajúca v t) a platí $\hat{x}(\hat{T}) = 0$.

Úloha 3.9. Ohraničenie typu nerovnosti na koncový stav. Ukážte, že ak v základnej úlohe variačného počtu zameníme podmienku $x(T) = x_T$ za podmienku typu nerovnosti $x(T) \geq x_T$, tak dostaneme nutnú podmienku optimality v tvare Eulerovej rovnice a podmienky $\frac{\partial f^0(T,\hat{x}(T),\dot{\hat{x}}(T))}{\partial \dot{x}} \leq 0$, $\frac{\partial f^0(T,\hat{x}(T),\dot{\hat{x}}(T))}{\partial \dot{x}}(\hat{x}(T) - x_T) = 0$. Návod: [25], str. 34.

Kapitola 4

Niektoré špeciálne úlohy variačného počtu

4.1 Viacrozmerné úlohy

V časti 2.1 sme vlastne definovali funkcionál na triede viacrozmernych kriviek $x(.) : [0,T] \to R^n$ a odvodenie Eulerovej rovnice v kapitole 2.2 v tomto prípade dáva vektorovú Eulerovu rovnicu $f^0_x - \frac{d}{dt} f^0_{\dot{x}} = 0$, kde f^0_x a $f^0_{\dot{x}}$ sú n-rozmerné vektory, t.j. Eulerova rovnica predstavuje systém n rovnic

$$f^0_{x_i} - \frac{d}{dt} f^0_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Rozpísaním týchto rovníc v prípade, že $n = 2$ dostaneme:

$$f^0_{x_1} - f^0_{t\dot{x}_1} - f^0_{x_1\dot{x}_1}\dot{x}_1 - f^0_{\dot{x}_1\dot{x}_1}\ddot{x}_1 - f^0_{x_2\dot{x}_1}\dot{x}_2 - f^0_{\dot{x}_2\dot{x}_1}\ddot{x}_2 = 0,$$

$$f^0_{x_2} - f^0_{t\dot{x}_2} - f^0_{x_2\dot{x}_2}\dot{x}_2 - f^0_{\dot{x}_2\dot{x}_2}\ddot{x}_2 - f^0_{x_1\dot{x}_2}\dot{x}_1 - f^0_{\dot{x}_1\dot{x}_2}\ddot{x}_1 = 0.$$

4.2 Úlohy vyššieho rádu

Ide o úlohy nasledujúceho typu:

$$I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x, \dot{x}, ..., x^{(k)})dt \to \text{extr}, \tag{4.1}$$

napríklad pri podmienkach

$$x^{(j)}(0) = x^j_0, \quad x^{(j)}(T) = x^j_T, \quad j = 0, ..., k-1, \tag{4.2}$$

kde $f^0 \in C^{n+1}, x^j_0, x^j_T, T$ sú dané. Úplne analogicky ako v časti 2.2 sa dá dokázať (pomerne priamočiaro – viď Úloha 4.5), že optimálne riešenie v každom $t \in [0,T]$

spĺňa tzv. *Euler–Poissonovu rovnicu*:

$$f^0_x - \frac{d}{dt} f^0_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} f^0_{\ddot{x}} - ... + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f^0_{x^{(k)}} = 0.$$

Je to diferenciálna rovnica rádu $2k$. Preto na určenie jej jediného riešenia potrebujeme $2k$ podmienok. V tomto prípade máme podmienky zadané v úlohe. V pripade, že niektoré chýbajú, systém podmienok doplní vhodná podmienka transverzality.

4.3 Bolzova úloha

Pod Bolzovou úlohou vo všeobecnosti rozumieme úlohu, kde funkcionál závisí aj od funkcie koncového, resp. počiatočného stavu. Takouto úlohou je napríklad:

$$I(x(.)) := \int_0^T f^0(t, x, \dot{x})dt + \varphi(x(0), x(T)) \to \text{extr},$$

kde $\varphi \in C^3$, T sú dané. Dá sa priamočiaro, postupom z časti 2.2 odvodiť, že optimálne riešenie spĺňa Eulerovu rovnicu a modifikované podmienky transverzality v tvare

$$f^0_{\dot{x}}|_{t=0} = \varphi_{x(0)}, \quad f^0_{\dot{x}}|_{t=T} = -\varphi_{x(T)}.$$

4.4 Izoperimetrická úloha

Ide o úlohu, kde v podmienkach vystupuje integrálna väzba. Takouto úlohou je napríklad

$$\int_0^T f^0(t, x, \dot{x})dt \to \text{extr}$$

pri podmienkach

$$\int_0^T f^i(t, x, \dot{x})dt = \alpha_i, \; i = 1, ...m, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T,$$

kde $f^i \in C^2$, x_0, x_T sú dané. K takejto úlohe definujeme Lagrangeovu funkciu

$$L(t, x, \dot{x}, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f^i(t, x, \dot{x}).$$

Ak $\hat{x}(.)$ je optimálne riešenie pre takúto úlohu, potom existujú $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$: $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \neq 0$ také, že pre každé $t \in [0, T]$ platí

$$L_x(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, \lambda) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, \lambda) = 0.$$

4.5 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 4.1. Viacrozmerná úloha. Nájdite všeobecné riešenie Eulerovej rovnice prislúchajúcej k funkcionálu

$$I(x,y) := \int_0^T (x(t) + y(t) + \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)dt.$$

Úloha 4.2. Úloha vyššieho rádu. Riešte nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^1 \ddot{x}(t)^2 dt, \\ &x(0) = \dot{x}(0) = x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1. \end{aligned}$$

Úloha 4.3. Bolzova úloha. Dokážte, že optimálne riešenie Bolzovej úlohy variačného počtu v tvare

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^T f^0(t,x,\dot{x})dt + \varphi(x(T)), \quad T \text{ je dané}, \\ &x(0) = x_0 \text{ je dané}, \\ &x(T) = x_T \text{ je voľné}, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in C^2$, spĺňa Eulerovu rovnicu a modifikovanú podmienku transverzality v tvare

$$f^0_{\dot{x}}(T, \hat{x}(T), \dot{\hat{x}}(T)) = -\varphi'(\hat{x}(T)).$$

Úloha 4.4. Izoperimetrická úloha. Riešte nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr} \int_0^1 \dot{x}(t)^2 \, dt, \\ &\int_0^T x(t) \, dt = 0, \\ &x(0) = 0, \ x(1) = 1. \end{aligned}$$

Úloha 4.5. Odvodenie Euler–Poissonovej rovnice. Odvoďte nutné podmienky optimality pre úlohu (4.1)–(4.2) v prípade (a) $k = 2$, (b)* všeobecného k. Ako sa zmenia, keď vynecháme niektorú z podmienok (4.2)? Konkretizujte!

Úloha 4.6. Dôkaz pre izoperimetrickú úloha. Odvoďte nutné podmienky optimality pre izoperimetrickú úlohu z odseku 4.4. Použite pritom tzv. Caratheodoryho vetu (jej dôkaz možno nájsť napr. v ([14], Veta 7.3), podľa ktorej, ak $\varepsilon = 0$ je extrémom funkcie $f^0(\varepsilon)$ pri väzbách $f^i(\varepsilon) = 0$, $i = 1, ..., m$, (kde $f^i \in C^1, i = 0, 1, ..., m$), potom existujú $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m : (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \neq 0$ také, že platí

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \frac{df^i(0)}{d\varepsilon} = 0.$$

Časť III

Úlohy optimálneho riadenia s konečným časom

Kapitola 5

Autonómna úloha s voľným časom. Pontrjaginov princíp maxima (PPM)

V tejto kapitole sformulujeme nutné podmienky optimality, nazývané aj Pontrjaginov princíp maxima, pre autonómnu úlohu optimálneho riadenia s voľným časom. Vysvetlíme význam týchto podmienok na riešenie úloh. Podmienky optimality pre autonómnu úlohu s voľným časom budú v ďalších kapitolách tvoriť základ a východisko pre odvodenie nutných podmienok pre iné typy úloh.

5.1 Formulácia autonómnej úlohy s voľným časom

Budeme sa zaoberať autonómnou úlohou s voľným časom, bez ohraničení na stavovú premennú, s Lagrangeovou účelovou funkciou, opísanú nasledovne:

$$\max J(T, u(.)) := \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt, \ T \text{ voľné}, \tag{5.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \tag{5.2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{5.3}$$

$$x(T) \in C = \{x \mid g(x) = 0\}, \tag{5.4}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \tag{5.5}$$

kde $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ sú dané funkcie, $U \in \mathbb{R}^m$ je daná množina a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je daný počiatočný stav. Budeme predpokladať, že $f, f^0, g \in C^1$. Ďalej budeme predpokladať, že $l \leq n$ a že vektory $\frac{\partial g^i(x)}{\partial x}$ sú lineárne nezávislé pre každé $x \in C$. Tento predpoklad budeme nazývať predpoklad regularity - označenie (PR) a celú úlohu budeme nazývať *štandardnou autonómnou úlohou optimálneho riadenia s voľným časom.*

5.2 Formulácia PPM

V tejto časti sformulujeme Pontrjaginov princíp maxima pre štandardnú autonómnu úlohu s voľným časom. Podobne ako v diskrétnom prípade, aj tu bude do formulácie vstupovať nová premenná $\psi \in \mathbb{R}^n$ a konštanta $\psi^0 \geq 0$. Premennú ψ nazývame *adjungovanou premennou*, je to v určitom zmysle duálna premenná k stavovej premennej x a má rovnaký rozmer ako x.

K úlohe priradíme Hamiltonovu funkciu (Hamiltonián) v tvare

$$H(x, u, \psi, \psi^0) := \psi^0 f^0(x, u) + \psi^T f(x, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi^i f^i(x, u). \tag{HF}$$

Nech teraz $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$, je optimálne riadenie pre ŠÚOR a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva. Optimálne riadenie a jeho odozva zrejme spĺňajú stavovú rovnicu (5.2), čo môžeme pomocou Hamiltoniánu zapísať nasledovne

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(\frac{\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0)}{\partial \psi} \right)^T.$$

Optimálna odozva $\hat{x}(t)$ zrejme spĺňa počiatočnú (5.3) a koncovú podmienku (5.4):

$$\hat{x}(0) = x_0, \quad g(x(\hat{T})) = 0.$$

Pod *adjungovanou rovnicou* (AR) rozumieme

$$\dot{\psi}(t) = -\left(\frac{\partial H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0)}{\partial x} \right)^T, \tag{AR}$$

čo vlastne znamená, že

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \psi(t),$$

prípadne ešte v inom zápise je to

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=0}^{n} \psi^i(t) \left(\frac{\partial f^i(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T,$$

kde $\psi^0(t) := \psi^0$.

Pre adjungovanú premennú definujeme koncovú podmienku v tvare tzv. *podmienky transverzality* (PT) pomocou ďalšej premennej $\chi \in \mathbb{R}^l$ nasledovne:

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \right)^T \chi. \tag{PT}$$

Je zrejmé, že

$$\psi(\hat{T}) = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial g^i(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \right)^T \chi^i,$$

čo umožňuje interpretovať podmienku transverzality ako podmienku na koncový stav adjungovanej funkcie, ktorý má byť z priestoru generovaného gradientmi ohraničení $g^i, i = 1, ..., l$ v koncovom stave stavovej premennej, t.j. $\psi(\hat{T})$ je kolmé – transverzálne na C v bode $\hat{x}(\hat{T})$. Poznamenajme, že pre úlohu s voľným koncom, kde nemáme žiadne g^i, kladieme $\psi(\hat{T}) = 0$ (formálne $\chi = 0$).

Všimnime si, že (AR) je lineárna vektorová diferenciálna rovnica typu $\dot{\psi} = b(t) + A(t)\psi$, kde $b(t)$ a $A(t)$ sú vo všeobecnosti nespojité v tých t, kde $\hat{u}(t)$ vykazuje nespojitosť. Preto pod riešením tejto rovnice budeme rozumieť po čiastkach hladké riešenie (v bodoch nespojitosti $u(t)$ spojite napojené - analogicky ako pri stavovej rovnici). Akonáhle poznáme χ a ψ^0, tak riešenie (AR) a (PT) je jednoznačne určené a definované na celom $[0, \hat{T}]$. Ďalej, ľahko sa dá ukázať (viď Úloha 5.10), že $(\psi^0, \chi) \neq 0$ vtedy a len vtedy, keď $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0$ pre každé $t \in [0, \hat{T}]$.

Nakoniec, pod *podmienkou maxima* (PM) budeme rozumieť:

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = \max_{u \in U} H(\hat{x}(t), u, \psi(t), \psi^0), \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}] \tag{PM}$$

a *podmienkou stacionarity* (PS) :

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv 0, \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}]. \tag{PS}$$

Teraz máme definované všetky prvky vstupujúce do nutných podmienok optimality a teda ich možeme sformulovať vo forme vety nasledovne:

Veta 5.1 (**Pontrjaginov princíp maxima**). *Nech $\hat{u}\,(t)\,,\ t \in [0, \hat{T}]$, je optimálne riadenie pre štandardnú autonómnu úlohu s voľným časom a nech $\hat{x}\,(t)$ je jeho odozva. Potom existuje také $(\psi^0, \chi) \neq 0$, kde $\psi^0 \geq 0$ a $\chi \in R^l$, že $\psi(t)$, spojité riešenie adjungovanej rovnice (AR) a podmienky transverzality (PT), spolu s $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ spĺňajú podmienku maxima (PM) a podmienku stacionarity (PS).*

Dôkaz je dlhý a ťažký, preto ho vynecháme. Poznamenajme, že postup pri odvodzovaní nutných podmienok optimality z variačného počtu tu nemôžeme aplikovať hlavne kvôli ohraničeniu na riadenie. Optimálne riadenie totiž veľmi často leží na hranici množiny U a nastávajú problémy ako definovať susedné riadenia a susedné odozvy, aby pomocou nich bolo možné odvodiť podmienky, ktoré spĺňa optimálne riadenie, ale nie k nemu susedné.

V optimálnom riadení sa teda definuje iný typ variácie riadenia, a to tzv. ihlicovité riadenie, ktoré modifikuje optimálne riadenie v konečnom počte malých podintervalov tak, že na nich je variácia riadenia konštantne rovná nejakej ľubovoľne zvolenej hodnote z množiny U. Využitím pokročilej teórie diferenciálnych rovníc sa skonštruujú odozvy

na takéto variácie a skúma sa množina ich koncových stavov. Táto analýza umožní zostrojiť vektor $(\psi^0, \chi) \neq 0$ a pomocou neho dokázať, že príslušné riešenie (AR) a (PT) spĺňajú (PM) a (PS). $\square$

5.3 Poznámky

(a) Všimnime si, že (AR) ako aj (PM) sú lineárne v (ψ^0, ψ). Z toho vyplýva, že ak $\hat{x}, \hat{u}$ spĺňajú PPM s nejakým $(\psi^0, \psi(t))$, potom $\hat{x}, \hat{u}$ spĺňajú PPM aj s $c(\psi^0, \psi(t))$, $c > 0$. Pretože podľa PPM bolo $\psi^0 \geq 0$, zrejme stačí uvažovať iba dve možné hodnoty ψ^0, a to 0 a 1.

(b) PPM bol sformulovaný pre úlohu na maximum. V prípade, že máme úlohu na minimum, tak ju možeme previesť na úlohu na minimum tým, že vezmeme účelovú funkciu, resp. podintegrálnu funkciu $f^0(x, u)$ s opačným znamienkom. Keď si však lepšie všimneme podmienky PPM, tak vidíme, že funkcia $f^0(x, u)$ vystupuje všade s multiplikátorom ψ^0. Preto zmenu znamienka v $f^0(x, u)$ môžeme preniesť na zmenu znamienka v multiplikátore ψ^0. Ako výsledok dostávame, pre úlohu na minimum stačí uvažovať hodnoty $\psi^0 = -1$ alebo $\psi^0 = 0$, zatiaľ čo pre úlohu na maximum stačilo podľa predchádzajúcej poznámky uvažovať $\psi^0 = 1$ alebo $\psi^0 = 0$.

(c) PPM dáva formálne dosť podmienok na určenie $\hat{x}$, $\hat{u}$, T (a ψ). Skutočne, v prípade voľného $u \in R^m$, dáva (PM) m podmienok pre u. Diferenciálne rovnice (5.2) a (AR) spolu s počiatočnými podmienkami, koncovými podmienkami a podmienkami transverzality dávajú podmienky pre funkcie $x(.)$, $\psi(.)$. Podmienka (PS) je podmienkou pre T a pomáha častokrát vylúčiť prípad ψ^0.

(d) PPM je nutnou podmienkou optimality. Riešením týchto podmienok získame iba kandidátov na optimálne riešenie úlohy. Ak získame práve jedného kandidáta a z iných zdrojov (existenčné vety) budeme vedieť, že úloha má optimálne riešenie, tak tento jediný kandidát je aj optimálnym riešením. V niektorých prípadoch je však PPM, ako uvidíme neskôr, aj postačujúcou podmienkou.

(e) V prípade, že máme úlohu na voľný koniec, kde $C = R^n$, tak sa dá dokázať, že $\chi = 0$ (nemáme ohraničenie na koncový stav a teda príslušný multiplikátor pre ohraničenia na koncový stav je nulový). Z toho vyplýva, že $\psi(T) = 0$ a $\psi^0 = 1$.

(f) Vo všeobecnosti platí

$$x^i(\hat{T}) = \begin{cases} \text{voľné}, & \text{pre } i = 1, \ldots, n' \\ x^i_T, & \text{pre } i = n'+1, \ldots, n \end{cases} \Rightarrow \psi^i(\hat{T}) = \begin{cases} 0, & \text{pre } i = 1, \ldots, n' \\ \chi^i, & \text{pre } i = n'+1, \ldots, n \end{cases}$$

5.4 Riešenie úloh

Príklad 5.1. Nájdite T, prípustné riadenie a jeho odozvu, ktoré spĺňajú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu najrýchlejšieho prechodu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovať} \quad & T, \\ \text{pri podmienkach} \quad & \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad t \in [0, T], \\ & x(0) = 5, \quad x(T) = 11, \\ & u(t) \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Riešenie[1]**:** (a) *Charakterizácia úlohy.* Všimnime si, že v zadaní úlohy sa nenachádzajú žiadne ohraničenia na stavové premenné, úloha je autonómna a čas je voľný. Ide o minimalizačnú úlohu. Stavová aj riadiaca premenná je jednorozmerná, $f = x + u$, $g = x - 11$ a keďže $T = \int_0^T 1dt$, tak $f^0 = 1$. Keďže $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, je splnený predpoklad (PR) o lineárnej nezávislosti gradientov funkcií g. Preto na úlohu možeme aplikovať vetu z predchádzajúceho odseku. Hľadáme prípustné riadenie $\hat{u}$, jeho odozvu $\hat{x}$ a čas $\hat{T}$, ktoré spĺňajú nutné podmienky.

(b) *Zápis nutných podmienok.* Hamiltonova funkcia má tvar

$$H = \psi^0 + \psi(x + u), \tag{HF}$$

z nej dostaneme adjungovanú rovnicu

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi. \tag{AR}$$

Keďže $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, podmienkou transverzality je

$$\psi(\hat{T}) = \chi. \tag{PT}$$

Má byť $(\psi^0, \chi) \neq 0$, pričom $\psi^0 = 0$ alebo $\psi^0 = -1$. Príslušné riešenie (AR) a (PT) spolu s $\hat{u}$, a $\hat{x}$ majú spĺňať podmienku maxima

$$\psi^0 + \psi(t)(\hat{x}(t) + \hat{u}(t)) = \max_{u \in [-1,1]} (\psi^0 + \psi(t)(\hat{x}(t) + u), \ \forall t \in [0, \hat{T}] \tag{PM}$$

a podmienku stacionarity

$$\psi^0 + \psi(t)(\hat{x}(t) + \hat{u}(t)) = 0, \forall t \in [0, \hat{T}]. \tag{PS}$$

(c) *Analýza nutných podmienok.* Poďme najprv analyzovať podmienku maxima a pozrime sa na ňu ako na statickú podmienku, ktorú formálne zapíšeme ako

$$H = \psi^0 + \psi(\hat{x} + u) \to \max_{u \in [-1,1]}. \tag{5.6}$$

[1] Všimnime si, že v tejto úlohe sa dá optimálne riadenie ľahko odhadnúť.

Táto úloha je ekvivalentná s úlohou

$$\psi u \to \max_{u\in[-1,1]}$$

a jej riešením dostávame

$$\hat{u} = \begin{cases} 1, & \text{ak} \quad \psi > 0 \\ -1, & \text{ak} \quad \psi < 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak} \quad \psi = 0 \end{cases}.$$

Vidíme, že sa nám podarilo vyjadriť riadenie ako funkciu adjungovanej premennej. Riadenie, až na výnimočný prípad, kedy $\psi = 0$, nadobúda iba krajné hodnoty intervalu $[-1, 1]$ v závislosti od znamienka ψ. Aby sme mohli postúpiť v analýze ďalej, potrebujeme zistiť, ako sa ψ mení s časom. Z adjungovnej rovnice dostaneme

$$\dot{\psi} = -\psi \Rightarrow \psi(t) = ke^{-t}. \tag{5.7}$$

a riešenie sĺňajúce aj podmienku transverzality má tvar

$$\psi(t) = \chi e^{\hat{T}-t}.$$

Všimnime si, že $\psi(t)$ nemení znamienko, $\psi(t)$ je stále buď kladné, rovné nule, alebo záporné v závislosti od konštanty χ. To znamená, že ak $\chi > 0$, tak $\hat{u}(t) \equiv 1$, ak $\chi < 0$, tak $\hat{u}(t) \equiv -1$ a ak $\chi = 0$, tak $\hat{u}(t)$ nevieme určiť.

(d) *Analýza prípadov na určenie riadenia.* Poďme vylúčiť prípad $\chi = 0$, kedy riadenie nie je jednoznačne určené z podmienky maxima. Ak by $\chi = 0$, tak by sme z podmienky $(\psi^0, \chi) \neq 0$ dostali, že $\psi^0 = -1$. Dosadením $\psi^0 = -1$ a $\psi(t) = 0$ do Hamiltonovej funkcie by sme dostali, že $H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv -1$, čo je spor s podmienkou stacionarity (PS). Z toho vyplýva, že $\chi \neq 0$ a dostávame iba dvoch kandidátov na optimálne riadenie: $\hat{u} \equiv 1$ alebo $\hat{u} \equiv -1$.

Teraz znova použijeme podmienku stacionarity (PS), tentoraz iba v koncovom čase $t = \hat{T}$, kde má platiť $H|_{t=\hat{T}} = 0$. Dosadiac do tohto výrazu všetky známe hodnoty dostaneme

$$\psi^0 + \psi(\hat{T})(\hat{x}(\hat{T}) + \hat{u}(\hat{T})) = \psi^0 + \chi(11 + \pm 1) = 0. \tag{5.8}$$

Pretože $\chi(11 + \pm 1) \neq 0$ dostávame, že musí byť $\psi^0 = -1$ a $\chi > 0$, aby mohla platiť rovnosť (5.8). Z toho vyplýva, že

$$\hat{u}(t) \equiv 1.$$

Podmienka (PS) teda umožnila vylúčiť prípad $\chi < 0$ a $\hat{u}(t) \equiv 1$ zostáva jediným kandidátom na optimálne riadenie.

(e) *Určenie odozvy a optimálneho času. Zápis riešenia.* Vypočítame odozvu na riadenie $u(t) \equiv 1$. Zrejme

$$\dot{x} = x + 1 \Rightarrow x(t) = e^t x_0 + \int_0^t e^{t-s} ds = 5e^t + e^t[-e^{-s}]_0^t = 6e^t - 1.$$

Ostáva určiť optimálny čas. Ten určíme z podmienky na koncový stav:

$$11 = x(\hat{T}) = 6e^{\hat{T}} - 1 \Rightarrow \hat{T} = \ln 2.$$

Dostali sme jediného kandidáta na optimálne riadenie

$$\hat{u}(t) = 1, \quad t \in [0, \ln 2],$$

jeho odozvou je

$$\hat{x}(t) = 6e^t - 1, \quad t \in [0, \ln 2].$$

Všimnime si, z podmienky stacionarity môžeme určiť χ:

$$H = -1 + \chi(11 + 1) = 0 \Rightarrow \chi = \frac{1}{12},$$

a teda určené riadenie a jeho odozva spĺňajú PPM spolu s $\psi^0 = -1$ a $\psi(t) = \frac{1}{12}e^{\hat{T}-t} = \frac{1}{6}e^{-t}$. Tým je úloha vyriešená.

Príklad 5.2. Nájdite T a riadenie spĺňajúce podmienky PPM pre nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T \left(k + \frac{u(t)^2}{2}\right) dt, \\
&\dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad x^1(0) = a_1 \\
&\dot{x}^2(t) = x^3(t), \quad x^2(0) = a_2 \\
&\dot{x}^3(t) = u(t), \quad x^3(0) = a_3, \quad x^3(T) = 0,
\end{aligned}$$

kde $k > 0$, $a_3 > 0$ a a_1, a_2 sú ľubovoľné konštanty. Poznamenajme, že konštantu k možno interpretovat ako váhu medzi dvoma optimalizačnými kritériami, z ktorých prvé minimalizuje čas T a druhé kvadratickú odchýlku riadenia od nulovej hodnoty.

Riešenie: (a) *Charakterizácia úlohy.* Opäť ide o minimalizačnú úlohu, autonómnu, bez ohraničení na riadenie a stav. Zrejme $n = 3$, $m = 1$, $l = 1$, $g(x^1, x^2, x^3) = x^3$, a teda $\frac{\partial g}{\partial x} = (0, 0, 1)^T$, čo znamená, že je splnená podmienka regularity (PR). Môžeme aplikovať podmienky PPM, hľadajúc prípustné riadenie $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$, ktoré by ich spĺňalo spolu so svojou odozvou $\hat{x}(t)$.

(b) *Zápis nutných podmienok.* Hamiltonova funkcia má tvar

$$H = \psi^0 f^0 + \psi^1 f^1 + \psi^2 f^2 + \psi^3 f^3 = \psi^0 \left(k + \frac{u^2}{2}\right) + \psi^1 x^2 + \psi^2 x^3 + \psi^3 u. \qquad \text{(HF)}$$

Z nej dostávame (AR) v tvare

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^1 &= -\frac{\partial H}{\partial x^1} = 0, \\
\dot{\psi}^2 &= -\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\psi^1, \\
\dot{\psi}^3 &= -\frac{\partial H}{\partial x^3} = -\psi^2.
\end{aligned}$$

Dosadením do podmienky transverzality dostávame

$$\psi^1(\hat{T}) = \psi^2(\hat{T}) = 0 \text{ a } \psi^3(\hat{T}) = \chi. \tag{PT}$$

Má byť $(\psi^0, \chi) \neq 0$ a $\psi^0 = 0$ alebo $\psi^0 = -1$. V každom $t \in [0, \hat{T}]$ má byť splnená (PM) (kvôli jednoduchosti zápisu vynechávame v nej argument t):

$$\psi^0\left(k + \frac{\hat{u}^2}{2}\right) + \psi^1\hat{x}^2 + \psi^2\hat{x}^3 + \psi^3\hat{u} = \max_u \left(\psi^0\left(k + \frac{u^2}{2}\right) + \psi^1\hat{x}^2 + \psi^2\hat{x}^3 + \psi^3 u\right) \tag{PM}$$

a podmienka stacionarity

$$\psi^0\left(k + \frac{\hat{u}^2(t)}{2}\right) + \psi^1\hat{x}^2(t) + \psi^2\hat{x}^3(t) + \psi^3\hat{u}(t) = 0. \tag{PS}$$

(c) *Analýza nutných podmienok.* Podmienku maxima formálne zapíšeme ako:

$$\psi^0\left(k + \frac{u^2}{2}\right) + \psi^1\hat{x}^2 + \psi^2\hat{x}^3 + \psi^3 u \to \max_{u\in\mathbb{R}}. \tag{5.9}$$

Na jej riešenie potrebujeme vylúčiť prípad $\psi^0 = 0$. K tomu bude výhodné pozrieť sa na riešenie (AR) a (PT). Zrejme

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^1 = 0,\ \psi^1(\hat{T}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \psi^1 \equiv 0 \Rightarrow \\ \dot{\psi}^2 = -\psi^1,\ \psi^2(\hat{T}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \psi^2 \equiv 0 \Rightarrow \\ \dot{\psi}^3 = -\psi^2,\ \psi^3(\hat{T}) = \chi \quad &\Rightarrow \quad \psi^3(t) \equiv \chi, \end{aligned} \tag{5.10}$$

z čoho vidíme, že ψ^3 je konštantné. Ak by teraz $\psi^0 = 0$, tak (PM) vedie na maximalizáciu lineárnej funkcie $\psi^3 u$. Lineárna funkcia na $\mathbb{R}$ nadobúda extrém iba ak je konštantná, t.j. ak $\psi^3 = \chi = 0$. To však nie je možné, lebo ψ^0 a χ súčasne nesmú byť rovné nule. Preto $\psi^0 = -1$ a (PM) je ekvivalentná podmienke

$$-\left(k + \frac{u^2}{2}\right) + \psi^3 u \to \max_u.$$

Vyjadríme z nej riadenie ako funkciu stavovej a riadiacej premennej. Keďže hľadáme maximum konkávnej funkcie, riešenie (PM) dostaneme z nutnej podmienky prvého rádu (ktorá je zároveň aj postačujúcou):

$$u = \psi^3.$$

Keďže (PM) platí v každom $t \in [0, T]$, zapojíme dynamiku a využijúc (5.10) dostaneme, že

$$\hat{u}(t) = \psi^3(t) = \chi.$$

Vidíme, že ak úloha má optimálne riadenie, tak toto bude konštantné. Ostáva určiť konštantu χ.

(d) *Dourčenie riadenia a koncového času.* Najprv určíme znamienko konštanty χ. Dosaďme $\hat{u}(t) = \chi$ do diferenciálnej rovnice pre x^3 a vyriešme ju so zadanou počiatočnou podmienkou. Dostaneme, že $x^3(t) = \chi t + a^3$. Z koncovej podmienky $x^3(T) = 0$ dostávame, že

$$\chi = -\frac{a_3}{T}.$$

Pretože v zadaní je $a_3 > 0$ a $T > 0$, tak zrejme $\chi < 0$. Dosaďme teraz riadenie $\hat{u} = \chi$ do Hamiltonovej funkcie. Má platiť podmienka stacionarity a teda

$$H = -\left(k + \frac{\chi^2}{2}\right) + \chi^2 = 0$$

Z toho vyplýva

$$\chi = \pm\sqrt{2k},$$

ale pretože sme už predtým ukázali, že $\chi < 0$, tak

$$\hat{u}(t) = \chi = -\sqrt{2k} \quad \text{a} \quad \hat{T} = \frac{a_3}{\sqrt{2k}}.$$

Tým je úloha vyriešená.

Postup, ktorý sme použili pri riešení týchto úloh, je dosť charakteristický. Pri riešení trochu zložitejších úloh vždy pomáha najprv vyjadriť riadenie z podmienky maxima ako funkciu stavovej a adjungovanej premennej a až potom zapojiť do analýzy možný časový priebeh jednotlivých premenných. Pri riešení úloh tiež vynechávame niektoré úplné zápisy (PM) a (PS) a nahrádzame ich skrátenými formálnymi zápismi napr. typu (5.9).

5.5 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 5.1. Nech $\hat{u}(t), t \in [0, \hat{T}]$, je optimálne riadenie a nech $\hat{x}(t)$ je optimálna odozva pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T [(x^2)^2 - x^1(u)^2]dt, \quad T \text{ je voľné},\\
&\dot{x}^1 = (x^1)^2 + 2x^2u,\\
&\dot{x}^2 = x^1 + 4(x^2)^2u,\\
&x^1(0) = 0,\ x^2(0) = 0,\ x^1(T) + x^2(T) = 8,\\
&u(t) \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Napíšte podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre toto riadenie. Podmienky napíšte čo najpresnejšie, dosadením príslušných vzťahov zo zadania do vzorcov v PPM, bez formálneho skracovania zápisov použitých pri riešení úloh.

Úloha 5.2. Nájdite riešenie podmienok PPM pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\min T, \quad T \text{ je voľné},\\
&\dot{x}(t) = 2u(t),\\
&x(0) = 10,\\
&x(T) = 0\\
&u \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Úloha 5.3. Nájdite riadenie a jeho odozvu spĺňajúce podmienky PPM pre nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T (u(t)^2 + 1)dt, \quad T \text{ je voľné},\\
&\dot{x}(t) = 2u(t),\\
&x(0) = 10,\\
&x(T) = 0.
\end{aligned}$$

Ukážte, že rovnaké riešenie možno dostať aj transformovaním úlohy na úlohu variačného počtu a riešením Eulerovej rovnice.

Úloha 5.4. Nájdite riadenie a jeho odozvu spĺňajúce podmienky PPM pre nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T (u(t)^2 + 3)dt, \quad T \text{ je voľné},\\
&\dot{x}(t) = x(t) + u(t),\\
&x(0) = 1,\\
&x(T) = -15.
\end{aligned}$$

Úloha 5.5. Sformulujte podmienky PPM pre nasledovnú úlohu a nájdite ich riešenie:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2}\right) dt, \quad T \text{ voľné},\\
&\dot{x} = y,\\
&\dot{y} = u,\\
&x(0) = 1,\ y(0) = 0,\\
&x(T) = 0,\ y(T) = 0.
\end{aligned}$$

Úloha 5.6. Dvojsektorový model Sformulujte podmienky PPM pre nasledovnú úlohu a nájdite ich riešenie pre $\psi^0 = 1$:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T \frac{1}{2}(ax+by)dt, \quad T \text{ voľné},\\
&\dot{x} = \frac{1}{2}u(ax+by),\\
&\dot{y} = \frac{1}{2}(1-u)(ax+by),\\
&x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\\
&cx(T) + dy(T) = A,\\
&u \in [0,1],
\end{aligned}$$

kde x_0, y_0, a, b, c, d, A sú kladné konštanty a platí $a > b$, $c > d$. Predpokladajme navyše, že $cx_0 + dy_0 < A$.

Ekonomická interpretácia: Úlohu možno interpretovať ako model s dvoma typmi kapitálu x a y, ktoré majú rôznu úroveň produktivity (a a b). Riadiaca premenná u vyjadruje podiel úspor alokovaný do prvého kapitálu, pričom miera úspor je $\frac{1}{2}$. Koncová podmienka hovorí, že celková úroveň oboch kapitálov ocenených cenami c a d musí dosiahnuť hodnotu A.

Úloha 5.7. Overenie konštantnosti Hamiltoniánu pre úlohu bez ohraničenia na riadenie. Ukážte, že za predpokladu diferencovateľnosti optimálneho riadenia pre úlohu

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T f^0(x,u)\,dt,\\
&\dot{x} = f(x,u),\\
&x(0) = x_0,
\end{aligned}$$

(bez ohraničenia na riadenie) vlastnosť konštantnosti Hamiltoniánu, t.j. podmienka

$$H(x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = \text{konšt.}$$

vyplýva z príslušnej adjungovanej rovnice a podmienky maxima. Návod: Počítajte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t))$.

Úloha 5.8. Dokážte tvrdenie v Poznámke 5.3 (e).

Úloha 5.9. Podrobne zdôvodnite tvrdenie v Poznámke 5.3 (a).

Úloha 5.10. Dokážte, že $(\psi^0, \chi) \neq 0$ vtedy a len vtedy, keď $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0$ pre každé $t \in [0, \hat{T}]$. Návod: Najprv využite predpoklad (PR) o lineárnej nezávislosti vektorov $\frac{\partial g^i(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}$), na dôkaz tvrdenia pre $t = \hat{T}$. Potom rozšírte (AR) o rovnicu $\dot{\psi}^0 = 0$, čím získate homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc.

Kapitola 6

Neautonómna úloha. Úloha s pevným časom

V tejto kapitole odvodíme nutné podmienky optimality pre neautonómne úlohy a pre úlohy s pevným časom. Použitie podmienok ilustrujeme na príklade riešenia jednej úlohy s pevným časom, v ktorej kandidátom na optimálne riadenie bude nespojité riadenie.

6.1 Formulácia úlohy

Oproti prípadu štandardnej autonómnej ulohy s voľným časom z predchádzajúcej kapitoly budeme teraz uvažovať všeobecnejšie úlohy. Úlohy môžu byť neautonómne, kde funkcie f^0, f môžu závisieť explicitne od t, a pri tom interval $[t_0, T]$, na ktorom úlohy uvažujeme, môže byť buď pevne zadaný, alebo jeho pravá strana môže byť voľná. To znamená, budeme sa zaoberať úlohou

$$\max \int_{t_0}^{T} f^0(t, x, u)dt, \tag{6.1}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, T], \tag{6.2}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{6.3}$$

$$g(x(T)) = 0, \tag{6.4}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T], \tag{6.5}$$

ktorú budeme uvažovať v dvoch verziách:

(a) T voľné;

(b) $T = T_d$, kde $T_d > 0$ je dané číslo.

Predpokladáme, že dáta úlohy spĺňajú analogické predpoklady ako v úlohe z predchádzajúcej kapitoly. Podľa toho, či uloha bude autonómna alebo neautonómna, s pevným alebo volným časom, úlohu budeme nazývať štandardnou autonómnou (resp. neautonómnou) s pevným (resp. voľným časom).

Podobne ako v prípade autonómnej úlohy s voľným časom, aj teraz môžeme definovať Hamiltonovu funkciu pomocou adjungovanej premennej predpisom

$$H(t, x, u, \psi, \psi^0) := \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi^T f(t, x, u). \tag{HF}$$

Pomocou nej zapíšeme adjungovanú rovnicu formálne v skrátenom tvare

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}^T, \tag{AR}$$

podmienku transverzality pre $\chi \in R^l$ stručne zapísanú

$$\psi(T) = \frac{\partial g}{\partial x}^T \chi \tag{PT}$$

a podmienku maxima schématicky naznačenú ako:

$$H \longrightarrow \max_{u \in U}. \tag{PM}$$

6.2 Prevedenie úlohy na autonómnu úlohu s voľným časom

Našou snahou je pre takéto úlohy odvodiť nutné podmienky optimality vyjadrené pomocou (HF). Pri tom použijeme PPM pre autonómne úlohy s voľným časom sformulovaný v predchádzajúcej kapitole. Prevedieme našu vo všeobecnosti neautonómnu úlohu na autonómnu (vyššej dimenzie). Na túto úlohu aplikujeme PPM a potom získané podmienky naspäť prepíšeme do tvaru využívajúceho (HF).

Označme t ako novú stavovú premennú $x^{n+1} := t$. Zrejme

$$\dot{x}^{n+1} = 1, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0, \quad x^{n+1}(T) = \begin{cases} \text{voľné} & \text{v prípade (a)}, \\ T_d & \text{v prípade (b)}. \end{cases}$$

Dostali sme nasledovnú štandardnú autonómnu úlohu s voľným časom, na ktorú sa vzťahujú výsledky predchádzajúcej kapitoly. Táto úloha má o jednu stavovú premennú viac ako pôvodná, a preto ju budeme nazývať *rozšírenou* úlohou. Má tvar:

$$\begin{aligned}
&\max \int_{t_0}^{T} f^0(x^{n+1}, x, u)\, dt, \\
&\dot{x} = f(x^{n+1}, x, u), \quad t \in [t_0, T], \\
&\dot{x}^{n+1} = 1, \\
&x(t_0) = x_0, \\
&x^{n+1}(t_0) = t_0, \\
&g(x(T)) = 0, \\
&x^{n+1}(T) = \begin{cases} \text{voľné} & \text{v prípade (a)}, \\ T_d & \text{v prípade (b)}, \end{cases} \\
&u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T].
\end{aligned}$$

6.3 Odvodenie nutných podmienkok optimality

Napíšme teraz pre rozšírenú úlohu podmienky PPM. Pretože táto úloha má okrem n-rozmernej stavovej premennej x aj jednorozmernú premennú x^{n+1}, tak aj adjungovaná premenná bude mať okrem n-rozmernej zložky ψ aj jednorozmernú zložku ψ^{n+1}. Hamiltonova funkcia $\tilde{H}$ pre rozšírenú úlohu bude mať tvar

$$\tilde{H} = \psi^0 f^0 + \psi^T f + \psi^{n+1} f^{n+1} = H + \psi^{n+1},$$

pretože $f^{n+1} = 1$. Vidieť teda, že Hamiltonova funkcia $\tilde{H}$ pre rozšírenú úlohu sa líši od Hamiltonovej funkcie H pre pôvodnú úlohu iba v aditívnom pridaní ψ^{n+1}. Z toho vyplýva, že podmienka maxima pre rozšírenú úlohu

$$\tilde{H} \longrightarrow \max_{u \in U}$$

je ekvivalentná podmienke

$$H \longrightarrow \max_{u \in U},$$

a teda podmienku maxima máme vyjadrenú pomocou (HF) v tvare (PM). Napíšme teraz adjungovanú rovnicu pre rozšírenú úlohu. Zrejme

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}^T \tag{6.6}$$

$$\dot{\psi}^{n+1} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^{n+1}} = -\frac{\partial H}{\partial x^{n+1}}. \tag{6.7}$$

Opäť vidieť, že rovnica (6.6) je žiadaná rovnica v tvare (AR), pričom sme dostali ešte jednu rovnicu, ktorú po dosadení $x^{n+1} = t$ môžeme prepísať do tvaru

$$\dot{\psi}^{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.8}$$

Podmienku transverzality napíšeme najprv pre prípad (a) kedy máme iba ohraničenie $g(x) = 0$ na koncový stav, pretože x^{n+1} má voľný koniec. K tomuto ohraničeniu prislúcha multiplikátor $\chi \in R^l$ a keďže g nezávisí od x^{n+1}, tak $\frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} = 0$, a preto dostávame

$$\psi(T) = \frac{\partial g}{\partial x}^T \chi, \tag{6.9}$$

$$\psi^{n+1}(T) = 0. \tag{6.10}$$

V prípade (b), okrem ohraničenia $g(x) = 0$ s multiplikátorom $\chi \in R^l$, vystupuje aj ďalšie ohraničenie $x^{n+1} - T_d = 0$, ktorému priradíme multiplikátor $\chi^{l+1} \in R$. Pretože $\frac{\partial (x^{n+1} - T_d)}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} = 0$, tak dostávame

$$\psi(T) = \frac{\partial g}{\partial x}^T \chi, \tag{6.11}$$

$$\psi^{n+1}(T) = \chi^{l+1}. \tag{6.12}$$

Vidíme, že v oboch prípadoch sme dostali pre $\psi(T)$ žiadanú podmienku transverzality v tvare (PT). V prípade (a) úlohy s voľným časom sme navyše dostali aj podmienku (6.10).

Nakoniec napíšeme podmienku stacionarity pre rozšírenú úlohu:

$$\psi^0 f^0 + \psi^T f + \psi^{n+1} = H + \psi^{n+1} \equiv 0. \tag{6.13}$$

V nej vystupuje veličina $\psi^{n+1}(t)$, pre ktorú máme rovnicu (6.8) a prípadne aj koncovú podmienku (6.10), ak bola pôvodná úloha s voľným časom (prípad (a)). Keď „dosadíme“ tieto informácie do (6.13) dostávame, že v prípade, že pôvodná úloha bola (neautonómna) s voľným časom, tak

$$H|_{t=T} = 0.$$

V prípade, že pôvodná úloha bola (neautonómna) s pevným časom, tak podmienka stacionarity neplatí (H sa rovná neznámej funkcii). Zaujímavý výsledok dostávame, ak pôvodná úloha bola autonómna s pevným časom. Vtedy adjungovaná rovnica (6.8) pre ψ^{n+1} dáva $\dot{\psi}^{n+1} = 0$, z čoho vyplýva, že ψ^{n+1} je konštantné, a teda $\psi^{n+1}(t) \equiv \chi^{l+1}$. Dosadiac toto do (6.13) dostaneme

$$H \equiv -\chi^{l+1} = \text{konšt.}$$

6.4 Formulácia nutných podmienok

Výsledky z predchádzajúcej podkapitoly môžeme sformulovať do vety.

Veta 6.1. *Oproti štandardnej autonómnej úlohy s voľným časom sa pre štandardné*

a) neautonómne úlohy s voľným časom,

b) neautonómne úlohy s pevným časom,

c) autonómne úlohy s pevným časom

zmení znenie PPM iba v (PS). To znamená namiesto podmienky

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv 0, \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}],$$

máme v jednotlivých prípadoch nasledovné podmienky:

a) $H(\hat{T}, \hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \psi^0, \psi(\hat{T})) = 0$;

b) žiadna podmienka;

c) $H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv$ *konšt.,* $\forall\, t \in [t_0, T_d]$, *kde* T_d *je daná hodnota koncového času.*

Poznámka 1: Všimnime si, že sme dokázali viacej, ako sa dostalo do formulácie vety. Naozaj, integrovaním vzťahu (6.8) dostávame

$$\psi^{n+1}(T) - \psi^{n+1}(t) = -\int_t^T \frac{\partial H(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s), \psi(s), \psi^0)}{\partial s} ds,$$

čo po dosadení do (6.13) vedie ku

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = -\int_t^T \frac{\partial H(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s), \psi(s), \psi^0)}{\partial s} ds - \psi^{n+1}(T), \tag{6.14}$$

čo je podmienka stacionarity platná pre každú úlohu, bez ohľadu na jej autonómnosť, neautonómnosť, pevný či voľný čas. V prípade úlohy s voľným časom navyše

$$\psi^{n+1}(T) = 0.$$

Poznámka 2: Dôslednou aplikáciou PPM na rozšírenú úlohu dostaneme v prípade (b) úlohy s pevným časom, že $(\psi^0, \chi, \chi^{l+1}) \neq 0$. Všimnime si však, že ak by $(\psi^0, \chi) = 0$, tak potom zo vzťahu (6.13) vyplýva, že $\psi^{n+1}(t) = 0$ pre každé t, a teda podľa (6.10) je $\chi^{l+1} = 0$, čo je v spore s $(\psi^0, \chi, \chi^{l+1}) \neq 0$.

Poznámka 3: Analogicky ako Poznámke 5.3 (d), aj tu v prípade úlohy s voľným koncom kladieme $\chi = 0$, a teda $\psi^0 = 1$.

6.5 Riešenie úloh

Príklad 6.1. Nájdite prípustné riadenie a jeho odozvu, ktoré spĺňajú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú ÚOR:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T (x-u)dt, \quad T \text{je dané},\\
&\dot{x} = u \quad t \in [0, T],\\
&x(0) = x_0,\\
&u(t) \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Riešenie: (a) *Charakterizácia úlohy.* Zrejme ide o autonómnu úlohu s pevným časom a voľným koncom. Keďže podľa Poznámky 5.3 (d) je pre úlohy s voľným koncom $\psi^0 = 1$, zapíšeme nutné podmienky už s touto hodnotou ψ^0.

(b) *Zápis nutných podmienok.* Zrejme

$$H = x - u + \psi u$$

a adjungovaná funkcia $\psi(t)$ má byť riešením adjungovanej rovnice

$$\dot{\psi} = -1 \tag{AR}$$

a podmienky transverzality:

$$\psi(T) = 0. \tag{PT}$$

Hľadáme také prípustné riadenie $\hat{u}(t)$ a jeho odozvu $\hat{x}(t)$ pre danú úlohu, ktoré spĺňajú podmienku maxima:

$$\hat{x}(t) - \hat{u}(t) + \psi(t)\hat{u}(t) = \max_{u\in[0,1]} \hat{x}(t) - u + \psi(t)u, \quad \forall t \in [0,T] \tag{6.15}$$

a podmienku stacionarity:

$$\hat{x}(t) - \hat{u}(t) + \psi(t)\hat{u}(t) = \text{konštanta}. \tag{6.16}$$

(c) *Analýza nutných podmienok.* Podmienka maxima znamená riešiť úlohu:

$$x - u + \psi u \to \max_{u\in[0,1]}, \tag{PM}$$

ktorá je ekvivalentná úlohe

$$(\psi - 1)u \to \max_{u\in[0,1]}.$$

Jej riešením je

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ak} \quad \psi > 1, \\ 0, & \text{ak} \quad \psi < 1, \\ ?, & \text{ak} \quad \psi = 1. \end{cases}$$

Tým sme vyjadrili u ako funkciu ψ. Vidíme, že až na výnimočný prípad, kedy $\psi = 1$, máme riadenie vyjadrené jednoznačne. Do ďalšej analýzy už zapojíme aj čas a pozrieme sa, ako sa ψ mení s časom. Z (AR) a (PT) dostávame

$$\psi(t) = T - t.$$

(d) *Analýza prípadov na určenie riadenia.* Keďže $\psi(t)$ je klesajúca lineárna funkcia, prípad $\psi(t) = 1$, v ktorom u nie je určené, môže nastať (v intervale $[0,T]$) najviac raz. V takomto bode určíme riadenie ako limitu sprava. Môžu nastať dva prípady.

(i) Buď je $T \leq 1$ a potom aj $\psi(t) = T - t < 1$ na celom $[0,T]$, a teda

$$u(t) = 0, \ \forall\ t \in [0,T].$$

(ii) Druhá možnosť je, že $T > 1$ a v bode $t_1 = T - 1$ je $\psi(t_1) = 1$. Pretože $\psi(t)$ je klesajúca, tak najprv je $\psi(t) > 1$, pre $t \in [0, T-1)$ a potom je $\psi(t) < 1$, pre $t \in (T-1, T]$. Dostávame teda

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ak } t \in [0, T-1) \\ 0, & \text{ak } t \in [T-1, T] \end{cases}.$$

(e) *Určenie odozvy.* Vypočítajme odozvy pre oba prípady dosadením príslušných riadení do stavovej rovnice.

(i) V prvom prípade, keď $T \leq 1$, dostaneme dosadením $u(t) = 0$ do stavovej rovnice $\dot{x} = 0$. Jej riešením je, vzhľadom na zadanú počiatočnú podmienku, konštantná odozva

$$x(t) = x_0, \ \forall\, t \in [0, T].$$

(ii) V druhom prípade, keď $T \geq 1$, tak najprv máme $\dot{x} = 1$ na intervale $[0, T-1]$. Riešením je $x(t) = t + x_0$, ktoré spĺňa $x(T-1) = T - 1 + x_0$. To bude počiatočná hodnota pre odozvu na intervale $[T-1, T]$, kde spĺňa diferenciálnu rovnicu $\dot{x} = 0$. Odozvou na intervale $[T-1, T]$ teda je $x(t) = T - 1 + x_0$. Pre odozvu sme teda dostali

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0, & \text{ak } t \in [0, T-1], \\ T - 1 + x_0, & \text{ak } t \in [T-1, T]. \end{cases}$$

Všimnime si, že v tomto príklade sme nikde nevyužili podmienku stacionarity, ktorá v prípade autonómnej úlohy s pevným časom hovorí, že Hamiltonova funkcia je konštantná v optimálnom riadení a jeho odozve. Ľahko sa možno presvedčiť, že táto podmienka je splnená a že Hamiltonova funkcia je vo vypočítanom riadení a odozve naozaj konštatná, napriek nespojitosti riadenia. Budeme vidieť neskôr, že existujú prípady, kedy je aj táto podmienka užitočná a potrebná na zúženie množiny kandidátov na optimálne riadenie.

6.6 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 6.1. Neautonómna úloha. Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T (t^2 + u(t)^2)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ voľné}, \\ &\dot{x}(t) = u(t), \\ &x(0) = 4, \\ &x(T) = 5, \\ &u(t) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Sformulujte podmienky PPM.

b) Vylúčte prípad $\psi^0 = 0$.

c) Nájdite riešenie podmienok PPM.

Úloha 6.2. Úloha s pevným časom a s voľným koncom, bez ohraničenia na riadenie. Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}u(t)^2\right) \mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = u(t) - x(t),\\
&x(0) = 1,\\
&x(1) \text{ voľné.}
\end{aligned}$$

a) Sformulujte podmienky PPM. Ako možno jednoducho vylúčiť prípad $\psi^0 = 0$?

b) Nájdite riešenie týchto podmienok.

Úloha 6.3. Úloha s pevným časom a s voľným koncom, s ohraničením na riadenie. Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^2 -x(t)^2 \,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = u(t),\\
&x(0) = 1,\\
&u(t) \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

a) Pokúste sa odhadnúť tvar optimálneho riadenia a jeho odozvy.

b) Sformulujte podmienky PPM. Zdôvodnite, že $\psi^0 = 1$.

c) Nájdite riešenie týchto podmienok. Ukážte, že riadenie spĺňajúce PPM je nespojité. Návod: Ukážte, že $x(t) > 0$ ani $x(t) < 0$ na ľavom okolí bodu 2 nespĺňajú PPM.

d) Uvažujte predchádzajúcu úlohu so všeobecnejšou počiatočnou podmienkou v tvare $x(0) = a$, kde $a \in (0, 2)$. Nájdite optimálne riadenie, jeho odozvu, adjungovanú premennú aj optimálnu hodnotu účelovej funkcie $V(a)$ v bode $t = 0$ v závislosti od parametra a. Ukážte, že

$$\psi(0) = \frac{\mathrm{d}V(a)}{\mathrm{d}a}.$$

Úloha 6.4. Úloha s nespojitým riadením. Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^4 x(t) \,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = u(t),\\
&x(0) = 0,\\
&x(4) = 0,\\
&u(t) \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

(a) Sformulujte podmienky PPM pre túto úlohu.
(b) Ukážte, že podmienky PPM sú splnené s $\psi^0 \neq 0$.
(c) Nájdite všetky riešenia podmienok PPM.

Úloha 6.5. Úloha s čiastočne voľným koncom. Odvoďte podmienky PPM pre nasledujúcu jednorozmernú úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T f^0(x,u)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ voľné}\\
&\dot{x} = f(x,u),\\
&x(0) = x^0,\\
&x(T) = \Phi(T),\\
&u(t) \in U.
\end{aligned}$$

Všimnite si, že úloha je neautonómna, ale neutonómnosť sa prejavuje iba v podmienke na koncový stav. Pri odvodení podmienok považujte čas za novú stavovú premennú analogicky ako to bolo urobené na prednáške pri odvodení podmienok PPM pre neutonómnu úlohu. Na záver urobte „skúšku správnosti“: Ak ste podmienky odvodili správne, mali by sa v prípade $\Phi(t) = 0$ zhodovať s podmienkami pre štandardnú úlohu optimálneho riadenia s pevným koncom.

Úloha 6.6. Odvodenie podmienok PPM pre úlohu s izoperimetrickým ohraničením. Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia s integrálnym (tzv. izoperimetrickým) ohraničením:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T f^0(x,u)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ pevné}\\
&\dot{x} = f(x,u),\\
&x(0) = x_0,\\
&x(T) = x_T,\\
&\int_0^T g(x,u)\,\mathrm{d}t = B,
\end{aligned}$$

kde B je daná konštanta. Odvoďte pre túto úlohu PPM. Návod: zaveďte novú stavovú premennú y, pre ktorú platí:

$$\dot{y} = g(x,u), \quad y(0) = 0, \quad y(T) = B.$$

Úloha 6.7. Pre úlohu o optimálnej spotrebe sme už odvodili kvalitatívny vzťah medzi i, δ a spotrebou $c(t)$ pomocou Eulerovej rovnice. Odvoďte teraz ten istý vzťah pomocou PPM a ekonomicky ho interpretujte.

Úloha 6.8. Odvodenie podmienky stacionarity pre úlohu s diskontným faktorom. Ukážte, že pre úlohu s diskontným faktorom v tvare

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt} F(x,u)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ voľné}\\
&\dot{x} = f(x,u),\\
&x(0) = x_0,\\
&x(T) \text{ pevné},\\
&u(t) \in U,
\end{aligned}$$

platí podmienka

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = r\psi^0 \int_t^T e^{-rs} F(x^*(s), u^*(s))\,\mathrm{d}s,$$

Návod: Využite Poznámku 1.

Úloha 6.9. Podmienky na parametre v úlohe o optimálnej spotrebe. Určte vzťah medzi k_0, k_T a T, ktorý musí byť splnený, ak úloha o optimálnej spotrebe má mať prípustné riešenie s nezápornou spotrebou.

Kapitola 7

Rozšírenia k Pontrjaginovmu princípu maxima

Do tejto kapitoly sme zaradili niektoré poznámky súvisiace s Pontrjaginovým princípom maxima. V prvom rade sa budeme venovať autonómnej úlohe s diskontáciou, pre ktorú sa často používa trochu pozmenená verzia nutných podmienok. V druhej časti sa zamyslíme nad súvislosťou PPM a Eulerovej rovnice. V tretej uvedieme niekoľko poznámok o nenulovosti ψ^0. Ďalej poukážeme na význam PPM pre tzv. kvalitatívnu analýzu a nakoniec ilustrujeme použitie PPM na riešenie jednej úlohy o plánovaní výroby.

7.1 Pontrjaginov princíp maxima pre diskontovanú úlohu

Pod diskontovanou úlohou optimálneho riadenia s konečným časom (DK) (pevne zadaným alebo voľným) budeme rozumieť úlohu

$$\max \int_0^T e^{-rt} F(x(t), u(t))dt \tag{7.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \tag{7.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{7.3}$$

$$g(x(T)) = 0, \tag{7.4}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \tag{7.5}$$

kde T je voľné pre úlohu s voľným časom, resp. $T = T_d$ pre úlohu s pevne zadaným časom.

Vidíme, že ide o špeciálny typ neautonómnej úlohy, kde neautonómnosť spôsobuje iba diskontný faktor v účelovej funkcii. Je zrejmé, že táto neautonómnosť sa prenáša aj do adjungovanej rovnice, čo môže spôsobovať ťažkosti pri analýze vlastností riešení pomocou fázového portrétu. Ako uvidíme nižšie, podmienky Pontrjaginovho princípu maxima možno upraviť do takého tvaru, aby príslušný systém adjungovaných rovníc

bol autonómny. To uľahčuje analýzu trajektórií v (x, ψ) priestore, pretože diferenciálne rovnice pre funkcie $(x(t), \psi(t))$ budú autonómne.

Nech $\hat{u}(t),\ t \in [0, \hat{T}]$ ($\hat{T} = T_d$, ak je úloha s pevne daným koncovým časom T_d) je optimálne riadenie, $\hat{x}(t)$ je jeho odozva, $\psi^0,\ \chi$ príslušné konštanty a $\psi(t)$ adjungovaná funkcia z Pontrjaginovho princípu maxima. Zrejme Hamiltonova funkcia pre (DK) má tvar

$$H(t, x, u, \psi^0, \psi) = e^{-rt}\psi^0 F(x, u) + \psi^T f(x, u)$$

Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 e^{-rt}\left(\frac{\partial F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)}{\partial x}\right)^T \psi(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T. \tag{7.6}$$

Podmienka transverzality je

$$\psi(T) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi. \tag{7.7}$$

Podmienka maxima je

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) = \max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u, \psi^0, \psi(t)), \quad \forall\ t\ \in [0, \hat{T}]. \tag{7.8}$$

V prípade, že ide o úlohu s voľným časom, platí aj podmienka stacionarity

$$H(\hat{T}, \hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \psi(\hat{T}), \psi^0) = 0. \tag{7.9}$$

Hamiltonovu funkciu môžeme prepísať do tvaru

$$H(t, x, u, \psi^0, \psi) = e^{-rt}\psi^0 F(x, u) + \psi^T f(x, u) = e^{-rt}\left(\psi^0 F(x, u) + e^{rt}\psi^T f(x, u)\right)$$

a zaveďme nové premenné

$$\tilde{\psi}(t) = e^{rt}\psi(t), \quad \tilde{\psi}^0 = \psi^0.$$

Pomocou týchto nových premenných definujeme

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}) := \tilde{\psi}^0 F(x, u) + \tilde{\psi}^T f(x, u). \tag{7.10}$$

V pôvodnej formulácii H predstavuje súčasnú hodnotu (tzv. present value) Hamiltonovej funkcie, t.j. vzťahujúcu sa k časovému okamihu 0 a ψ predstavuje súčastnú hodnotu adjungovanej funkcie. Nová Hamiltonova funkcia $\mathcal{H}$ a nová adjungovaná premenná $\tilde{\psi}$ predstavujú okamžitú hodnotu (tzv. current value), t.j. vzťahujúcu sa k časovému okamihu t.

Zrejme medzi okamžitým Hamiltoniánom $\mathcal{H}$ a pôvodným platí vzťah:

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}) = \tilde{\psi}^0 F(x, u) + \tilde{\psi}^T f(x, u) = e^{rt} H(t, x, u, \psi^0, \psi). \tag{7.11}$$

Pre okamžitú adjungovanú premennú $\tilde{\psi}$ odvodíme diferenciálnu rovnicu:

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = re^{rt}\psi(t) + e^{rt}\dot{\psi}(t) = r\tilde{\psi}(t) - e^{rt}\frac{\partial H}{\partial x}^T. \tag{7.12}$$

Keďže platí (7.11), tak platí aj $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = e^{rt}\frac{\partial H}{\partial x}$, z čoho po dosadení do (7.12) dostaneme výsledný tvar okamžitej adjungovanej rovnice

$$\dot{\tilde{\psi}} = r\tilde{\psi} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}^T = -\tilde{\psi}^0\frac{\partial F}{\partial x}^T + \left(rI - \frac{\partial f}{\partial x}^T\right)\tilde{\psi}, \tag{7.13}$$

kde I je jednotková matica.

Podmienka maxima sa nezmení, pretože diskontný faktor nezávisí od u, teda bude mať tvar

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)), \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}]. \tag{7.14}$$

Podmienka transverzality po substitúcii nadobudne tvar

$$\tilde{\psi}(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \tilde{\chi}, \tag{7.15}$$

kde $\tilde{\chi} = e^{r\hat{T}}\chi$ a pre úlohu s voľným časom navyše platí

$$\mathcal{H}(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(\hat{T})) = 0.$$

Odvodené výsledky sformulujme do vety.

Odvodené výsledky sformulujme do vety.

Veta 7.1. *Nech $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva pre úlohu (DK). Potom existujú také konštantné $(\tilde{\psi}^0, \tilde{\chi}) \neq 0$, $\tilde{\psi}^0 \geq 0$, $\chi \in \mathbb{R}^l$, že $\tilde{\psi}(t)$ riešenie adjungovanej rovnice*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = r\tilde{\psi}(t) - \tilde{\psi}^0\left(\frac{\partial F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)}{\partial x}\right)^T \tilde{\psi}(t)$$

a podmienky transverzality

$$\tilde{\psi}(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi$$

spĺňa spolu s $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ podmienku maxima

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u, \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(t)), \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}]$$

a ak je úloha s voľným časom, tak aj podmienku stacionarity

$$\mathcal{H}(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \tilde{\psi}^0, \tilde{\psi}(\hat{T})) \equiv 0.$$

Poznamenajme, že bežne sa v literatúre neodlišuje označovanie súčasného a okamžitého Hamiltoniánu, ani označovanie súčasnej a okamžitej adjungovanej premennej. To, či H a ψ označuje súčasné a či okamžité veličiny zvyčajne rozpoznáme iba podľa tvaru Hamiltoniánu (výskyt e^{-rt} pri F), prípadne podľa tvaru adjungovanej rovnice (jej neautonómny, vers. autonómny tvar).

7.2 Súvis Pontrjaginovho princípu maxima a Eulerovej rovnice

V druhej kapitole sme sa zaoberali základnou úlohou variačného počtu

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T f^0(t,x,\dot{x})dt \\ &x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \end{aligned}$$

Pre ňu sme odvodili Eulerovu rovnicu

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} = 0.$$

V prípade, že x_T bolo voľné, tak sme dostali navyše $f^0_{\dot{x}}|_{t=T} = 0$ a v prípade, že T bolo voľné $(f^0 - f^0_{\dot{x}}\dot{x})|_{t=T} = 0$. Túto úlohu môžeme naformulovať ako ÚOR nasledovne

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T f^0(t,x,u)dt, \quad T \text{ dané}, \\ &\dot{x} = u, \quad t \in [0,T], \\ &x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \end{aligned}$$

Je to neautonómna úloha s pevným časom bez ohraničení na riadiace a stavové premenné (označíme ju U1). Adjungovaná rovnica pre danú úlohu má tvar

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T$$

a podmienka maxima je

$$\psi^0 f^0(t,x,u) + \psi^T u \to \max_u$$

Ak by $\psi^0 = 0$, tak by sme v predchádzajúcej podmienke hľadali voľný extrém lineárnej funkcie, a teda takáto úloha by nemala riešenie (pre $\psi \neq 0$). Preto $\psi^0 = 1$, a teda dostávame

$$(AR): \quad \dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T, \qquad (PM): \quad f^0(t,x,u) + \psi^T u \to \max_u . \tag{7.16}$$

Z podmienky maxima vyplýva, že

$$\frac{\partial f^0}{\partial u} + \psi^T = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{7.17}$$

Pretože podmienka (7.17) platí $\forall t \in [0, T]$, tak aj

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f^0}{\partial u} + \dot{\psi}^T = 0,$$

čo spolu so (7.16) a stavovou rovnicou dáva

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f^0}{\partial x} = 0.$$

Dostali sme Eulerovu rovnicu. To znamená, že z PPM pre U1 dostaneme Eulerovu rovnicu.

V prípade, že $x(T)$ je voľné, tak PPM dáva podmienku transverzality $\psi(T) = 0$, čo po dosadení do (7.17) dáva

$$\psi^T(T) = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}\right)_{t=T} = 0.$$

V prípade, že T je voľné, tak PPM dáva $H|_{t=T} = 0$. To znamená, že

$$(f^0 + \psi^T \dot{x})\Big|_{t=T} = 0,$$

$$\left(f^0 - \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Bigg|_{t=T} = 0.$$

Poznamenajme, že rozpísaním (PM) a (AR) (7.16) možno ľahko vyvodiť Legendrove podmienku (viď. Úloha 7.1).

7.3 Poznámky o ψ^0

(a) Pre úlohu s voľným koncom vieme okamžite vylúčiť prípad $\psi^0 = 0$. Voľný koniec totiž implikuje $\psi(T) = 0$ a podmienka $(\psi^0, \psi) \neq 0$, že $\psi^0 \neq 0$. V ostatných prípadoch treba spravidla postupovať individuaálne a pripad $\psi^0 = 0$ sa spravidla podarí vylúčiť starostlivou analýzou podmienok. Úlohy bez ohraničeni na riadenie s lineárnou funkciou $f(x, u)$ často dávajú podmienku maxima, ktorá pre prípad $\psi^0 = 0$ nemá riešenie.

(b) V ekonomickej literatúre sa často možno stretnúť s tým, že je automaticky kladené $\psi^0 = 1$ (lebo ide zvyčajne o úlohy na maximum), bez overovania možnosti $\psi^0 = 0$. Nasledujúci príklad ukáže, že takýto prípad môže nastať.

Príklad 7.1. Splnenie PPM s $\psi^0 = 0$. Uvažujme úlohu:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T u\, dt, \text{ kde } T \text{ je dané,} \\ &\dot{x} = u^2, \quad t \in [0, T], \\ &x(0) = x(T) = 0. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že v tomto prípade je riadenie $\hat{u}(t) \equiv 0$ jediným prípustným riadením (pretože pre iné $u(t)$ je odozva $x(t)$ rastúca a teda nemôže spĺňať počiatočnú aj koncovú podmienku). Teda $\hat{u}(t) \equiv 0$ je aj optimálne a musí spĺňať PPM.

Podmienky PPM pre túto úlohu pozostávajú z podmienky maxima, ktorú formálne zapíšeme v tvare:

$$\psi^0 u + \psi u^2 \to \max_u$$

a z adjungovanej rovnice $\dot{\psi} = 0$, ktorej riešením je $\psi(t) \equiv A$, kde A je konštanta.

Nech by $\hat{u}(t) \equiv 0$ bolo riešením podmienky maxima s $\psi^0 = -1$. To znamená, že by $\hat{u} = 0$ bolo riešením podmienky:

$$-u + \psi u^2 \to \max_u$$

a pretože to je úloha na voľné maximum, $\hat{u} = 0$ by muselo spĺňať nutnú podmienku voľného extrému:

$$2\psi\hat{u} - 1 = 0, \tag{7.18}$$

čo však nie je možné pre žiadne ψ. Vidíme teda, že optimálne riadenie $\hat{u}(t) \equiv 0$ nespĺňa PPM s $\psi^0 = -1$. Teda $\hat{u} = 0$ musí spĺňať PM s $\psi^0 = 0$ pre $\psi = A$, t.j.

$$\psi u^2 \to \max_u . \tag{7.19}$$

Ak $A < 0$, tak $u \equiv 0$ je naozaj riešením (7.19).

7.4 PPM a kvalitatívna analýza

Pri modelovaní mnohých ekonomických problémov vstupujú do formulácií funkcie, ktorých presný priebeh nepoznáme, ale poznáme niektoré ich charakteristické vlastnosti. Veľmi často je to produkčná funkcia alebo úžitková funkcia, o ktorých sa vie, že sú to rastúce a konkávne funkcie. Pontrjaginov princíp aj v takýchto prípadoch vie pomôcť odvodiť niektoré kvalitatívne charakteristiky optimálnych riešení. Najjednoduchšou úlohou, na ktorej sa dajú demonštrovať výhody kvalitatívnej analýzy, je úloha o optimálnej spotrebe. Poznamenajme, že túto úlohu sme už riešili ako Príklad 2.2 prostriedkami variačného počtu.

Príklad 7.2. Úloha o optimálnej spotrebe

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))\ dt,\\
&\dot{k} = ik - c,\\
&k(0) = k_0 > 0,\\
&k(T) = k_T > 0.
\end{aligned}$$

Túto úlohu budeme riešiť iba pri všeobecných predpokladoch $\mathrm{U}' > 0, \mathrm{U}'' < 0$. To znamená, že napriek tomu, že nebudeme poznať konkrétny tvar funkcie U, budeme vedieť pomocou PPM odvodiť niektoré zaujímavé kvalitatívne výsledky o správaní sa optimálneho riešenia.
Riešenie: Pretože ide o úlohu s pevným koncom, tak PT nedáva žiadnu informáciu. Všimnime si však, že pravá strana diferenciálnej rovnice je lineárna v riadení a na riadenie nemáme žiadne ohraničenia. Preto podľa poznámky 7.3 (a) môžeme položiť $\psi^0 = 1$. Adjungovaná rovnica pre túto úlohu má tvar

$$\dot{\psi} = \frac{\partial(-e^{-rt}\mathrm{U}(c(t)))}{\partial k} - \psi\frac{\partial(ik-c)}{\partial k} = -i\psi$$

a jej všeobecným riešením je

$$\psi(t) = Ae^{-it} \tag{AR}$$

kde A je konštanta. Podmienka maxima dáva

$$H = e^{-rt}\mathrm{U}(c) + \psi(ik - c) \longrightarrow \max_c . \tag{PM}$$

Pretože H je konkávna v c, tak PM platí vtedy a len vtedy

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-rt}\mathrm{U}'(c(t)) - \psi(t) = 0,\ \forall\ t \in [0, T].$$

Z toho a zo vzťahu pre ψ dostávame, že

$$\mathrm{U}'(c(t)) = \psi(t) = Ae^{(r-i)t}. \tag{7.20}$$

Keďže rovnosti v (7.20) platia v každom $t \in [0, T]$, tak musia platiť aj po zderivovaní podľa času. Dostávame teda

$$\mathrm{U}''(c(t))\dot{c}(t) = (r - i)Ae^{(r-i)t}. \tag{7.21}$$

Kombináciou (7.20) a (7.21) dostávame

$$\mathrm{U}''(c(t))\dot{c}(t) = (r - i)Ae^{(r-i)t} = (r - i)\mathrm{U}'(c(t)),$$

z čoho vyplýva

$$\dot{c}(t) = \left[-\frac{\mathrm{U}'(c(t))}{\mathrm{U}''(c(t))} \right] (i - \delta).$$

Vzhľadom na predpoklady kladené na U je výraz v hranatej zátvorke kladný, a teda o znamienku $\dot{c}$ rozhoduje znamienko rozdielu i a r nasledovne:

- Ak $i > r$, potom $\dot{c} > 0$, a teda spotreba rastie v čase.
- Ak $i < r$, potom spotreba klesá.
- Ak $i = r$, potom spotreba je konštantná.

To znamená, ak úroková miera i je väčšia ako spotrebiteľova miera netrpezlivosti r, tak vzniká tendencia odkladať spotrebu na neskôr, a teda tok spotreby rastie v čase.

V prípade, že budeme špecifikovať funkciu spotreby ako $\mathrm{U}(c) = \ln(c)$, môžeme vypočítať riadenie a odozvu v závislosti od parametrov T, k_0, k_T, i, r podobne, ako sme to urobili v Pr9klade 2.2.

V nasledujúcej kapitole uvidíme aj zložitejší príklad uplatnenia kvalitatívnej analýzy a to riešením nutných podmienok optimality prostredníctvom analýzy fázového portrétu.

7.5 Úloha o plánovaní výroby

Firma dostala objednávku v čase T dodať B jednotiek výrobku. Snaží sa nájsť plán výroby na splnenie objednávky pri minimálnych nákladoch na výrobu a skladovanie hotových výrobkov. Pritom predpokladáme:

- jednotková produkčná cena rastie lineárne (s konštantou $c_1 > 0$) s rýchlosťou produkcie;
- jednotková cena za skladovanie výrobkov je konštantná ($=c_2 > 0$).

Označme

- $x(t)$ množstvo výrobku vyrobeného až do času t (akumulovaná výroba). Teda $x(0) = 0,\ x(T) = B$.
- $u(t)$ produkčnú rýchlosť (rýchlosť zmien v zásobe výrobku). Teda $\dot{x}(t) = u(t)$, $u(t) \geq 0$.

Celkové náklady firmy na výrobu a skladovanie v čase t vieme vyjadriť ako

$$c_1 u(t)\dot{x}(t) + c_2 x(t) = c_1 (u(t))^2 + c_2 x(t).$$

Úlohou je určiť $u(t)$ tak, aby

$$J := \int_0^T (c_1 u\dot{x} + c_2 x)dt \to \quad \min .$$

Dostali sme nasledovnú ÚOR:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T (c_1 u^2 + c_2 x)dt, \quad T \text{ je dané},\\
&\dot{x}(t) = u(t),\\
&x(0) = 0, \quad x(T) = B > 0,\\
&u(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Možným produkčným plánom by mohlo byť produkovať rovnomerne rýchlosťou $u(t) \equiv \frac{B}{T}$. Odozvou na takéto riadenie je $x(t) = \frac{B}{T}t$ a príslušná hodnota účelovej funkcie je $J = c_1\frac{B^2}{T} + c_2\frac{BT}{2}$. Budeme vidieť, že toto je síce prípustný plán výroby, ale nie je optimálny.

Nájdime riešenie PPM. Zrejme

$$\dot{\psi} = -\psi^0 c_2, \tag{AR}$$

$$\psi^0(c_1 u^2 + c_2 x) + \psi u \to \max_{u\geq 0} . \tag{PM}$$

Vylúčme prípad $\psi^0 = 0$. Ak by $\psi^0 = 0$, potom z (AR) vyplýva, že ψ je konštantné a (PM) má tvar $\psi u \to \max_{u\geq 0}$. Z (PM) potom vyplýva, že

- ak $\psi > 0$, tak neexistuje riešenie PM,
- ak $\psi < 0$, tak $u \equiv 0$, ale to nie je prípustné riadenie (odozva nespĺňa koncovú podmienku).

Preto môžeme položiť $\psi^0 = -1$. Potom $\dot{\psi} = c_2$ a teda

$$\psi(t) = tc_2 + k.$$

Podmienka maxima má tvar

$$-(c_1 u^2 + c_2 x) + \psi u \to \quad \max_{u\geq 0} . \tag{PM}$$

Voľný extrém spĺňa

$$-2c_1 u + \psi = 0 \Rightarrow u = \frac{\psi}{2c_1}.$$

Preto riešením PM dostávame

$$u = \begin{cases} \frac{\psi}{2c_1}, & \text{ak} \quad \psi \geq 0,\\ 0, & \text{ak} \quad \psi < 0. \end{cases}$$

Podľa toho, aké znamienka môže nadobúdať ψ na intervale $[0, T]$, dostávame tri možnosti:

(a) Ak $\psi(t) < 0$ pre každé $t \in [0, T]$, potom $u(t) \equiv 0$, ale takéto riadenie je neprípustné.

(b) Ak $\psi(t) \geq 0$ pre každé $t \in [0, T]$, t.j. $c_2 t + k \geq 0$ na $[0, T]$, tak (z $t = 0$) máme, že $k \geq 0$ a

$$u(t) = \frac{c_2 t + k}{2c_1}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dosadením tohoto riadenia do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = \frac{c_2 t + k}{2c_1},$$

riešením čoho pre počiatočnú podmienku $x(0) = 0$ je

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{kt}{2c_1}.$$

Využitím koncovej podmienky $B = x(T)$ dostaneme

$$k = \frac{2c_1 B}{T} - \frac{c_2 T}{2},$$

a teda

$$u(t) = \frac{c_2}{2c_1} t + \frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1}.$$

Na začiatku tohoto prípadu sme vyvodili, že musí byť $k \geq 0$, takže tento prípad nastáva len ak

$$T \leq 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}} =: T^*.$$

(c) Posledná možnosť je, že existuje $t_1 \in (0, T)$ také, že $\psi(t_1) = 0$. Pretože ψ je rastúca, tak zrejme

$$\psi(t) \leq 0, \quad t \in [0, t_1]$$
$$\psi(t) > 0, \quad t \in (t_1, T]$$

a tiež $0 = \psi(t_1) = c_2 t_1 + k$, t.j. $t_1 = -\frac{k}{c_2}$, pričom zrejme $k < 0$. Máme teda

$$0 < t_1 = -\frac{k}{c_2} < T$$

a

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t \in [0, -\frac{k}{c_2}] \\ \frac{c_2 t + k}{2c_1}, & \text{ak } t \in [-\frac{k}{c_2}, T] \end{cases} \tag{7.22}$$

Vypočítajme teraz odozvu na toto riadenie. Najprv na intervale $[0, -\frac{k}{c_2}]$ máme

$$\dot{x}(t) = 0, \quad x(0) = 0,$$

čoho riešením je

$$x(t) \equiv 0.$$

Potom na intervale $[-\frac{k}{c_2}, T]$ máme

$$\dot{x}(t) = \frac{c_2 t + k}{2c_1},$$

čoho všeobecným riešením je

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{k}{2c_1} t + D.$$

Pretože odozva musí byť spojitá, tak musí byť splnená podmienka

$$0 = x(-\frac{k}{c_2}) = \frac{c_2 k^2}{4c_1 c_2^2} - \frac{k^2}{2c_1 c_2} + D = 0,$$

z čoho dostávame

$$D = \frac{k^2}{4c_1 c_2},$$

a teda na $[-\frac{k}{c_2}, T]$ je

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{k}{2c_1} t + \frac{k^2}{4c_1 c_2}.$$

Dosadením do koncovej podmieky $x(T) = B$ a vyriešením príslušnej kvadratickej rovnice pre k dostaneme , že

$$k = 2\sqrt{c_1 c_2 B} - c_2 T,$$

a teda z (7.22) dostávame

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t \in [0, T - 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}], \\ \frac{c_2}{2c_1}(t - T + 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}), & \text{ak } t \in [T - 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}, T]. \end{cases}$$

To je v prípade, že

$$T > 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}} = T^*.$$

Dostali sme teda, že pre akúkoľvek voľbu vstupných kladných parametrov T, c_1, c_2, B existuje jediné riešenie nutných podmienok optimality. Kvalitatívne správanie tohoto riešenia sa mení podľa určitej kritickej hodnoty T^*. Ak je T väčšie ako kritická hodnota T^*, tak chvíľu nevyrábame nič a potom postupne zväčšujeme rýchlosť produkcie lineárne s časom. Ak T je menšie ako kritická hodnota T^*, tak produkujeme kladnou rýchlosťou, ktorá rastie lineárne s časom z hodnoty v čase nula rovnej $\frac{B}{T} - \frac{c_2 T}{4c_1}$.

Vypočítané riadenie a jeho odozva v oboch prípadoch je len kandidátom na optimálne riešenie úlohy. Z teoretických výsledkov, ktoré budú odvodené v ďalších kapitolách však dostaneme, že vypočítaný kandidát na optimálne riadenie spĺňa postačujúce podmienky optimality a teda je optimálnym riešením tejto úlohy.

7.6 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 7.1. Vyvodenie Legendrovej podmienky z PPM. Rovnako ako sme v odseku 7.2 pre úlohu variačného počtu vyvodili z PPM Eulerovu rovnicu, vyvoďte aj platnosť Legendrových podmienok. Návod: Z podmienky maxima využitím adjungovanej rovnice odvoďte v optimálnom $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$ nerovnosť

$$f^0(t, \hat{x}(t), \dot{x}) \leq f^0(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) + \left(\frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))}{\partial \dot{x}} \right) (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}).$$

Úloha 7.2. Konkrétna verzia úlohy o optimálnom plánovaní výroby. Riešte úlohu o plánovaní výroby v prípade $B = c_1 = c_2 = 1$ iba ako úlohu jedného parametra $T > 0$. Pre prípady $T = 1$ a $T = 3$ vyčíslite úspory na výdavkoch, ak firma namiesto rovnomerného plánu výroby $u \equiv 1/T$ aplikuje optimálne u.

Úloha 7.3. Modifikácia úlohy o optimálnom plánovaní výroby. Nech v úlohe o plánovaní výroby je dané aj horné ohraničenie na rýchlosť výroby a teda napríklad $u(t) \in [0, 1]$. Ako sa zmení riešenie úlohy? Odhadnite počet stratégií a ich kvalitatívne charakteristiky. Od čoho budú závisieť?

Kapitola 8

PPM ako prostriedok na numerické riešenie úloh

Vo všetkých príkladoch, ktoré sme riešili doteraz, sa nám podarilo nájsť *analytické riešenie* podmienok Pontrjaginovho princípu maxima, to znamená riešenie v tvare explicitných vzorcov. Vo všeobecnosti je však toto možné málokedy. Dôvodom často je, že samotná stavová rovnica ako aj adjungovaná rovnica, na ktorú vedie použitie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima, sú príliš zložité. V takomto prípade však môžu pomôcť rozličné numerické solvery na riešenie diferenciálnych prípadne diferenčných rovníc. Podmienkou je, aby sme poznali všetky dáta úlohy a aby sme vedeli vyjadriť riadenie z podmienky maxima ako funkciu (x, ψ) v analytickom tvare.

8.1 Okrajová úloha

Z princípu maxima pre štandardnú autonómnu úlohu s pevným časom často vieme vyjadriť riadenie ako funkciu stavovej a adjungovanej premennej, t.j.

$$u = v(x, \psi).$$

Keď potom takto vyjadrené riadenie dosadíme do stavovej a adjungovanej rovnice, dostaneme spolu s počiatočnou, koncovou a podmienou transverzality nasledovný systém podmienok:

$$\dot{x} = f(x, v(x, \psi)), \tag{8.1}$$

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(x, v(x, \psi))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(x, v(x, \psi))}{\partial x} \right)^T \psi(t), \tag{8.2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{8.3}$$

$$g(x(T)) = 0, \tag{8.4}$$

$$\psi(T) = \left(\frac{\partial g(x(T))}{\partial x} \right)^T \chi. \tag{8.5}$$

Všimnime si, že (8.1) a (8.2) predstavuje $n + n$ diferenciálnych rovníc pre x a ψ na intervale $[0, T]$. K tomu máme n podmienok (8.3) v čase 0, l podmienok (8.4) v čase T a n rovníc v podmienke transverzality (8.5), ktorá však zavádza ďalších l neznámych χ. Máme teda $2n$ diferenciálnych rovníc a $2n$ podmienok na okraji, z toho n podmienok na začiatku a n podmienok na konci. Dostali sme teda tzv. dvojbodovú okrajovú úlohu. Ilustrujme si situáciu pomocou nasledujúceho príkladu.

Príklad 8.1. Máme nájsť riešenie nasledovnej úlohy optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 + u^2)dt, \\
&\dot{x} = -x^3 + u, \ t \in [0, 1], \\
&x(0) = 5.
\end{aligned}$$

Keďže f je lineárna v u a u je voľné, tak podmienky Pontrjaginovho princípu maxima dávajú adjungovanú rovnicu

$$\dot{\psi} = x + 3x^2\psi,$$

podmienku transverzality

$$\psi(1) = 0$$

a podmienku maxima (PM)

$$-\frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \psi(-x^3 + u) \to \max_{u \in \mathbb{R}}.$$

Zrejme (PM) je ekvivalentná s

$$-\frac{1}{2}u^2 + \psi u \to \max_{u \in \mathbb{R}},$$

ktorá dáva

$$u = \psi. \tag{8.6}$$

Dosadením (8.6) do stavovej a adjungovanej rovnice dostávame, že

$$\dot{x} = -x^3 + \psi, \quad x(0) = 5, \tag{8.7}$$

$$\dot{\psi} = x + 3x^2\psi, \quad \psi(1) = 0. \tag{8.8}$$

Systém (8.7)–(8.8) predstavuje dvojbodovú okrajovú úlohu pre tento príklad.

Okrajovú úlohu (8.1)–(8.5) málokedy vieme riešiť *analyticky*. Niekedy sa dá úloha analyzovať graficky, pomocou *fázového portrétu*. Takúto možnosť riešenia si ukážeme v nasledujúcej kapitole pri analýze fázového portrétu Ramseyho modelu. V prípade, že poznáme všetky dáta úlohy (funkcie a konštanty), môžeme okrajovú úlohu riešiť numericky.

8.2 Numerické riešenie okrajovej úlohy

Možnosti *numerického* riešenia dvojbodovej okrajovej úlohy si ukážeme na prípade riešenia okrajovej úlohy z Príkladu 8.1.

Riešenie pomocou Excelu. Budeme riešiť okrajovú úlohu (8.7)–(8.8) najprv pomocou Excelu. Za tým účelom úlohu prevedieme na diskrétnu. Nahradíme derivácie diferenciami

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \sim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$
$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} \sim \frac{\Delta \psi}{\Delta t} = \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}$$

a dosadíme do rovníc (8.7) a (8.8), čím dostaneme

$$x(t+\Delta t) = x(t) + [-x(t)^3 + \psi(t)]\Delta t, \quad x(0) = 5$$
$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t) + [x(t) + 3x(t)^2\psi(t)]\Delta t, \quad \psi(1) = 0.$$

Tento systém podmienok už možno riešiť pomocou Excelu a jeho funkcie „Hľadanie riešenia“.

- Zvolíme $\Delta t = 0,01$ a $\psi(0) = -0,2$ (to znamená "nastrelíme"počiatočnú hodnotu pre ψ; je zrejmé, že skutočná hodnota bude iná).

- Otvoríme prázdny excelovský hárok, do premennej A budeme vpisovať hodnoty x a do premennej B hodnoty ψ. Pomocou funkcie „Vlož“ vložíme do buniek počiatočnú hodnotu $x(0)$, nastrelenú hodnotu $\psi(0)$ a predpis na vypočítanie ďalších hodnôt. To znamená

  VLOŽ do A1 $\boxed{5}$

  VLOŽ do B1 $\boxed{-0,2}$

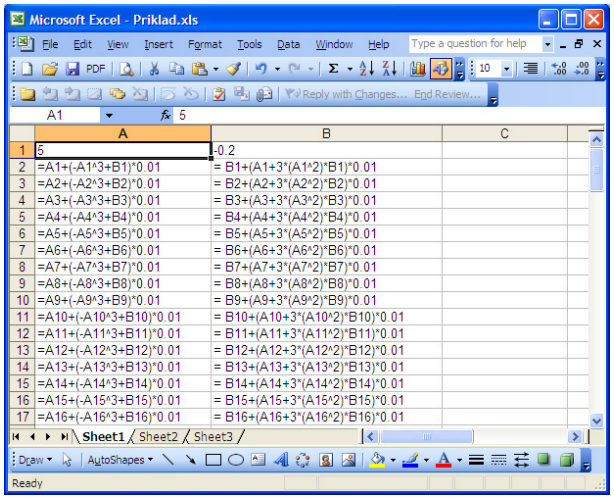
  VLOŽ do A2 $\boxed{= A1 + (-A1\hat{}3 + B1) * 0,01}$

  VLOŽ do B2 $\boxed{= B1 + (A1 + 3 * (A1\hat{}2) * B1) * 0,01}$

- Vyznačíme bunky A2, B2 až A101, B101. V ponuke "Úpravy"vyberieme "Vyplniť doleä Excel doplní vysvietenú tabuľku - iteračne podľa vzorca, ktorý sme zadali. Vidíme z výsledkov, že toto riešenie nespĺňa koncovú podmienku $\psi(1) = B101 = 0$. Aby sme našli takéto riešenie prejdeme k ďalšiemu kroku.

- V ponuke "Nástrojeötvoríme funkciu "Hľadanie riešenia", ktorá nám ponúkne okno, ktoré v našom prípade vyplníme nasledovne:

  NASTAVIŤ BUNKU $\boxed{B101}$



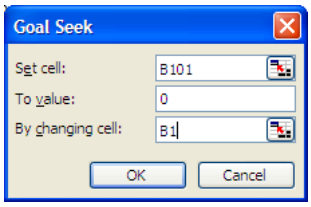
	A	B
1	5	-0.2
2	=A1+(-A1^3+B1)*0.01	= B1+(A1+3*(A1^2)*B1)*0.01
3	=A2+(-A2^3+B2)*0.01	= B2+(A2+3*(A2^2)*B2)*0.01
4	=A3+(-A3^3+B3)*0.01	= B3+(A3+3*(A3^2)*B3)*0.01
5	=A4+(-A4^3+B4)*0.01	= B4+(A4+3*(A4^2)*B4)*0.01
6	=A5+(-A5^3+B5)*0.01	= B5+(A5+3*(A5^2)*B5)*0.01
7	=A6+(-A6^3+B6)*0.01	= B6+(A6+3*(A6^2)*B6)*0.01
8	=A7+(-A7^3+B7)*0.01	= B7+(A7+3*(A7^2)*B7)*0.01
9	=A8+(-A8^3+B8)*0.01	= B8+(A8+3*(A8^2)*B8)*0.01
10	=A9+(-A9^3+B9)*0.01	= B9+(A9+3*(A9^2)*B9)*0.01
11	=A10+(-A10^3+B10)*0.01	= B10+(A10+3*(A10^2)*B10)*0.01
12	=A11+(-A11^3+B11)*0.01	= B11+(A11+3*(A11^2)*B11)*0.01
13	=A12+(-A12^3+B12)*0.01	= B12+(A12+3*(A12^2)*B12)*0.01
14	=A13+(-A13^3+B13)*0.01	= B13+(A13+3*(A13^2)*B13)*0.01
15	=A14+(-A14^3+B14)*0.01	= B14+(A14+3*(A14^2)*B14)*0.01
16	=A15+(-A15^3+B15)*0.01	= B15+(A15+3*(A15^2)*B15)*0.01
17	=A16+(-A16^3+B16)*0.01	= B16+(A16+3*(A16^2)*B16)*0.01

Obr. 8.1: Riešenie systému diferenciálnych rovníc (8.7) a (8.8) pomocou Excelu - krok 1.

CIEĽOVÁ HODNOTA $\boxed{0}$

MENENÁ HODNOTA $\boxed{B1}$

po spustení nájde počiatočnú hodnotu $\psi(0) = -0,10437$, čo sa objaví v B1, $x(1) = 0,62395$ v A101 a $\psi(1) = -0,0007$ v B101.

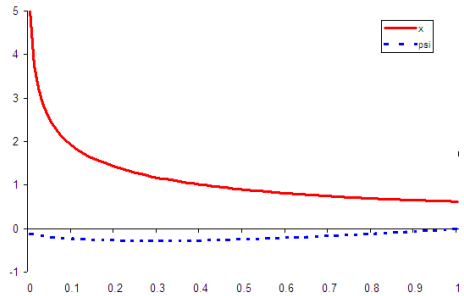


Obr. 8.2: Riešenie systému diferenciálnych rovníc (8.7) a (8.8) pomocou Excelu - krok 2.

- Nakoniec môžeme nechať grafický výstup pomocou funkcií "Vložiť", "Graf", "Čiarový", Ďalej".

Riešenie pomocou Matlabu. Numerické riešenie systému diferenciálnych rovníc pre x a ψ možno nájsť aj pomocou Matlabu. V tomto prípade možno vychádzať priamo zo systému (8.7) a (8.8) bez potreby jeho diskretizácie. Keďže ide o systém obyčajných diferenciálnych rovníc s okrajovými podmienkami (tzv. *boundary value problem, BVP*), na jeho riešenie je navhodnejšia matlabovská funkcia „bvp4c“. Matlabovský kód má v tomto prípade nasledujúci tvar:

```
function okrajova_uloha
 t=0:0.01:1;
```

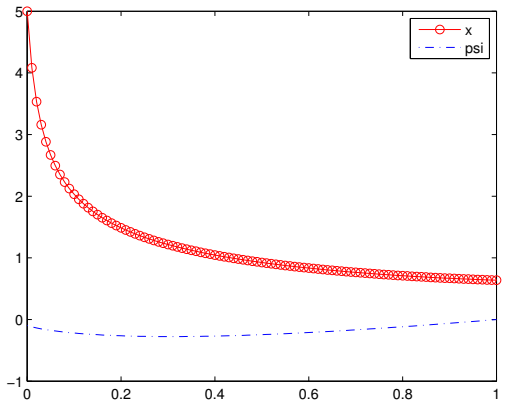


Obr. 8.3: Riešenie systému diferenciálnych rovníc (8.7) a (8.8) pomocou Excelu - krok 3.

```
3  solinit = bvpinit(t,[0.2 0]); % pociatocny odhad
4  options = [];
5  sol = bvp4c(@system_of_ode,@boundary_conditions,solinit,options);
6  solution = deval(sol,t);
7  plot(t,solution(1,:),'-ro',t,solution(2,:),'-.b')
8  legend('x','psi')
9
10 function dxpsi = system_of_ode(t,xpsi)
11   x     = xpsi(1);
12   psi   = xpsi(2);
13   dxpsi = [ -x^3 + psi;       % diferencialna rovnica pre x
14             x + 3*x^2*psi ]; % diferencialna rovnica pre psi
15
16 function result = boundary_conditions(x0psi0,xTpsiT)
17   result = [ x0psi0(1)-5;  % pociat. podm. v tvare x(0)-5=0
18              xTpsiT(2) ]; % koncova podm. v tvare psi(T)=0
```

Všimnime si, že argumenty funkcie „bvp4c“, ktorá je uvedená na riadku 5 tohto matlabovského kódu, zahŕňajú aj referencie na funkcie, ktorými sa definuje systém diferenciálnych rovníc pre vektorovú premennú $xpsi := (x(t), \psi(t))^T$ (funkcia „system_of_ode“), ako aj príslušné okrajové podmienky (funkcia „boundary_conditions“). Poznamenajme, že premenná $x0psi0(1)$ (uvedená na riadku 17) zodpovedá prvému prvku vektora $xpsi$ v bode 0 (t.j. $x(0)$). Analogicky, premenná $xTpsiT(2)$ (na riadku 18) zodpovedá druhému prvku vektora $xpsi$ v bode T (t.j. $\psi(T)$).

Výstupom z vyššie uvedeného programu je graf zobrazený na Obr. 8.4.



Obr. 8.4: Riešenie systému diferenciálnych rovníc (8.7) a (8.8) získané pomocou Matlabu.

8.3 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 8.1. Ako sa zmení okrajový problém v Príklade 8.1, ak počiatočnú podmienku (a voľný koniec) zmeníme nasledovne:

a) $x(0) = 1$, $x(1)$ voľné

b) $x(0) = 5$, $x(1) = 2$.

Riešte takto zmenené úlohy numericky, zobrazte $x(t)$, $\psi(t)$ a $u(t)$ graficky.

Úloha 8.2. Optimálny lov rýb. Majiteľ rybníka sa rozhoduje, koľko rýb má v ktorom období vyloviť tak, aby jeho celkový diskontovaný zisk bol čo najväčší. Nech $x(t)$ označuje množstvo rýb v rybníku, vyjadrené ako časť celkovej kapacity rybníka. Predpokladajme, že množstvo rýb na začiatku a na konci plánovacieho horizontu je dané. Ďalej nech $u(t)$ označuje tempo výlovu / predaja rýb v čase t. Predpokladáme, že čistý zisk z výlovu $p(u)$ je rastúca a rýdzokonkávna funkcia u. Túto úlohu možno sformulovať ako úlohu optimálneho riadenia s pevným časom a pevným koncom nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt} p(u)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ pevné},\\
&\dot{x} = x(1-x) - u,\\
&x(0) = x_0 \text{ dané},\\
&x(T) = x_T \text{ dané},\\
&x(t) \in [0,1],\\
&u(t) \geq 0.
\end{aligned}
$$

a) Napíšte podmienky PPM pre vnútorné riešenie (t.j. riešenie, kde $x(t) \in (0,1)$) a $u(t) > 0$), zdôvodnite $\psi^0 \neq 0$.

b) Z týchto podmienok odvoďte diferenciálnu rovnicu pre $\dot{u}$. (Návod: Z podmienky maxima vyjadrite ψ a dosaďte do adjungovanej rovnice.)

c) Stavová rovnica a diferenciálna rovnica z časti b) spolu tvoria systém dvoch nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc. Načrtnite fázový portrét tohto systému a určte charakter stacionárneho bodu.

d) Pomocou Matlabu nájdite a zobrazte riešenie podmienok PPM (fázový portrét aj vývoj stavovej a riadiacej premennej v závislosti od času) pre konkrétnu voľbu funkcie zisku $p(u) = \ln(1+u)$ a $r = 1/2$. Porovnajte vývoj riešenia pre rôznu počiatočnú a koncovú podmienku a rôzny časový horizont, zmeny opíšte a ekonomicky interpretujte.

e) Pre voľbu funkcie p uvedenú v časti d) diskretizujte systém diferenciálnych rovníc pre x a u a tento systém riešte ako okrajovú úlohu pomocou nástroja Solver / Goal seeker v programe Excel.

Úloha 8.3. Marketing telekomunikačnej firmy. Predpokladajme, že zisk telekomunikačnej firmy H_2O, ktorá len nedávno vstúpila na trh, je rastúcou a konkávnou funkciou (P) počtu ľudí, ktorí poznajú jej produkt (tento počet označme x, v mil.). Trhový podiel môže firma ovplyvniť dobre cieleným marketingom, pričom intenzitu marketingovej kampane označme u. Náklady na marketingovú kampaň sú kvadratickou funkciou premennej u. Nech $\delta > 0$ označuje mieru poklesu počtu ľudí oboznámených s produktom. Tento model možno sformulovať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}(P(x(t)) - u(t)^2)\,dt, \quad T \text{ pevné},\\
&\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t),\\
&x(0) = x_0,\\
&x(T) = x_T\\
&x(t) \geq 0,\\
&u(t) \geq 0,
\end{aligned}
$$

kde r, δ, x_0, x_T sú dané kladné parametre a funkcia P spĺňa predpoklad $\lim_{x\to 0} P'(x) = \infty$.

a) Pomocou tvaru stavovej rovnice a ohraničenia na riadenie ukážte, že ohraničenie na stavovú premennú možno z formulácie úlohy vypustiť a teda ide o úlohu bez ohraničení na stavové premenné.

b) Sformulujte podmienky PPM pre vnútorné riešenie $u(t) > 0$. Zdôvodnite, že $\psi^0 = 1$.

c) Pomocou týchto podmienok vyjadrite diferenciálnu rovnicu pre $\dot{u}$. Návod: Z podmienky maxima vyjadrite ψ a dosaďte do adjungovanej rovnice.

d) Načrtnite fázový portrét systému diferenciálnych rovníc pre x a u v priestore (x, u) a určte charakter stacionárneho bodu.

e) S využitím počítača nakreslite trajektórie optimálneho riadenia pre tri rôzne hodnoty T ($T = 1$, $T = 20$, $T = 40$), pre $P(x) = \sqrt{x}$ a pre hodnoty parametrov $\delta = 0.1$ a $r = 0.05$ a

   (i) $x(0) = 3, x(T) = 4$,

   (ii) $x(0) = 3, x(T) = 20$.

   Výsledky interpretujte.

Kapitola 9

Ramseyho model a analýza fázového portrétu.

V predchádzajúcej kapitole sme okrajovú úlohu (8.1)–(8.5) riešli numericky. V tejto kapitole ju budeme riešiť pomocou analýzy fázového portrétu. Na ilustráciu tejto metódy nám poslúži základný model neoklasickej teórie ekonomického rastu označovaný ako Ramseyho model. Na konci kapitoly svoje pozorovania rozšírime na všeobecnejšie úlohu.

9.1 Formulácia Ramseyho modelu na konečnom časovom horizonte

Ramseyho model vedie na nasledovnú autonómnu úlohu optimálneho riadenia s diskontáciou, ktorú v tejto časti budeme najprv uvažovať na konečnom časovom horizonte. V časti 16.6 sa k nemu vrátime a budeme ho uvažovať aj na nekonečnom časovom horizonte. Tento model sa môže sformulovať nasledovne:

$$\max \int_0^T e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))dt, \quad T \text{ pevné}, \tag{9.1}$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \delta k(t) - c(t), \quad t \in [0, T], \tag{9.2}$$

$$k(0) = k_0, \tag{9.3}$$

$$k(T) = k_T, \tag{9.4}$$

kde k označuje kapitál na jednotku práce a c spotrebu. O úžitkovej funkcii $\mathrm{U}(c)$ predpokladáme, že je definovaná pre všetky kladné c a spĺňa predpoklady $\mathrm{U} \in C^2$, $\mathrm{U}'(c) > 0$ a $\mathrm{U}''(c) < 0$ spolu s limitnými podmienkami

$$\lim_{c\to 0^+} \mathrm{U}'(c) = \infty, \qquad \lim_{c\to\infty} \mathrm{U}'(c) = 0.$$

O produkčnej funkcii $f(k)$ predpokladáme, že je definovaná pre všetky nezáporné k, pričom $f(0) = 0$ a že spĺňa analogické vlastnosti ako U, t.j. $f \in C^2$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$

a

$$\lim_{k\to 0^+} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0. \tag{9.5}$$

Konštanta $\delta > 0$ je mierou znehodnocovania kapitálu, konštanta $r > 0$ mierou netrpezlivosti spotrebovávať. Ďalej, k_0, k_T a T sú kladné konštanty.

Všimnime si, že v prípade, že zanedbávame amortizáciu kapitálu $\delta = 0$ a ak predpokladáme lineárnu produkčnú funkciu $f(k) = ik$, kde i je kladná konštanta, dostaneme úlohu o optimálnej spotrebe z Príkladu 1.2.

9.2 Okrajová úloha pre Ramseyho model

Aplikujme na túto úlohu nutné podmienky optimality a odvodíme z nich okrajový problém. Hamiltonova funkcia prislúchajúca k tejto úlohe má tvar

$$H(k, c, \psi) = \psi^0 e^{-rt}\mathrm{U}(c) + \psi(f(k) - \delta k - c).$$

Potom adjungovanou rovnicou je

$$\dot{\psi} = (\delta - f'(k))\psi, \tag{9.6}$$

podmienkou transverzality je

$$\psi(T) = \chi \tag{9.7}$$

a podmienkou maxima je

$$H(k, c, \psi) = \psi^0 e^{-rt}\mathrm{U}(c) + \psi(f(k) - \delta k - c) \to \max_{c.0}. \tag{9.8}$$

Ak by $\psi^0 = 0$, tak by sme v podmienke maxima hľadali maximum lineárnej funkcie ψc na otvorenom intervale $(0, \infty)$. Extrém by sa nadobudol, iba ak by bolo $\psi = 0$. Funkcia $\psi(t)$ však spĺňa adjungovanú rovnicu (9.6), ktorá lineárna a homogénna a teda ak v nejakom t je $\psi(t) = 0$, tak potom je $\psi(t) \equiv 0$. Potom z podmienky transverzality (9.7) dostávame, že aj $\chi = 0$, čo je spor s požiadavkou $(\psi^0, \chi) \neq 0$. Môžeme teda dosadiť $\psi^0 = 1$ do podmienky maxima (9.8). V tejto podmienke maxima hľadáme voľný extrém - maximum konkávnej funkcie, a teda maximum sa nadobúda tam, kde derivácia H podľa c je rovná nule. Z toho dostávame, že

$$\psi(t) = e^{-rt}\mathrm{U}'(c(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{9.9}$$

Derivovaním (9.9) podľa času dostaneme

$$\dot{\psi} = -re^{-rt}\mathrm{U}'(c) + e^{-rt}\mathrm{U}''(c)\dot{c}. \tag{9.10}$$

Dosadením (9.10) do adjungovanej rovnice (9.6) dostaneme po úprave nasledovnú diferenciálnu rovnicu pre c:

$$\dot{c} = \frac{\mathrm{U}'(c)}{\mathrm{U}''(c)}[r + \delta - f'(k)]. \tag{9.11}$$

Poznamenajme, že pre túto úlohu budeme vedieť neskôr dokázať, že nutné podmienky optimality sú aj postačujúce (viď. Príklad 13.2). Z toho vyplýva, že optimálny tok spotreby a kapitálu dostaneme riešením okrajového problému daného rovnicami (9.2) a (9.11) a podmienkami (9.3) a (9.4).

V prípade, že poznáme konkrétne zadanie funkcií a konštánt vstupujúcich do formulácie úlohy, môžeme vzniknutú okrajovú úlohu numericky riešiť, napríklad pomocou Excelu (analogicky ako v časti 8.2) alebo Matlabu (pozri Príklad 9.1). V nasledujúcom budeme túto úlohu riešiť všeobecne, pomocou analýzy fázového portrétu.

9.3 Analýza fázového potrétu pre Ramseyho model

(a) *Rovnovážne stavy* pre systém rovníc (9.2) a (9.11) dostaneme z podmienok $\dot{k} = 0$ a $\dot{c} = 0$, to znamená

$$c = f(k) - \delta k,$$
$$\frac{\mathrm{U}'(c)}{\mathrm{U}''(c)} = 0 \text{ alebo } f'(k) = r + \delta.$$

Z predpokladov na funkciu $f'(k)$ vyplýva, že existuje práve jedno $\hat{k}$ také, že $f'(\hat{k}) = r + \delta$. Potom $\hat{c} := f(\hat{k}) - \delta\hat{k}$ a máme rovnovážny stav $(\hat{k}, \hat{c})$. Otázkou však je, či existuje také $\bar{c}$, že $\frac{\mathrm{U}'(\bar{c})}{\mathrm{U}''(\bar{c})} = 0$. Je zrejmé, že táto rovnosť nemôže platiť pre žiadne $\bar{c} > 0$ (kvôli predpokladom na funkciu U). Zároveň pre $\bar{c} < 0$ nemá význam, pretože funkcia U nemusí byť pre záporné hodnoty vôbec definovaná. Ukážeme však, že pre každú funkciu U, ktorá vyhovuje stanoveným podmienkam, platí

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{\mathrm{U}'(c)}{\mathrm{U}''(c)} = 0. \tag{9.12}$$

Pre každé $c > 0$ totiž platí

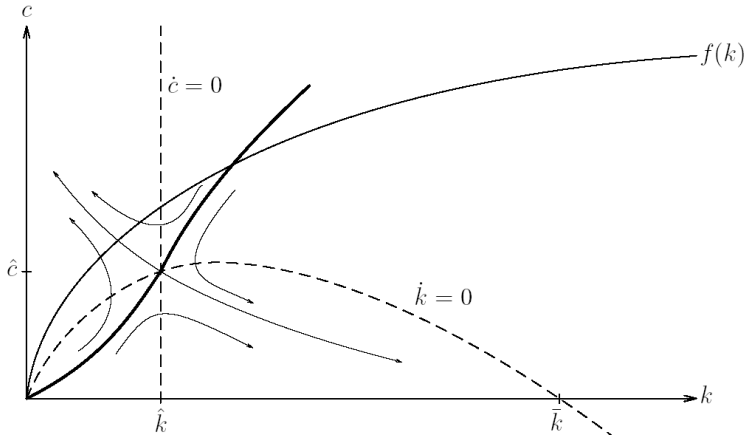
$$\int_0^c \frac{\mathrm{U}''(\xi)}{\mathrm{U}'(\xi)} d\xi = \ln \mathrm{U}'(c) - \lim_{c \to 0^+} \ln \mathrm{U}'(c) = -\infty.$$

Keďže hodnota podielu $\frac{\mathrm{U}''(c)}{\mathrm{U}'(c)}$ je konečná pre každé $c > 0$, predchádzajúca rovnosť implikuje, že

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{\mathrm{U}''(c)}{\mathrm{U}'(c)} = -\infty,$$

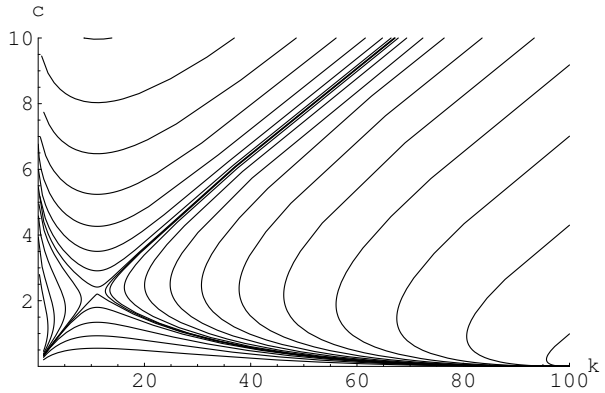
z čoho už vyplýva rovnosť (9.12). Znamená to, že rovnovážnymi bodmi sú aj body $(0, 0)$ a $(\bar{k}, 0)$, kde $\bar{k}$ spĺňa rovnosť $f(\bar{k}) = \delta\bar{k}$.

(b) *Izoklíny* dostaneme ako množiny bodov, v ktorých platí $\dot{c} = 0$ alebo $\dot{k} = 0$. Vieme, že $\dot{c} = 0$ práve vtedy, keď $c = 0$ alebo $k = \hat{k}$, kde $f'(\hat{k}) = r + \delta$. Ďalej $\dot{k} = 0$ práve vtedy,



Obr. 9.1: Fázový portrét pre Ramseyho model

keď $c = f(k) - \delta k$. Prvou izoklínou je v priestore (k, c) priamka $k = \hat{k}$, druhou priamka $c = 0$ a treťou krivka $c = f(k) - \delta k$. Vyšetríme priebeh funkcie $c(k)$: $k \to f(k) - \delta k$. Z predpokladov na $f(k)$ vyplýva, že $c(0) = 0$, $c(k)$ je konkávna a nadobúda maximum v jedinom bode, ktorý označíme k_M, kde $f'(k_M) = \delta$. Pretože $f'(k)$ je klesajúca, tak $0 < \hat{k} < k_M$. Zrejme $0 < \hat{k} < k_M < \bar{k} < \infty$. Priebeh izoklín je na obr. 9.1. Smer šípok vyznačuje pohyb v smere rastúceho času.



Obr. 9.2: Trajektórie systému rovníc (9.2) a (9.11) pre $\mathrm{U}(c) = \ln c$ ($\bar{k} = 100$)

(c) Vyšetríme teraz *typ rovnovážneho stavu* $(\hat{k}, \hat{c})$. Pretože (9.2) a (9.11) je nelineárny systém, tak typ rovnovážneho stavu zistíme z vlastných čísel Jakobiho matice J v $(\hat{k}, \hat{c})$.

Zrejme

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \dot{\hat{k}}}{\partial k}\right|_{(\hat{k},\hat{c})} &= f'(\hat{k}) - \delta > 0, \text{ pretože } \hat{k} < k_M, \\
\left.\frac{\partial \dot{\hat{k}}}{\partial c}\right|_{(\hat{k},\hat{c})} &= -1 < 0, \\
\left.\frac{\partial \dot{\hat{c}}}{\partial k}\right|_{(\hat{k},\hat{c})} &= -\frac{\mathrm{U}'(\hat{c})}{\mathrm{U}''(\hat{c})} f''(\hat{k}) < 0, \\
\left.\frac{\partial \dot{\hat{c}}}{\partial c}\right|_{(\hat{k},\hat{c})} &= 0, \text{ lebo } r + \delta - f'(\hat{k}) = 0 \text{ v } (\hat{k}, \hat{c}),
\end{aligned}$$

a teda

$$J = \begin{pmatrix} f'(\hat{k}) - \delta & -1 \\ -\frac{\mathrm{U}'(\hat{c})}{\mathrm{U}''(\hat{c})} f''(\hat{k}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} > 0 & < 0 \\ < 0 & = 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det J < 0.$$

Z toho vyplýva, že J má dve rôzne vlastné čísla, z ktorých jedno je kladné a druhé záporné, a teda rovnovážny stav $(\hat{k}, \hat{c})$ je typu sedlo. Trajektórie systému rovníc (9.2) a (9.11) sú teraz zobrazené na obr. 9.2. Z uvedeného vyššie však vieme, že medzi nimi musí byť optimálna trajektória pre danú úlohu.

(d) Ako teraz nájsť optimálnu trajektóriu pre zadanú úlohu? Dosiaľ sme nikde nevyužili počiatočnú a koncovú podmienku (9.3) a (9.4). Uvažujme teraz situáciu pre prípad, že $k_0 < \hat{k}$ a $k_T > \hat{k}$. Počiatočnú podmienku $k(0) = k_0$ a koncovú podmienku $k(T) = k_T$ spĺňa celé kontinuum kriviek, ktoré pretínajú zvislé priamky $k = k_0$ a $k = k_T$ a ležia pod sedlovou cestou konvergujúcou k rovnovážnemu stavu zľava a sedlovou cestou vychádzajúcou z rovnovážneho bodu a smerujúcou doprava. O tom, ktorá z týchto kriviek bude riešením pre zadanú hodnotu, teraz rozhodne hodnota koncového času T.

9.4 Numerické riešenie Ramseyho modelu

Príklad 9.1. Numerické riešenie Ramseyho modelu pre konkrétne hodnoty parametrov. Predpokladajme, že produkčná funkcia v Ramseyho modeli je v tvare $f(k) = \sqrt{k}$ a funkcia užitočnosti má tvar $\mathrm{U}(c) = \sqrt{c}$. Ďalej budeme predpokladať, že počiatoná hodnota kapitálu $k_0 = 0.5$ sa má zvýšiť na koncovú hodnotu $k_T = 2$. Hodnoty parametrov vyjadrujúcich mieru amortizácie a diskontnú sadzbu sú $\delta = 0.25$

a $r = 0.25$. Diferenciálne rovnice (9.2) a (9.11) sú potom v tvare

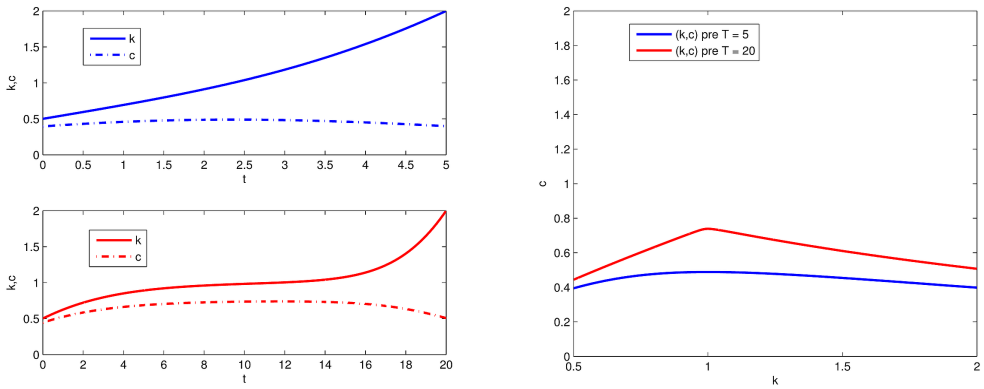
$$\dot{k} = \sqrt{k} - \delta k - c,$$
$$\dot{c} = -2c\left(\delta + r - \frac{1}{2\sqrt{k}}\right)$$

a $\hat{k} = 1$, $\hat{c} = 3/4$. Pomocou programu Matlab vykreslíme riešenie tohto systému pre dva rôzne dlhé časové horizonty, konkrétne pre $T = 5$ a pre $T = 20$. Samotný program vyzerá nasledovne:

```
RamseyModel
subplot(1,3,1);
t = 0:0.01:5;
r1 = Ramsey(t,0.25,0.25,0.5,2);
plot(t,r1(1,:),'-b',t,r1(2,:),'-.b');
subplot(1,3,2);
t = 0:0.01:20;
r2 = Ramsey(t,0.25,0.25,0.5,2);
plot(t,r2(1,:),'-r',t,r2(2,:),'-.r');
subplot(1,3,3);
plot(r1(1,:),r1(2,:),'-b',r2(1,:),r2(2,:),'-r')

function result = Ramsey(t,r,d,k0,kT)
 solinit = bvpinit(t,[0.5 1]); %initial guess
 options = [];
 sol = bvp4c(@system_of_ode,@bound_cond,solinit,options,r,d,k0,kT);
 result = deval(sol,t);

function dkc = system_of_ode(t,kc,r,d,k0,kT)
 dkc    = zeros(2,1); % stlpcovy vektor
 dkc(1) = sqrt(kc(1))-d*kc(1)-kc(2);
 dkc(2) = -2*kc(2)*(d+r-1/(2*sqrt(kc(1))));

function result = bound_cond(kc_0,kc_T,r,d,k0,kT)
 result    = zeros(2,1);
 result(1) = kc_0(1)-k0; % pociatocna podmienka v tvare k(0)-k0=0
 result(2) = kc_T(1)-kT; % koncova podmienka v tvare k(T)-kT=0
```

Program je analogický ako kód uvedený v Príklade 8.1, kde môže čitateľ nájsť aj podrobnejšie vysvetlenie jeho štruktúry a významu najdôležitejších príkazov.

Výsledkom programu sú grafy zobrazené na Obr. 9.3.



Obr. 9.3: Priebeh riešení Príkladu 9.1. Obrázok vľavo hore: Priebeh $k(t)$ a $c(t)$ v Ramseyho modeli s $T = 5$. Obrázok vľavo dole: Priebeh $k(t)$ a $c(t)$ v Ramseyho modeli s $T = 20$. Obrázok vpravo: Porovnanie riešení pre $T = 5$ a $T = 20$ v priestore (k, c).

Môžeme si všimnúť, že v prípade kratšieho časového horizontu je požadovaný rast hodnoty kapitálu rozložený pomerne rovnomerne na celom časovom horizonte (viď graf vľavo). Na druhej strane, v prípade dlhšieho časového horizontu sa otvára možnosť ponechať istý čas hodnotu kapitálu v okolí rovnovážnej úrovne $\hat{k} = 1$, ku ktorej sa kapitál zvýši z počiatočnej hodnoty $k_0 = 0.5$ po krátkom období nižšej spotreby v porovnaní s jej rovnovážnou úrovňou $\hat{c} = 0.75$ (pozri graf v strede). Krátko pred koncom plánovacieho horizontu je však potrebné opäť znížiť spotrebu, aby sa kapitál mohol ďalej zvýšiť až na požadovanú hodnotu $k_T = 2$.

9.5 Všeobecnejší pohľad na analýzu fázového portrétu

V tejto časti sa budeme zaoberať analýzou fázového portrétu pre nasledujúci tvar úlohy optimálneho riadenia, ktorý sa často vyskytuje v ekonomických modeloch:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T e^{-rt} F(x(t), u(t))dt, \quad & T \text{ pevné}, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, & \\ g(x(T)) = 0. & \end{aligned}$$

Ide o úlohu s jednorozmernou stavovou aj riadiacou premennou, ktorá je s výnimkou diskontného faktora autonómna. Úloha nezahŕňa žiadne ohraničenia okrem prípadného ohraničenia na koncový stav.

Predpokladajme, že Hamiltonova funkcia je rýdzo konkávna v premenných (x, u) a funkcia g je lineárna v x. Tieto predpoklady sú v ekonomických úlohách často splnené. Ako ukážeme neskôr (pozri Vetu 13.2 a Poznámku 2 za touto vetou), táto vlastnosť spolu s podmienkou $\psi^0 = 1$ zabezpečuje, že podmienky Pontriaginovho princípu maxima sú zároveň postačujúcimi podmienkami pre optimálne riešenie a riešenie spĺňajúce tieto podmienky je zároveň jediným optimálnym riešením.

Analogicky ako v časti 7.1, definujme Hamiltonovu funkciou vzťahom vyjadrujúcim jej okamžitú hodnotu v čase t

$$\mathcal{H}(x, u, \psi) = F(x, u) + \psi f(x, u). \tag{9.13}$$

Z podmienky maxima potom vyplýva, že optimálne riešenie musí spĺňať rovnosť

$$\mathcal{H}_u(x, u, \psi) = F_u(x, u) + \psi f_u(x, u) = 0, \tag{9.14}$$

pričom z dôvodu vyššej prehľadnosti sme použili označenie parciálnej derivácie podľa príslušnej premennej formou dolného indexu. Zároveň vieme, že adjungovaná rovnica má v tomto prípade tvar

$$\dot{\psi} = r\psi - \mathcal{H}_x(x, u, \psi). \tag{9.15}$$

Podmienka maxima, adjungovaná rovnica a stavová rovnica teda spolu tvoria systém troch rovníc, z čoho dve rovnice sú diferenciálne. Zároveň máme tri neznáme funkcie $x(t)$, $u(t)$ a $\psi(t)$. Základná myšlienka analýzy fázového portrétu spočíva v eliminácii jednej z týchto troch funkcií pomocou podmienky maxima, čím dostaneme systém dvoch diferenciálnych rovníc s dvoma neznámymi. Vďaka uvedenému spôsobu riešenia úlohy, v ktorom sa diskontný faktor nezahŕňa do Hamiltonovej funkcie, je tento systém diferenciálnych rovníc autonómny. Môžeme preto analyzovať fázový portrét trajektórií riešení tohto systému.

Pri riešení konkrétnych úloh je z hľadiska interpretácie získaného fázového portrétu výhodné eliminovať adjungovanú premennú a fázový portrét zobraziť v rovine (x, u), podobne ako vo vyššie uvedenom riešení Ramseyho modelu. My sa však budeme zaoberať postupom využívajúcim elimináciu riadiacej premennej, ktorý možno považovať za všeobecnejší.

Keďže sme predpokladali, že Hamiltonova funkcia je rýdzo konkávna v premenných (x, u), jej parciálna derivácia $\mathcal{H}_u$ je rýdzo rastúca funkcia u. Z rovnosti (9.14) preto môžeme vyjadriť u ako funkciu x a ψ: $u = u(x, \psi)$ a teda

$$\mathcal{H}_u(x, u(x, \psi), \psi) = 0. \tag{9.16}$$

Dosadením do stavovej rovnice a adjungovanej rovnice dostame systém dvoch autonómnych diferenciálnych rovníc prvého rádu v tvare

$$\dot{x} = f(x, u(x, \psi)), \tag{9.17}$$

$$\dot{\psi} = r\psi - \mathcal{H}_x(x, u(x, \psi), \psi). \tag{9.18}$$

Zaujíma nás charakter prípadných stacionárnych bodov tohto systému. Z teórie diferenciálnych rovníc (pozri aj Prílohu B) vieme, že charakter stacionárneho bodu $(\hat{x}, \hat{\psi})$ možno určiť pomocou jakobiánu uvedeného systému diferenciálnych rovníc v danom bode. Jakobián má tvar

$$J = \begin{pmatrix} f_x(\hat{x}, \hat{u}) + f_u(\hat{x}, \hat{u}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial x} & f_u(\hat{x}, \hat{u}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial \psi} \\ -\mathcal{H}_{xx}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\psi}) - \mathcal{H}_{xu}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\psi}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial x} & r - f_x(\hat{x}, \hat{u}) - H_{xu}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\psi}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial \psi} \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

kde $\hat{u} := u(\hat{x}, \hat{\psi})$. Vďaka predpokladu, že Hamiltonova funkcia je rýdzo konkávna v u, dostávame implicitným derivovaním vzťahu (9.16):

$$\frac{\partial u(x, \psi)}{\partial x} = -\frac{\mathcal{H}_{xu}(x, u(x, \psi), \psi)}{\mathcal{H}_{uu}(x, u(x, \psi), \psi)}$$

a

$$\frac{\partial u(x, \psi)}{\partial \psi} = -\frac{f_u(x, u(x, \psi))}{\mathcal{H}_{uu}(x, u(x, \psi), \psi)}.$$

Tieto vzťahy využijeme k tomu, aby sme pri označení

$$a := f_x(\hat{x}, \hat{u}) + f_u(\hat{x}, \hat{u}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial x}, \tag{9.20}$$

$$b := f_u(\hat{x}, \hat{u}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial \psi}, \tag{9.21}$$

$$c := -\mathcal{H}_{xx}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\psi}) - \mathcal{H}_{xu}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\psi}) \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{\psi})}{\partial x} \tag{9.22}$$

mohli Jakobián prepísať do tvaru

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & r - a \end{pmatrix}. \tag{9.23}$$

Vlastné čísla tejto matice sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(r \pm \sqrt{r^2 - 4a(r - a) + 4bc} \right). \tag{9.24}$$

Pokiaľ sú tieto vlastné čísla reálne, väčšie z nich je určite kladná (pretože pre diskontný faktor platí $r > 0$). Menšie z vlastných čísel pritom môže byť kladné, nulové alebo záporné. Na druhej strane, pokiaľ vlastné čísla nie sú reálne, ich reálna časť je kladná. Znamená to, že uvedený stacionárny bod je buď nestabilný, alebo je to sedlo. Sedlový charakter pritom dostávame v prípade reálnych vlastných hodnôt s navzájom opačným znamienkom, nestabilný charakter vo všetkých ostatných prípadoch. Z uvedeného dôvodu sa v ekonomických modeloch s konkávnou Hamiltonovou funkciou najčastejšie stretávame s tým, že stacionárny bod je typu sedlo.

9.6 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 9.1. V Príklade 9.1 odhadnite časový priebeh $k(t)$ a $c(t)$ pre iné možné kombinácie počiatočného a koncového stavu vzhľadom na vypočítaný rovnovážny stav a pre malé a veľké hodnoty času T (napr. $k_0 = 2, k_T = 4$ a $k_0 = 2, k_T = 1/2$). Zakreslite ich do fázového portrétu. Vypočítajte numericky.

Úloha 9.2. Dokážte, že ak matica A typu 2×2 má záporný determinant, potom má dve rôzne reálne vlastné čísla, z ktorých jedno je kladné a druhé záporné.

Úloha 9.3. Na ktorom mieste analýzy fázového portrétu sme použili predpoklady (9.5)? Ako by sme mohli tieto predpoklady oslabiť?

Úloha 9.4. Model produkcie a zásob (production-inventory model)

PAPIER & SYN, s.r.o., popredný výrobca papiera, vyrába papier pre rôznych odberateľov. Ich dopyt je však premenlivý a nemožno ho predpovedať úplne presne. Podnik preto musí udržiavať istú úroveň zásob vyrobeného papiera, aby dokázal tento meniaci sa dopyt v čo najväčšej miere uspokojiť. Výhodou možnosti tvorby zásob je aj to, že umožňujú skladovať prebytkovú produkciu v časoch nízkeho dopytu, a nie je preto potrebné príliš meniť veľkosť produkcie. Tá je totiž závislá od vybavenia papierne a jej veľké zmeny sú príliš nákladné. Na druhej strane, skladovaním papiera vznikajú dodatočné náklady, ktoré sú súčtom nákladov na fyzické skladovanie, poistenie a pod., a ušlého zisku z peňazí viazaných v zásobách, ktoré takto nemôžu byť úročené.

Predpokladajme, že papiereň pozná optimálne množstvo zásob, ktoré potrebuje udržiavať na sklade. Cieľom je udržiavať úroveň zásob čo najbližšie tejto hodnote, ale zároveň udržiavať úroveň produkcie čo najbližšie k jej optimálnej hodnote. Túto úlohu možno formulovať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\min \int_0^T e^{-rt} \left((I(t) - \hat{I})^2 + (P(t) - \hat{P})^2 \right) \mathrm{d}t, \qquad T \text{ dané},\\
&\dot{I}(t) = P(t) - s,\\
&I(0) = I_0 \text{ dané},\\
&I(T) = I_T \text{ dané},\\
&P(t) \geq 0,
\end{aligned}
$$

kde

$I(t)$ objem zásob (inventory) — stavová premenná,
$P(t)$ miera produkcie (production rate) — riadiaca premenná,
s miera predaja (sale rate) ($s > 0$) — daná konštantna,
$\hat{I}$ optimálna úroveň zásob ($\hat{I} > 0$) -– daná konštantna,
$\hat{P}$ optimálna úroveň produkcie ($\hat{P} > 0$) -– daná konštantna,
r diskontná sadzba ($r > 0$), kde predpokladáme, že $\hat{I} \geq r(s - \hat{P})$,

a) Sformulujte podmienky PPM pre vnútorné riešenie $P(t) > 0$ a $\psi^0 = -1$.

b) Z týchto podmienok vyvoďte diferenciálnu rovnicu pre P. (Návod: Z podmienky maxima nájdite podmienku pre ψ, podmienku derivujte podľa času a následne využite adjungovanú rovnicu.)

c) Stavová rovnica a diferenciálna rovnica pre P spolu tvoria systém dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc pre (I, P). Určte stacionárny bod systému, ukážte, že ide o sedlo a načrtnite fázový portrét systému v priestore (I, P).

d) Pomocou Matlabu zobrazte fázový portrét systému pre konkrétnu voľbu parametrov $r = 0.05$, $\hat{I} = 1$, $\hat{P} = 1$, $s = 1$.

e) Numericky spočítajte okrajový problém a graficky zobrazte časový priebeh riadenia a jeho odozvy pre rôznu počiatočnú a koncovú podmienku a rôzny časový horizont. Voľte také hodnoty parametrov x_0 (napravo vs. naľavo od stacionárneho bodu) x_T (napravo vs. naľavo od stacionárneho bodu), T (malé vs veľké hodnoty), aby ste zobrazili všetky kvalitatívne odlišné priebehy riešení. Zmeny opíšte, dajte do súvisu s načrtnutým fázovým potrétom vyznačením príslušných trajektórií a ekonomicky interpretujte. Všímajte si, ktoré z týchto vnútorných riešení spĺňajú ohraničenie úlohy, ktoré sme doteraz ignorovali.

f) Zdôvodnite optimálnosť nájdených riešení.

Kapitola 10

Bolzova úloha

Pomocou výsledkov z Kapitoly 6 odvodíme nutné podmienky optimality pre Bolzovu úlohu. Aplikujeme ich na riešenie úlohy o obchodovaní s komoditami.

10.1 Formulácia Bolzovej úlohy

Pod Bolzovou úlohou rozumieme ÚOR, kde účelová funkcia obsahuje aj funkciu koncového stavu systému, t. j. je to úloha

$$\begin{aligned}
&\max J := \int_0^T f^0(t,x,u)dt + \varphi(x(T)), \quad T - \text{pevné alebo voľné}\\
&\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in [0,T],\\
&x(0) = x_0,\\
&g(x(T)) = 0,\\
&u \in U,
\end{aligned}$$

kde $\varphi : R^n \to R$, $\varphi \in C^2$ a T môže byť voľné alebo pevne dané. Ostatné dáta a funkcie spĺňajú rovnaké predpoklady ako úloha Kapitoly 6.

Podobne ako v úlohe z Kapitoly 6, aj tu môžeme definovať Hamiltonovu funkciu pomocou adjungovanej premennej ψ predpisom

$$H(t,x,u,\psi,\psi^0) := \psi^0 f^0(t,x,u) + \psi^T f(t,x,u). \tag{HF}$$

Pomocou nej zapíšeme adjungovanú rovnicu formálne v skrátenom tvare

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}^T \tag{AR}$$

a podmienku maxima schématicky naznačenú ako:

$$H \longrightarrow \max_{u \in U}. \tag{PM}$$

Budeme vidieť, že pre Bolzovu úlohu možno sformulovať nutné podmienky optimality v termínoch práve uvedenej Hamiltonovej funkcie a k nej prislúchajúcej (AR) a (PM). Nutné podmienky odvodíme z podmienok pre Lagrangeovu úlohu z Kapitoly 6.

10.2 Odvodenie PPM pre Bolzovu úlohu

Je zrejmé, že nutné podmienky optimality pre vyššie sformulovanú Bolzovú úlohu budú rovnaké ako pre úlohu, kde ku J bude pripočítaná konštanta, t. j. účelovou funkciou bude

$$\tilde{J} = \int_0^T f^0(t,x,u)dt + \varphi(x(T)) - \varphi(x(0)).$$

Podmienky odvodíme tak, že $\tilde{J}$ prevedieme na Lagrangeov tvar:

$$\tilde{J} = \int_0^T f^0(t,x,u)dt + \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt = \int_0^T [f^0(t,x,u) + \varphi'(x)f(t,x,u)]dt.$$

To je už úloha v štandardnom tvare. Adjungovanú premennú pre túto úlohu označíme $\tilde{\psi}$ a Hamiltonova funkcia bude mať tvar

$$\tilde{H}(t,x,u,\tilde{\psi},\tilde{\psi}^0) = \psi^0(f^0(t,x,u) + \varphi'(x)f(t,x,u)) + \tilde{\psi}^T f(t,x,u).$$

Aplikujeme na túto úlohu PPM (použijeme iba formálny skrátený zápis jednotlivých podmienok). To znamená, $(\psi^0, \chi) \neq 0$, $\psi^0 \geq 0$, adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(f^0 + \varphi' f)\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \tilde{\psi}, \qquad (\widetilde{AR})$$

z čoho po úprave dostávame

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \tilde{\psi}.$$

Podmienka transverzality má tvar

$$\tilde{\psi}(T) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \chi, \qquad (\widetilde{PT})$$

podmienka maxima

$$\psi^0(f^0 + \varphi' f) + \tilde{\psi}^T f \quad \to \max_{u \in U} \qquad (\widetilde{PM})$$

a platí príslušná podmienka stacionarity podľa typu úlohy. Úpravou podmienky maxima dostávame

$$\psi^0 f^0 + \psi^T f \quad \to \max_{u \in U}, \qquad (\mathrm{PM})$$

kde sme označili

$$\psi^T = \psi^0 \varphi' + \tilde{\psi}^T,$$

t. j.

$$\psi := \tilde{\psi} + (\psi^0 \varphi')^T. \qquad (10.1)$$

Odvoďme pre túto novú premennú diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \dot{\tilde{\psi}}' + \frac{d}{dt}(\psi^0\varphi')^T \\
&= -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} f\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \tilde{\psi} + \psi^0 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} f\right)^T \\
&= -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \left((\varphi'\psi^0)^T + \tilde{\psi}\right) = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi, \qquad \text{(AR)}
\end{aligned}$$

čo je adjungovaná rovnica v štandardnom tvare. Akú koncovú podmienku bude spĺňať ψ? Zo vzťahu (10.1) dostávame

$$\psi(T) = \tilde{\psi} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^T \psi^0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \chi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^T \psi^0. \qquad \text{(PT)}$$

Vidíme, že jediné, čo sa zmenilo oproti úlohe s Lagrangeovou účelovou funkciou, je podmienka transverzality. Odvodený výsledok môžeme sformulovať do vety.

Veta 10.1 (PPM pre Bolzovu úlohu)**.** *Oproti úlohe s Lagrangeovou účelovou funkciou sa v Bolzovej úlohe zmení iba podmienka transverzality. To znamená, že namiesto podmienky*

$$\psi(T) = \left(\frac{\partial g(x(T))}{\partial x}\right)^T \chi$$

máme v Bolzovej úlohe podmienku

$$\psi(T) = \left(\frac{\partial g(x(T))}{\partial x}\right)^T \chi + \left(\frac{\partial\varphi(x(T))}{\partial x}\right)^T \psi^0.$$

Poznámka: Z odvodenia nutných podmienok a z Poznámky 3 v Kapitole 6 vyplýva, že v prípade, že úloha má voľný koniec, tak $\chi = 0$ a $\psi^0 = 1$.

10.3 Riešenie úloh

Použitie Vety 10.1 ilustrujeme na riešení nasledujúcej úlohy.

Príklad 10.1. Obchodovanie s komoditami. Pri obchodovaní s komoditami (takými ako pšenica, káva, nafta) obchodníci nakupujú a znova predávajú komodity s cieľom získať profit. Možnosť úspechu závisí na sezónnych a dlhodobých zmenách ceny komodít. Veľká časť umenia úspešného obchodníka závisí od schopnosti robiť presnú predpoveď budúcich cien komodít na čo možno najdlhšie obdobie. Keď je urobená predpoveď ceny na obdobie $[0, T]$, tak je možné formulovať úlohu: treba určiť, kedy

majú byť komodity nakúpené, kedy predané a kedy má byť obchodník pasívny, aby sa maximalizovali aktíva, ktoré obchodník vlastní v čase T.

Neskôr, keď je zaznamenané skutočné správanie ceny, je možné vypočítať, aký by bol býval maximálny profit, keby toto správanie bolo známe a bola by použitá optimálna stratégia. Porovnanie medzi realizovaným a optimálnym profitom by mohlo byť použité ako indikátor na meranie obchodníkových schopností.

V praxi sú operácie predaja a nákupu diskrétne, tu však použijeme spojitý model, ktorý je prehľadný a ľahký na ďalšiu analýzu.

Skôr ako sformulujeme problém do tvaru úlohy optimálneho riadenia, zavedieme niektoré označenia a upresníme predpoklady:

- $x^1(t)$ - množstvo hotovosti v čase t;
- $x^2(t)$ - množstvo komodity v čase t;
- $p(t)$ - jednotková cena v čase t (daná funkcia);
- $u(t)$ - rýchlosť predávania, $(-\alpha \leq u \leq \beta)$, záporné hodnoty predstavujú nakupovanie;
- β - maximálna povolená rýchlosť predávania (maximálny možný počet predaných jednotiek komodity za jednotku času);
- α - maximálna povolená rýchlosť nakupovania (maximálny možný počet nakúpených jednotiek komodity za jednotku času);
- vlastnenie komodít vyžaduje poplatky za skladovanie, ktoré sú úmerné množstvu držaných komodít (s konštantou úmernosti $s > 0$);
- sx^2 - cena za skladovanie množstva komodity x^2 za jednotku času;
- začíname v čase $t = 0$, kedy vlastníme komodity o množstve $a^2 > 0$ a máme k dispozícii hotovosť $a^1 > 0$;
- konečný stav nie je určený, ale cieľom je maximalizovať aktíva v čase $t = T$, t.j. $x^1(T) + p(T)x^2(T)$.

Dostali sme teda úlohu:

$$
\begin{aligned}
&\max x^1(T) + p(T)x^2(T), \quad T - \text{dané} \\
&\dot{x}^1 = p(t)u(t) - sx^2(t), \quad t \in [0, T], \\
&\dot{x}^2 = -u(t), \\
&x^1(0) = a^1 > 0 \\
&x^2(0) = a^2 > 0, \\
&u \in [-\alpha, \beta].
\end{aligned}
$$

Túto úlohu budeme riešiť pri predpoklade, že $\alpha = \beta = 1$. Znamená to, že maximálna povolená rýchlosť predávania sa rovná maximálnej povolenej rýchlosti nakupovania. Zároveň sme tým úlohu vyjadrili v takých jednotkách množstva komodity a času, aby maximálne rýchlosti predaja či nákupu (vyjadrené v týchto jednotkách) boli rovné jednej.

Dostali sme úlohu s tzv. Mayerovou účelovou funkciou, kde v Bolzovej úlohe je podintegrálna funkcia rovná nule. Ide o úlohu s pevným časom, s dvojrozmerným stavom a voľným koncom. Voľný koniec implikuje $\chi = 0$ a $\psi^0 = 1$. Dvojrozmerný stav znamená, že adjungovaná premenná má tiež dve zložky, ktoré označíme ψ^1 a ψ^2.

Aplikujme teda na úlohu odvodené podmienky PPM. Zrejme Hamiltonova funkcia má tvar

$$H = \psi^1(pu - sx^2) - \psi^2 u,$$

adjungovaná rovnica

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^1 &= 0, \\ \dot{\psi}^2 &= s\psi^1, \end{aligned}$$

podmienka transverzality

$$\begin{aligned} \psi^1(T) &= 1, \\ \psi^2(T) &= p(T) \end{aligned}$$

a podmienka maxima

$$\psi^1(pu - sx^2) - \psi^2 u \to \max_{u \in [-1,1]} .$$

Úpravou podmienky maxima dostaneme

$$(\psi^1 p - \psi^2)u - \psi^1 s x^2 \to \max_{u \in [-1,1]}$$

a vyjadríme riadenie ako funkciu adjungovanej premennej

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi^1 p - \psi^2 > 0, \\ -1, & \text{ak } \psi^1 p - \psi^2 < 0, \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \psi^1 p - \psi^2 = 0. \end{cases}$$

Riešením adjungovanej rovnice a podmienky transverzality je

$$\begin{aligned} \psi^1(t) &= 1, \\ \psi^2(t) &= s(t - T) + p(T). \end{aligned}$$

Dosadením do vzťahu pre riadenie dostávame

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } p(t) - p(T) + s(T - t) > 0, \\ -1, & \text{ak } p(t) - p(T) + s(T - t) < 0, \\ \text{neurčené}, & \text{ak } p(t) - p(T) + s(T - t) = 0, \end{cases}$$

a teda riadenie vieme určiť pre ľubovoľnú cenovú funkciu $p(t)$ (až na singulárny prípad $p(t) - p(T) + s(T - t) = 0$).

Na ďalšiu analýzu potrebujeme poznať konkrétny priebeh cenovej funkcie. Nech napríklad cenová funkcia je daná nasledovným predpisom:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 - p_1 t, & \text{ak } t \in [0, T/2], \\ p_0 + p_1(t - T), & \text{ak } t \in [T/2, T], \end{cases}$$

kde $p_0, p_1 > 0$. To znamená na polovičke uvažovaného obdobia najprv cena klesá rýchlosťou p_1 a na druhej polovici rastie tou istou rýchlosťou, v dôsledku čoho $p(0) = p(T)$. Označme

$$v(t) := p(t) - p(T) + s(T - t).$$

Je ľahko vidieť, že

$$v(t) = \begin{cases} sT - t(p_1 + s), & \text{ak } \ t \in [0, T/2], \\ T(s - p_1) + t(p_1 - s), & \text{ak } \ t \in [0, T/2]. \end{cases}$$

Znamienko funkcie $v(t)$ rozhoduje o tom, aké bude riadenie. Všimnime si, že

$$v(0) = sT, \qquad v(T) = 0,$$

to znamená, že spojitá funkcia $v(t)$ začína kladnými hodnotami a končí v nule. Nadobudne niekde aj záporné hodnoty?

Vidieť, že na intervale $[0, T/2]$ je $v(t)$ vždy klesajúca. Na intervale $[T/2, T]$ jej správanie závisí od znamienka výrazu $p_1 - s$. Uvažujme všetky tri možnosti:

(a) Nech $s > p_1$. V tomto prípade je $v(t)$ klesajúca aj na $[T/2, T]$ klesajúca a pretože $v(T) = 0$, musí byť $v(t) > 0$ na celom $[0, T]$. Z toho vyplýva, že $u(t) \equiv 1$ a $x^2(t) = a^2 - t$. To znamená, že cena za skladovanie je príliš vysoká, a teda predávame maximálnou rýchlosťou.

(b) Prípad $s < p_1$ znamená, že na prvom intervale $v(t)$ klesá a na druhom rastie do nuly. Z toho vyplýva, že existuje $t_s \in [0, T/2]$ také, že $sT - t_s(p_1 + s) = 0$ a teda $t_s = \frac{sT}{p_1 + s}$. Z toho dostávame, že

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \ t \in [0, t_s], \\ -1, & \text{ak } \ t \in [t_s, T]. \end{cases}$$

To znamená, že najprv predávame maximálnou rýchlosťou a potom v určitom predstihu pred zmenou vývoja ceny začneme maximálnou rýchlosťou nakupovať.

(c) V prípade, že $s = p_1$, dostávame

$$v(t) = \begin{cases} sT - 2ts, & \text{ak } t \in [0, T/2], \\ 0, & \text{ak } t \in [T/2, T], \end{cases}$$

a teda

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } t \in [0, T/2], \\ \text{neurčené}, & \text{ak } t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

V tomto prípade teda nastala situácia, kedy riadenie nie je jednoznačne určené z podmienky maxima. Otázne teda je, aká hodnota riadenia je optimálna v tomto prípade. Všimnime si, že pre cenu platí $p(t) = st + p_0 - sT$, a teda $\dot{p} = s$ pre $t \in [T/2, T]$. Ukážeme, že hodnota účelovej funkcie $\phi(x(t))$ sa v tomto prípade na danom intervale nemení a nezávisí od riadenia. Zo stavovej rovnice máme

$$\dot{x^1}(t) = -p(t)\dot{x}^2(t) - sx^2(t) = -\frac{d}{dt}(p(t)x^2(t)),$$

z čoho

$$x^1(t) = -p(t)x^2(t) + K, \quad t \in [T/2, T]$$

a teda

$$\phi(x(t)) = -x^1(t) - p(t)x^2(t) = -p(t)x^2(t) - k + p(t)x^2(t) = -k, \quad t \in [T/2, T].$$

To znamená, že v tomto prípade je na danom intervale optimálne akékoľvek riadenie (s hodnotami v intervale $[-1, 1]$).

10.4 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 10.1. Liečba infekcie. Riešte nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T 2dt + \frac{1}{2}(x(T))^2, \quad T \text{ voľné}, \\ &\dot{x} = -x - u, \quad t \in [0, T], \\ &x(0) = a > 1, \quad x(T) \text{ voľné}, \\ &u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Túto úlohu možno interpretovať ako medicínsky problém hľadania optimálneho času operácie pri prebiehajúcej infekcii. Uvažujme pacienta čakajúceho na operáciu, ktorý sa nakazil infekciou ($x(t)$ - úroveň infekcie). Pre vykonanie operácie je žiadúce znížiť úroveň infekcie. Keby sa nechal infekcii voľný priebeh, pacient by ju síce zdolal, ale mohlo by to trvať príliš dlho. Preto sa pacientovi podávajú lieky ($u(t)$ - vplyv liekov na zníženie infekcie), ktoré urýchľujú zdolanie infekcie. Učelová funkcia modeluje dve konfliktné možnosti:

- redukovať infekciu a čakať s operáciou;
- operovať čím skôr aj keď je infekcia vysoká.

Úloha 10.2. Nájdite nejakú ekonomickú interpretáciu predchádzajúcej úlohy.

Úloha 10.3. Úloha o optimálnej údržbe stroja. Zmena stavu stroja je popísaná rovnicou $\dot{x}(t) = -\delta x(t) + u(t)$, kde $\delta > 0$ je daná miera opotrebovania stroja a u vyjadruje mieru údržby stroja. Počiatočný stav stroja je daný. Úlohou je nájsť optimálnu mieru údržby stroja, ktorá maximalizuje celkový zisk: Ten je tvorený ziskom z využívania stroja (ktorý je lineárnou funkciou jeho aktuálneho stavu) zníženého o náklady na údržbu stroja, ktoré sú kvadratickou funkciou miery údržby u. K tomuto zisku vytvorenému postupne počas doby využívania stroja sa navyše pripočíta zostatková hodnota stroja na konci tohto obdobia, ktorá je priamo úmerná jeho stavu na konci. Úlohu možno sformulovať v Bolzovom tvare nasledovne:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T \left(\pi x(t) - \frac{u(t)^2}{2}\right) \mathrm{d}t + Sx(T), \quad T \text{ dané} \\
&\dot{x}(t) = -\delta x(t) + u(t), \\
&x(0) = x_0, \quad x(T) \text{ voľné}, \\
&u(t) \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

kde π, S, δ, x_0, T sú dané kladné konštanty.

(i) Sformulujte podmienky PPM pre túto úlohu.

(ii) Ukážte, že podmienky PPM sú splnené s $\psi^0 \neq 0$.

(iii) Nájdite riešenie podmienok PPM (stačí nájsť riadenie, odozvu netreba).

(iv) Ukážte, ako sa mení u v závislosti od výrazu $S - \dfrac{\pi}{\delta}$. Tento výsledok interpretujte.

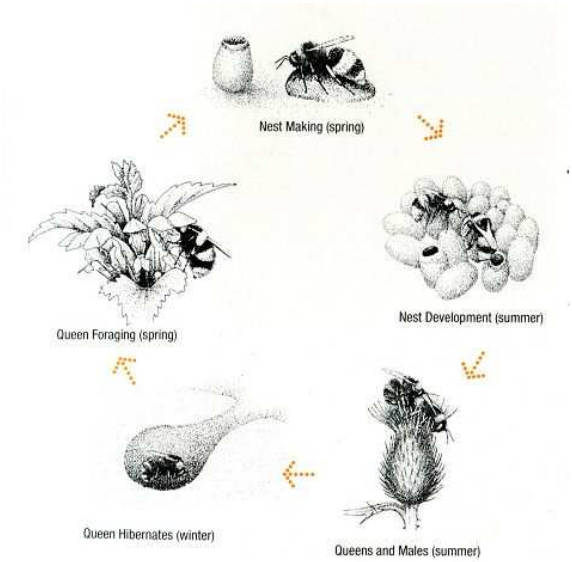
(v) Zistite znamienko adjungovanej premennej počas doby využívania stroja a jej hodnotu v čase T. Interpretujte.

Úloha 10.4. Životný cyklus čmeliakov. Predpokladajme, že životný cyklus možno opísať nasledujúcim zjednodušeným modelom:

$$\begin{aligned}
&\max y(T), \quad T \text{ pevné}, \\
&\dot{x} = aux - bx, \quad a > b > 0 \\
&\dot{y} = (1-u)x, \\
&x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) \text{ voľné}, \\
&y(0) = y_0 > 0, \quad y(T) \text{ voľné}, \\
&u(t) \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Stavová premenná $x(t)$ označuje počet robotníc, stavová premenná $y(t)$ počet kráľovien. Robotnice rozkladajú svoje úsilie buď na produkciu ďalších robotníc alebo kráľovien, čo je vyjadrené riadiacou premennou $u(t)$. Cieľom kolónie je mať na konci obdobia

čo najviac kráľovien. Ukážte, že riešenie spĺňajúce PPM pre túto úlohu zodpovedá skutočnému cyklu kolónie čmeliakov znázornenom na obrázku.[1]



Obr. 10.1: Životný cyklus kolónie čmeliakov.

Úloha 10.5. Odvodenie podmienok PPM pre úlohu v Mayerovom tvare. Daná je nasledovná úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\max \Phi(T), \quad T \text{ voľné} \\
&\dot{x} = f(x, u), \\
&x(0) = 0, \quad x(T) = x_T, \quad x_T \text{ dané}, \\
&u(t) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(i) Úlohu preveďte na úlohu v Lagrangeovom tvare a sformulujte pre ňu PPM (pomocou vety o podmienkach PPM pre štandardnú úlohu optimálneho riadenia).

(ii) Úlohu nechajte v Mayerovom tvare, ale zaveďte substitúciu, ktorou vyjadríte čas ako novú stavovú premennú. Sformulujte pre túto úlohu podmienky PPM (pomocou vety o podmienkach PPM pre Bolzovu úlohu).

(iii) Ukážte, že podmienky odvodené v (i) a (ii) sú ekvivalentné.

Úloha 10.6. Bolzova úloha s neautonómnou funkciou koncového stavu. Ukážte, že v prípade, že funkcia φ závisí nielen od x, ale aj od t, to znamená, že

[1] Zdroj: http://www.bumblebee.org/lifecycle.htm

maximalizujeme $\int_0^T f^0(t,x,u)dt + \varphi(T,x(T))$, kde T je voľné, tak sa okrem podmienky transverzality zmení aj podmienka stacionarity na podmienku

$$H|_{t=\hat{T}} = -\psi^0 \varphi_T(\hat{T}, x(\hat{T})).$$

V prípade využitia postupu z Poznámky 1 z Kapitoly 6 možno odvodiť

$$H(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\psi(t),\psi^0) = -\int_t^{\hat{T}} \frac{\partial H(s,\hat{x}(s),\hat{u}(s),\psi(s),\psi^0)}{\partial s} ds - \psi^0 \varphi_T(\hat{T}, x(\hat{T})). \quad (10.2)$$

pre každé $t \in [0, \hat{T}]$.

Kapitola 11

Ekonomická interpretácia PPM. Dynamické programovanie

V diskrétnom prípade sme mali dva teoretické a praktické nástroje na analýzu úloh optimálneho riadenia:

- princíp maxima (ako nutnú podmienku) a

- rovnicu dynamického programovania (ako nutnú a postačujúcu resp. len nutnú podmienku).

V spojitom prípade sme Pontrjaginov princíp maxima už formulovali a (na rozdiel od diskrétneho prípadu, kde princíp maxima platí iba za určitých predpokladov pre úlohy s pevným časom) tu platí za veľmi všeobecných podmienok. Ako je to s rovnicou dynamického programovania?

V diskrétnom prípade RDP predstavovala účinný nástroj na riešenie úloh a platila pri veľmi všeobecných predpokladoch. Uvidíme, že v spojitom prípade je RDP nutnou a postačujúcou podmienkou optimality pri veľmi špeciálnych a obmedzujúcich podmienkach.

Našim cieľom bude, bez nejakých veľkých nárokov na matematickú presnosť, odvodiť RDP pre spojité úlohy a ukázať súvis medzi RDP a PPM. Toto nám umožní zaujímavým spôsobom interpretovať adjungovanú premennú ako tieňovú cenu, čo má význam pri riešení niektorých ekonomických úloh.

11.1 Odvodenie RDP

RDP odvodíme pre ŠÚOR s pevným časom. Kvôli ľahšej interpretácii budeme uvažovať úlohu na maximum, to znamená, budeme sa zaoberať úlohou

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T f^0(s, x(s), u(s))ds, \quad T \text{ - pevné} \\
&\dot{x}(s) = f(s, x(s), u(s)), \quad s \in [0, T], \\
&x(0) = x_0, \\
&x(T) \in C, \\
&u(s) \in U, \quad s \in [0, T].
\end{aligned}$$

Toto je úloha optimálneho prechodu z x_0 do C na intervale $[0, T]$. V závislosti od počiatočného času 0 a počiatočného stavu x_0 ju označíme $D(0, x_0)$. Podobne ako v diskrétnom prípade, vnoríme túto úlohu do systému úloh

$$D = \{D(t, x),\ t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R}^n\},$$

kde $D(t, x)$ je úloha optimálneho prechodu z bodu x do C na intervale $[t, T]$. To znamená, že $D(t, x)$ je ÚOR daná nasledovne:

$$\begin{aligned}
&\max J_{t,x}(u(.)) := \int_t^T f^0(s, x(s), u(s))ds, \quad T \text{ - pevné} \\
&\dot{x}(s) = f(s, x(s), u(s)), \quad s \in [t, T], \\
&x(t) = x, \\
&x(T) \in C, \\
&u(s) \in U, \quad s \in [t, T].
\end{aligned}$$

Budeme predpokladať, že ak je úloha $D(t, x)$ prípustná, že potom má aj optimálne riešenie. Ďalej označíme

$$V(t, x) = \max_{u(.)} J_{t,x}(u(.)),$$

kde maximum hľadáme cez všetky prípustné riadenia $u(.)$. Je zrejmé, že táto funkcia nemusí byť definovaná pre všetky $t \in [0, T]$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Táto funkcia sa nazýva *hodnotová funkcia pre systém úloh D*. Podobne ako v diskrétnom prípade, aj tu platí princíp optimality.

Veta 11.1 (Princíp optimality). *Ak $\hat{u}(.)$, $\hat{x}(.)$ sú optimálne pre $D(t_1, x)$, $t_1 < t_2 < T$, potom $\hat{u}(.)\big|_{[t_2,T]}$, $\hat{x}(.)\big|_{[t_2,T]}$ sú optimálne pre $D(t_2, \hat{x}(t_2))$.*

Dôkaz: Je úplne analogický ako v diskrétnom prípade [12, Veta 2.2]. □

Na základe tejto vety môžeme pre optimálne riadenie $\hat{u}(.)$ a jeho odozvu $\hat{x}(.)$ písať $\hat{u}(t) = v(t, \hat{x}(t))$, t. j. platí analógia Dôsledku 2.2 z knihy [12], ale len v jednom smere. Opačná implikácia vo všeobecnosti neplatí. Ak by sme totiž funkcie $v(t, x)$, ktoré môžu byť nespojité v premennej x, dosadili do stavovej rovnice, dostali by sme diferenciálne rovnice $\dot{x}(t) = f(x(t), v(t, x(t)))$ nespojité v stavovej premennej, pre ktoré neplatí klasická teória diferenciálnych rovníc.

Teraz odvodíme RDP. Nech $V(t, x) \in C^1$ je hodnotová funkcia. Potom

$$V(t,x) = \max_{\substack{u(s)\\ t\le s\le T}} \int_t^T f^0(s, x(s), u(s))ds$$

$$= \max_{\substack{u(s)\\ t\le s\le t+h\\ t+h\le s\le T}} \left[\int_t^{t+h} f^0(s, x(s), u(s))ds + \int_{t+h}^T f^0(s, x(s), u(s))ds\right] =$$

$$= \max_{\substack{u(s)\\ t\le s\le t+h}} \left[\int_t^{t+h} f^0(s, x(s), u(s))ds + \max_{\substack{u(s)\\ t+h\le s\le T}} \int_{t+h}^T f^0(s, x(s), u(s))ds\right] =$$

$$= \max_{\substack{u(s)\\ t\le s\le t+h}} \left[\int_t^{t+h} f^0(s, x(s), u(s))ds + V(t+h, x(t+h))\right] =$$

$$= \max_{\substack{u(s)\\ t\le s\le t+h}} \left[f^0(\xi, x(\xi), u(\xi))h + V(t,x) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t, x(t), u(t))\right) h + o(h)\right],$$

kde $\xi \in [t, t+h]$. Použili sme vetu o strednej hodnote integrálu na prvý sčítanec a Taylorovu vetu na druhý. Porovnaním začiatku a konca tohoto odvodzovania dostaneme

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)h = \max_{\substack{u(s)\\ t\le s\le t+h}} \left[f^0(\xi, x(\xi), u(\xi))h + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t, x(t), u(t))h + o(h)\right].$$

Vydelíme hodnotou h a prejdeme k limite pre $h \to 0$. Dostaneme

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_{u(t)} \left[f^0(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t, x(t), u(t))\right],$$

čo je rovnica dynamického programovania, pre ktorú máme okrajovú podmienku: $V(T, x) = 0$, pre $x \in C$.

Označme

$$G = \{(t,x) \mid \exists \text{ príp. riadenie pre } D(t,x)\ \}.$$

Veta 11.2 (Rovnica dynamického programovania). *Nech*

- *Vnútro G^0 množiny G je husté v G;*

- *$V : G \to \mathbb{R},\ V \in \mathbb{C}^1$;*
- *$v : G \to U \subset \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{C}$, v lipschitzovská v x*
- *Každé riešenie $x(s)$ diferenciálnej rovnice $\dot{x}(s) = f(s, x(s), v(s, x(s)))$ spĺňajúce počiatočnú podmienku $x(t) = x$ existuje na celom intervale $[t, T]$ a spĺňa : $x(T) \in C,\ (s, x(s)) \in G$ pre všetky $s \in [t, T]$.*

Potom v je optimálna spätná väzba a V je hodnotová funkcia pre systém úloh D vtedy a len vtedy, keď

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = f^0(t,x,v(t,x)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x,v(t,x)) =$$

$$= \max_{u \in U} \left[f^0(t,x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x,u) \right],$$

$$V(T,x) = 0, \qquad x \in C.$$

Poznámky:

1. V autonómnej úlohe s voľným časom je $V(t,x) \equiv V(x)$, a teda $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.
2. Predpoklady spojitosti a spojitej diferencovateľnosti kladené na funkcie v a V nás neuspokojujú, lebo sú príliš silné. Väčšina úloh ich nespĺňa.

11.2 Vzťah RDP a PPM

V tejto časti ukážeme, ako súvisí RDP s PPM (s (AR) a (PM)) pre autonómnu úlohu s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Nech $\hat{u}(.)$, $\hat{x}(.)$ sú optimálne, nech $V(t,x) \in C^2$ je hodnotová funkcia a $v(t,x)$ je optimálna spätná väzba a nech sú splnené predpoklady Vety 11.2. Zrejme $\hat{u}(t) = v(t, \hat{x}(t))$ a platí

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,\hat{x}) + \max_{u \in U} \left[f^0(\hat{x},u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,\hat{x}) f(\hat{x},u) \right] =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}(t,\hat{x}) + f^0(\hat{x},\hat{u}) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,\hat{x}) f(\hat{x},\hat{u}) = 0. \tag{11.1}$$

Označme

$$\psi^0 := 1,\ \psi^T := \frac{\partial V}{\partial x}(t,\hat{x}).$$

Potom vzťah (11.1) dáva

$$f^0(\hat{x},\hat{u}) + \psi^T f(\hat{x},\hat{u}) = \max_{u \in U} \left[f^0(\hat{x},u) + \psi^T f(\hat{x},u) \right],$$

čo je (PM) s $\psi^0 = 1$. Treba ešte odvodiť (AR). Zo vzorca pre $\psi(t)^T$ dostávame

$$\dot{\psi}^T = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x}(t,\hat{x}) = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}(t,\hat{x}) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,\hat{x})\dot{x} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}(t,\hat{x}) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,\hat{x}) f(\hat{x},\hat{u}).$$

Toto zatiaľ vôbec nepripomína (AR). Pomôžeme si pomocou RDP. Uvažujme RDP najprv pre $x = \hat{x}$, $u = v(t,\hat{x}) = \hat{u}$. Zrejme

$$\frac{\partial V(t,\hat{x})}{\partial t} + f^0(\hat{x},\hat{u}) + \frac{\partial V(t,\hat{x})}{\partial x} f(\hat{x},\hat{u}) = 0.$$

Teraz uvažujme RDP pre x ľubovoľné a pre $u = \hat{u} = v(t,\hat{x})$. Pre toto ľubovoľne zvolené x hodnota $\hat{u}$ nemusí byť tou, kde sa maximalizuje výraz v RDP, a preto

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + f^0(x,\hat{u}) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(x,\hat{u}) \leq 0.$$

Funkcia na ľavej strane posledného výrazu teda nadobúda svoje maximum v bode $x = \hat{x}$. Aplikujme nutné podmienky optimality:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + f^0(x,\hat{u}) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(x,\hat{u})\right)_{x=\hat{x}} = 0.$$

To znamená

$$\frac{\partial^2 V(t,\hat{x})}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f^0(\hat{x},\hat{u})}{\partial x} + \frac{\partial^2 V(t,\hat{x})}{\partial x^2} f(\hat{x},\hat{u}) + \frac{\partial V(t,\hat{x})}{\partial x}\ \frac{\partial f(\hat{x},\hat{u})}{\partial x} = 0.$$

Dosadíme do výrazu pre $\dot{\psi}$ a dostaneme

$$\dot{\psi}^T = -\frac{\partial f^0(\hat{x},\hat{u})}{\partial x} - \frac{\partial V(t,\hat{x})}{\partial x}\ \frac{\partial f(\hat{x},\hat{u})}{\partial x},$$

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi, \tag{AR}$$

a to je (AR) s $\psi^0 = 1$.

Toto celé sme robili formálne a nestarali sme sa o oprávnenosť jednotlivých operácií. Dalo by sa to urobiť aj korektne, pri formulovaní určitých predpokladov, celý výklad by však bol dlhý a neprehľadný.

11.3 Ekonomická interpretácia PPM

V predchádzajúcich častiach sme hovorili o tom, že PPM je dobrým nástrojom na kvalitatívnu analýzu ekonomických úloh. Mnohé ekonomické úlohy sa dajú formulovať

ako úlohy optimálneho riadenia. Aplikáciou PPM na takéto úlohy sa dajú odvodiť mnohé kvalitatívne vlastnosti takýchto úloh.

Význam ekonomickej interpretácie adjungovanej premennej. Pri aplikácii PPM na ekonomické úlohy je dôležité vedieť správne ekonomicky interpretovať odvodené matematické vzťahy. K tomu je treba mať určitú ekonomickú predstavu o veličinách vstupujúcich do analýzy. O vstupných veličinách, pomocou ktorých formulujeme daný problém, je zvyčajne dobrá ekonomická predstava (napr. x množstvo kapitálu, u vstup, rozhodnutia ovplyvňujúce množstvo kapitálu, f^0 úžitok, zisk, náklady). Výsledky analýzy však bývajú formulované aj prostredníctvom pomocných veličín, ktorými sú v prípade PPM adjungované premenné. Preto pre pochopenie odvodených vzťahov pri kvalitatívnej analýze je dôležité vedieť vhodne ekonomicky interpretovať aj tieto premenné .

Adjungovaná premenná ako tieňová cena. Odvodili sme, že adjungovaná premenná, ktorá vstupuje do formulácie PPM, je vlastne gradientom hodnotovej funkcie (podľa stavovej premennej), t. j.

$$\psi(t)^T = \frac{\partial V(t, \hat{x})}{\partial x}.$$

Použitím Taylorovej vety dostávame

$$V(t, x + \Delta x) - V(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)\Delta x + o(\Delta x).$$

V prípade, že Δx je jednotkový prírastok, tak $\psi(t)$ vyjadruje lineárnu časť prírastku hodnotovej funkcie, t. j. marginálnu hodnotu jednej jednotky kapitálového majetku v čase t. Každá zložka $\psi^i(t)$ udáva, nakoľko je cenné mať „malú“ jednotku premennej stavu $x^i(t)$ za predpokladu, že sa pre zvyšok plánovaného obdobia bude plánovať optimálne. Pritom $\psi(t)$ je tieňová cena, pretože nepredstavuje na kapitálovom trhu panujúcu tržnú cenu, ale iba firemnú, vnútornú, účtovnícku cenu, ktorá hodnotí dodatočnú jednotku kapitálu.

Rozmer ceny adjungovanej premennej. Ukážeme teraz, že adjungovaná premenná má rozmer ceny. Ak účelová funkcia má rozmer ekonomickej hodnoty (ako užitočnosť, zisk, tržba, náklady) a zložky stavovej premennej majú rozmer množstva t. j.

$$[J] = [\text{cena}].[\text{množstvo}] \quad \text{a} \quad [x^i] = [\text{množstvo}],$$

potom adjungovaná premenná má rozmer ceny, lebo

$$[\psi^i](= \frac{\partial V}{\partial x^i}) = \frac{[\text{cena}][\text{množstvo}]}{[\text{množstvo}]} = [\text{cena}].$$

Ekonomická interpretácia podmienky maxima. Všimnime si teraz, že podmienku

maxima z PPM možno tiež ekonomicky interpretovať. Podmienka maxima hovorí, že v každom časovom okamžiku sa má maximalizovať výraz

$$H = f^0 + \psi^T f = f^0 + \psi^T \dot{x},$$

kde H je vlastne súčtom bezprostredného zisku a hodnoty zmeny kapitálových zásob.

11.4 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 11.1. Uvažujme nasledujúcu ÚOR:

$$\begin{aligned} &\max J = \int_0^T (x - \frac{u^2}{2})dt, \quad T \text{ pevné} \\ &\dot{x} = u, \quad t \in [0, T], \\ &x(0) = x_0, \quad x(T) \text{ voľné.} \end{aligned}$$

V zmysle definície z podkapitoly 11.1, je to úloha $D(0, x_0)$.

(a) Definujte pre $t_0 \in [0, T]$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ príslušnú úlohu $D(t_0, x_0)$, a hodnotovú funkciu $V(t_0, x_0)$.

(b) Vyčíslite $V(t_0, x_0)$. Využite pri tom, že v tomto konkrétnom prípade je PPM aj postačujúcou podmienku optimality.

(c) Preverte, či v tomto prípade platí vzťah medzi hodnotovou funkciou a adjungovanou funkciou odvodený v podkapitole 11.3.

Úloha 11.2. Rovnica dynamického programovania. Daná je nasledovná úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^\infty e^{-rt}(ax^2 + bu^2)\,\mathrm{d}t, \\ &\dot{x} = u, \\ &x(0) = x_0 > 0 \text{ dané,} \end{aligned}$$

kde $a > 0$ a $b > 0$ sú dané. Napíšte pre túto úlohu spojitú verziu rovnice dynamického programovania v tvare parciálnej diferenciálnej rovnice, kde neznámou je hodnotová funkcia $V(x, t)$. Túto rovnicu vyriešte, pričom riešenia hľadajte v tvare $V(x, t) = e^{-rt}cx^2$. Nájdite tvar optimálnej spätnej väzby.

Úloha 11.3. Lineárno-kvadratická úloha. Ukážte (stačí formálnym odvodením), že pre lineárno-kvadratickú úlohu

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad T \text{ pevné}, \\
&\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \\
&U = R^m, \quad C = R^n,
\end{aligned}$$

kde $Q = Q^T \geq 0$ a $R = R^T > 0$, je hodnotová funkcia V daná v tvare $V(t, x) = x^T W(t) x$, pričom W $(W = W^T \geq 0)$ je riešením tzv. Riccatiho diferenciálnej rovnice

$$\frac{dW}{dt} + WA + A^T W - WBR^{-1}B^T W + Q = 0, \quad W(T) = 0.$$

Kapitola 12

Úlohy s ohraničeniami na stavové premenné

V tejto časti sa budeme zaoberať úlohami optimálneho riadenia, v ktorých sa budú vyskytovať niektoré z ohraničení typu a) $h(x(T)) \geq 0$ na koncový stav, b) ohraničenia zmiešaného typu $l(x(t), u(t)) \geq 0$, v ktorých je riadiaca aj stavová premenná súčasne a c) čisté stavové ohraničenia $q(x(t)) \geq 0$, v ktorých vystupuje iba stavová premenná.

12.1 Ohraničenia typu nerovnosti na cieľový stav

S ohraničeniami na koncový stav sme sa už stretli v predchádzajúcich častiach pri popise množiny koncových stavov C, ovšem boli formulované len pomocou rovností. Teraz pripustíme, aby množina C koncových stavov bola definovaná nielen pomocou rovností, ale aj pomocou nerovností, to znamená, že

$$C = \{x \mid g(x) = 0,\ h(x) \geq 0\},$$

kde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $g, h \in \mathbb{C}^1$. Z podmienky $x(T) \in C$ teda dostávame, že musí platiť

$$g(x(T)) = 0,\ h(x(T)) \geq 0.$$

Pre takto zmenenú množinu C sa podmienky PPM zmenia iba v podmienke transverzality, a to nasledovne[1]:

$$\exists\ \chi \in \mathbb{R}^l,\ \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^r : \psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi + \left(\frac{\partial h(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \lambda, \qquad \text{(PT)}$$

pričom pribudne podmienka komplementarity

$$\lambda^T h(x(T)) = 0, \quad \lambda \geq 0 \qquad \text{(PK)}$$

a namiesto $(\psi^0, \chi) \neq 0$ aplikujeme podmienku $(\psi^0, \chi, \lambda) \neq 0$.

[1] Pritom predpokladáme lineárnu nezávislosť vektorov $\frac{\partial g^i}{\partial x}$ spolu s $\frac{\partial h^i}{\partial x}$ pre aktívne ohraničenia

Príklad 12.1. Nech stavová premenná je jednorozmerná a $C = \{x \mid x \geq a\}$, kde a je dané číslo. To znamená, že $h(x) = x - a$. Dosadením do (PT) a (PK) dostávame

$$\psi(T) = \frac{\partial(x-a)}{\partial x}\lambda = \lambda,\ \lambda \geq 0,\ \lambda(x(T) - a) = 0.$$

Pretože $\psi(T) = \lambda$, pomocnú premennú λ môžeme vylúčiť a dostaneme podmienky:

$$\psi(T) \geq 0,\ \psi(T)(x(T) - a) = 0.$$

Z nich môžeme vyvodiť, že ak $x(T) > a$, potom $\psi(T) = 0$. A naopak, ak $\psi(T) > 0$, potom $x(T) = a$.

Poznámka: Všimnime si, že podmienka transverzality je analógiou Kuhn–Tuckerovej vety v nelineárnom programovaní. Vektor χ odpovedá Lagrangeovým multiplikátorom pre ohraničenia typu rovnosti a λ je multiplikátor odpovedajúci ohraničeniam typu nerovnosti, je nezáporný a spĺňa aj podmienku komplementarity.

12.2 Ohraničenia na stavové a riadiace premenné

V tejto časti budeme predpokladať, že v úlohe sa vyskytujú ohraničenia súčasne na riadiace aj stavové ohraničenia, ktoré majú platiť na celom časovom horizonte, t.j predpokladáme, že

$$l(x(t), u(t)) \geq 0, t \in [0, T],$$

kde $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, $l \in C^1$. Takéto ohraničenia nazývame ohraničeniami zmiešaného typu. Poznamenajme, že v teórii optimálneho riadenia je nezávisle premennou u a jeho odozva x je závislou. Preto pri ohraničeniach zmiešaného typu je možné zabezpečiť splnenie ohraničenia priamo voľbou príslušného riadenia. Z tohoto dôvodu sa s ohraničeniami zmiešaného typu narába v princípe rovnako ako s čistými ohraničeniami na riadenie. Jediný rozdiel, je, že sa v podmienke maxima maximalizuje cez u spĺňajúce okrem podmienky $u \in U$ aj podmienku $l(x, u) \geq 0$, pričom sa takáto podmienka maxima zvyčajne preformuluje pomocou Kuhn Tuckerovej vety. Preto vo formulácii PPM bude vystupovať aj funkcia $\mu(t) \geq 0$, ktorá je vlastne Lagrangeovým multiplikátorom pre ohraničenie $l(x(t), u(t)) \geq 0$ v každom čase $t \in [0, T]$ a príslušná podmienka komplementarity. Okrem Hamiltonovej funkcie

$$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 f^0(x, u) + \psi^T f(x, u)$$

budeme potrebovať aj Lagrangeovu funkciu

$$L(x, u, \psi^0, \psi, \mu) = H(x, u, \psi^0, \psi) + \mu^T l(x, u).$$

Podmienky PPM sa oproti úlohám bez ohraničení na stavové premenné zmenia [2]

[2] Pritom predpokladáme lineárnu nezávislosť vektorov $\frac{\partial l^i(x,u)}{\partial u}$ pre i odpovedajúce aktívnym ohraničeniam.

a) v podmienke maxima, ktorá teraz bude vyjadrená pomocou funkcie L a bude mať v optimálnom riadeni $\hat{u}(t)$ a odozve $\hat{x}(t)$ tvar

$$L(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t), \mu(t)) = \max_u L(\hat{x}(t), u, \psi^0, \psi(t), \mu(t)),$$

pričom zároveň platí podmienka komplementarity $\mu(t)^T l(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$ a nezápornosti $\mu(t) \geq 0$;

b) v AR, ktorá bude mať v optimálnom riadeni $\hat{u}(t)$ a odozve $\hat{x}(t)$ tvar

$$\dot{\psi}(t) = -\left(\frac{\partial L(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t), \mu(t))}{\partial x}\right)^T$$

$$= -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T \psi\,(t) - \left(\frac{\partial l(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T \mu\,(t$$

12.3 Ohraničenia len na stavové premenné

Niekedy sa v úlohách optimálneho riadenia vyskytujú aj ohraničenia typu nerovnosti, ktoré zahŕňajú iba stavové ohraničenia, t.j.

$$q(x(t)) \geq 0, \;\; t \in [0, T],$$

kde $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $q \in C^1$. Takéto ohraničenia nazývame čisté stavové ohraničenia. Pomerne často sa vyskytujú v ekonomických úlohách pri dynamickom modelovaní ekonomického rastu a to najmä v tvare nezápornosti stavovej premennej $x(t) \geq 0$. Nutné podmienky optimality sú pre čistými stavovými ohraničeniami zložitejšie, pretože stavová premenná (a tým aj splnenie príslušného ohraničenia) je ovplyvniteľné len nepriamo, cez riadenie. Podobne ako v predchádzajúcom prípade sa nutné podmienky formulujú pomocou Lagrangeovej funkcie

$$L(x, u, \psi^0, \psi, \mu) = H(x, u, \psi^0, \psi) + \nu^T q(x).$$

kde zároveň platí podmienka komplementarity $\nu(t)^T q(\hat{x}(t)) = 0$ a nezápornosť $\nu(t) \geq 0$. S takto definovanou Lagrangeovou podmienkou sa potom formulujú AR a PM analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Podstatný rozdiel oproti predchádzajúcemu prípadu však je, že príslušná adjungovaná funkcia môže byť nespojitá v bodoch nespojitosti optimálneho riadenia. Táto skutočnosť môže viesť k tomu, že nemáme dostatok podmienok na určenie adjungovanej premennej (resp. na určenie všetkých neznámych vstupujúcich do PPM). Preto chýbajúce informácie o ľavostranných a pravostranných limitách adjungovanej funkcie sa v PPM pre takéto úlohy formulujú v ďalších podmienkach.

12.4 Úloha o optimálnej spotrebe s podmienkou typu nerovnosti na koncový stav

V tejto časti sa opäť budeme zaoberať úlohou o optimálnej spotrebe. Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu však teraz budeme predpokladať, že koncová hodnota kapitálu $k(T)$ nie je zadaná, ale má byť len nezáporná. Tiež žiadame, aby spotreba $c(t)$ nadobúdala len nezáporné hodnoty. To znamená budeme riešiť nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))\ dt,\\
&\dot{k}(t) = ik(t) - c(t),\ t \in [0,T],\\
&k(0) = k_0 > 0,\\
&c(t) \geq 0,\\
&k(T) \geq 0.
\end{aligned}$$

Na tejto úlohe si ukážeme spôsob použitia teórie prezentovanej v časti 12.1. Zároveň budeme snažiť odpovedať na nasledovnú otázku kvalitatívnej analýzy: môže nastať situácia, že pri optimálnom správaní ostane kapitál na konci uvažovaného obdobia nevyčerpaný? Respektíve, pri akých podmienkach na úžitkovú funkciu bude optimálne nevyčerpať úplne kapital na konci a optimálne bude $k(T) > 0$?

Pre začiatok o úžitkovej funkcii U predpokladajme, že

$$\mathrm{U} : \mathbb{R}_+ \to R,\ \mathrm{U} \in C^2,\ \lim_{c\to 0^+} \mathrm{U}'(c) = \infty,\ \mathrm{U}'' < 0.$$

Všimnime si, že oproti predchádzajúcemu prípadu nežiadame, aby U bola rastúca. Namiesto toho žiadame, aby bola splnená limitná podmienka, ktorá nám zabezpečí, že pre malé hodnoty spotreby bude úžitková funkcia rásť a teda pôsobí ako bariéra pre vylúčenie prípadu nulovej spotreby.

Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{\psi} = -i\psi$$

a jej všeobecným riešením je $\psi(t) = Ae^{-it}$, kde A je nejaká, zatiaľ neznáma, konštanta. Dôležitým poznatkom zatiaľ je, že $\psi(t)$ nemení znamienko, je stále buď kladné, buď záporné, alebo nulové. Podmienka transverzality dáva $\psi(T) \geq 0$ a $\psi(T)k(T) = 0$, podmienka maxima

$$\psi^0 e^{-rt}\mathrm{U}(c) + \psi(ik - c) \to \max_{c\geq 0}.$$

Vylúčme najprv možnosť $\psi^0 = 0$. Ak by $\psi^0 = 0$, potom z podmienky maxima máme

$$\psi(ik - c) \to \max_{c\geq 0}.$$

Vidíme, že máme hľadať maximum (vzhľadom na c) lineárnej funkcie $-\psi c$ na množine $c \geq 0$. Riešenie tejto úlohy závisí od znamienka ψ, pritom ψ môže byť len kladné, alebo

záporné (prípad $\psi = 0$ je v spore s podmienkou, že ψ^0 a ψ nesmú byť súčasne rovné nule). Ak $\psi < 0$, funkcia $-\psi c$ je rastúca a teda na množine $c \geq 0$ nemá maximum. Ak $\psi > 0$, tak $-\psi c$ je klesajúca a nadobúda maximum pre $c = 0$. Pretože v tomto prípade je $\psi > 0$ v každom čase, je $c(t) = 0$ pre každé $t \in [0, T]$. Odozvou na takéto riadenie je $k(t) = k_0 e^{-it}$, ktoré sme dostali dosadením riadenia $c(t) = 0$ do stavovej rovnice a počiatočnej podmienky. Pretože v zadaní máme, že $k_0 > 0$, tak $k(T) > 0$. Pretože sme mali aj $\psi(t) > 0$, dostali sme sa do sporu s podmienkou komplementarity. Môžeme teda položiť $\psi^0 = 1$ (úloha je na maximum).

Podmienka maxima nám teraz dáva

$$H = e^{-t\delta}\mathrm{U}(c) + \psi(ik - c) \to \max_{c \geq 0}$$

čo je maximalizácia rýdzokonkávnej funkcie H. Z predpokladov kladených na úžitkovú funkciu (bariérovosť a rýdzokonkávnosť), vyplýva, že krajný bod $c = 0$ nemôže byť riešením podmienky maxima. Riešenie podmienky maxima teda vypočítame z podmienky $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$, t.j. z podmienky $e^{-rt}\mathrm{U}'(c) - \psi = 0$, resp.

$$\mathrm{U}'(c) = e^{rt}\psi. \tag{12.1}$$

Ideme teraz hľadať podmienky, pri ktorých by mohla nastať situácia, že $\hat{k}(T) > 0$. Všimnime si, v tomto prípade podmienka komplementarity dáva $\psi(T) = 0$. To je však možné len vtedy, ak $A = 0$ a teda aj $\psi(t) = 0$ pre všetky t. Dosadiac $\psi(t) = 0$ do (12.1) dostaneme, že prípad $k(T) > 0$ môže nastať, ak

$$\text{existuje také } \ c^* > 0, \text{že } \ U'(c^*) = 0. \tag{12.2}$$

V takomto prípade položíme $c(t) \equiv c^*$ a pozrieme sa, či príslušná odozva spĺňa podmienku $k(T) > 0$. Riešením

$$\dot{k} = ik - c^*, \ k(0) = k_0$$

dostávame

$$k(t) = e^{it}k_0 + \int_0^t e^{i(t-s)}(-c^*)ds = e^{it}[k_0 - \frac{c^*}{i}(1 - e^{-it})].$$

V koncovom čase má teda platiť podmienka

$$k(T) = e^{iT}[k_0 - \frac{c^*}{i}(1 - e^{-iT})] \geq 0,$$

čo je ekvivalentné s podmienkou

$$ik_0 \geq c^*(1 - e^{-iT}). \tag{12.3}$$

Dostali sme teda, že ak je splnené (12.2) a (12.3), tak $c(t) \equiv c^*$ môže byť optimálnym tokom spotreby, pričom hodnota kapitálu na konci uvažovaného obdobia bude nespotrebovaná. V prípade, že nie je splnená podmienka (12.2) tak nastáva prípad $k(T) = 0$ (t.j. $A > 0$ a riadenie sa určí z (12.1) pre konkrétne U. V tomto prípade je kapitál spotrebovaný na konci obdobia.

12.5 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 12.1. Úloha so zmiešaným ohraničením na stavovú a riadiacu premennú. Daná je nasledovná úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = x(t) + u(t),\\
&x(0) = 0,\\
&x(1) \text{ volné},\\
&u(t) \in [-1, 1],\\
&x(t) + u(t) \leq 2.
\end{aligned}$$

(i) Pokúste sa odhadnúť riešenie.

(ii) Sformulujte PPM pre túto úlohu. Ohraničenia na riadenie (vrátane čistých ohraničení na u) začleňte do Lagrangeovej funkcie.

(iii) Overte, či je splnená podmienka regularity.

(iv) Ukážte, že podmienky PPM sú splnené s $\psi^0 = 1$.

(v) Ukážte, že riešenie

$$\begin{aligned}
u(t) &= \begin{cases} 1, & \text{ak } t \in [0, \ln 2] \\ 1 + 2\ln 2 - 2t, & \text{ak } t \in (\ln 2, 1] \end{cases}\\
x(t) &= \begin{cases} e^t - 1, & \text{ak } t \in [0, \ln 2] \\ 1 - 2\ln 2 + 2t, & \text{ak } t \in (\ln 2, 1] \end{cases}
\end{aligned}$$

spĺňa podmienky PPM.

(vi) Ukážte, že pri riešení uvedenom v časti (v) sú multiplikátory prislúchajúce ohraničeniam na riadenie nespojité.

Úloha 12.2. Úloha s ohraničením na koncový stav v tvare nerovnosti. Nájdite riadenie a jeho odozvu, ktoré spĺňajú podmienky PPM pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^2 x(t)\,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = u(t),\\
&x(0) = 1,\\
&x(2) \geq 0,\\
&u(t) \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Úloha 12.3. Modifikácia úlohy o optimálnej spotrebe. Daná je nasledujúca formulácia úlohy o optimálnej spotrebe s lineárnou funkciou užitočnosti a s ohraničením na spotrebu zhora:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt} u(t)\,\mathrm{d}t, \qquad T \text{ dané},\\
&\dot{x}(t) = ax(t) - u(t),\\
&x(0) = x_0 > 0 \text{ dané},\\
&x(T) \geq 0,\\
&0 \leq u(t) \leq ax(t).
\end{aligned}$$

Úlohou je maximalizovať celkovú diskontovanú spotrebu nejakého statku, ktorého množstvo rastie rýchlosťou $a\%$ za časovú jednotku. Investície do ďalšieho navýšenia statku $(ax - u)$ sú ireverzibilné, t.j. v každom čase možno spotrebovať toľko, koľko sa práve vyrobilo. Predpokladajme, že a, r sú dané kladné konštanty, $a > r$.

a) Dokážte, že vďaka ohraničeniu na riadiacu premennú môžeme z úlohy vynechať ohraničenie na koncový stav, pričom formulácia úlohy zostane ekvivalentná pôvodnej.
b) Sformulujte podmienky PPM pre túto úlohu s využitím Lagrangiánu (po vynechaní podmienky na koncový stav). Podmienky sformulujte presne v tvare vety, uveďte aj podmienky regularity, spojitosť multiplikátorov a pod.[3]
c) Dokážte, že podmienky regularity sú splnené. Návod: Využite, že pre $x_0 > 0$ nemožno dosiahnuť $x(t) = 0$ pre žiadne $t \in [0, 2]$ (toto tvrdenie dokážte).
d) Vylúčte prípad $\psi^0 = 0$.
e) Dokážte, že nutné podmienky optimality majú jediné riešenie v tvare

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t \in [0, \tau] \\ ax(t), & \text{ak } t \in (\tau, T] \end{cases}$$

alebo

$$u(t) = ax(t), \text{ pre každé } t \in [0, T].$$

Načrtnite priebeh adjungovanej premennej, odozvy a multiplikátorov pre toto riadenie. Návod: Využite, že $u(t) = ax(t)$ minimálne na nejakom ľavom okolí bodu T.
f) Výsledok z časti e) (t.j. priebeh riadenia, odozvy a adjungovanej premennej) ekonomicky interpretujte a vysvetlite.
g) Zistite, ako sa zmení τ, ak sa zvýši a alebo x_0. Interpretujte/vysvetlite.

[3] Za predpokladu regularity je podmienka nenulovosti multiplikátorov v tvare $(\psi^0, \psi(t)) \neq (0, 0)$ $\forall t \in [0, T]$.

Kapitola 13

Optimalita riadení vyhovujúcich PPM. Existencia optimálnych riadení

PPM je len nutnou podmienkou optimality. Riešením podmienok PPM teda získame kandidátov na optimálne riešenie. Ako zistiť, či sú naozaj optimálnym riešením? Doteraz sme už mali sformulovanú jednu postačujúcu podmienku optimality. Bola ňou rovnica dynamického programovania sformulovaná vo Vete 11.2. Použitie tejto vety na overenie optimálnosti má však viacero nedostatkov, ktoré ju robia na tento účel skoro nepoužiteľnou. V prvom rade táto veta platí iba pri určitých obmedzujúcich predpokladov, ktoré sú málokedy splnené. Navyše jej použitie by žiadalo určiť kandidátov na optimálne riešenie pre jednotlivé x, t, vyčíslenie hodnotovej funkcie a overenie, či spĺňa RDP. V tejto kapitole sa oboznámime s inými výsledkami teórie optimálneho riadenia, ktoré dajú praktickejšie nástroje na overenie optimality riešení podmienok PPM.

13.1 Existencia optimálnych riadení

Riešením PPM častokrát získame jediného kandidáta na optimálne riadenie. Ak by sme vedeli z nejakých iných zdrojov, že pre danú úlohu existuje optimálne riadenie, tak potom tento kandidát musí byť optimálnym riadením. Jedným z možných postupov je teda overiť existenciu. Pri riešení úloh motivovaných aplikáciami je spravidla existencia optimálneho riešenia intuitívne zrejmá. Existujú však hlboké výsledky z teórie optimálneho riadenia, ktoré umožňujú pre väčšinu úloh pomerne pohodlne overiť existenciu. Jednu takúto vetu sformulujeme pre štandardnú úlohu sformulovanú v časti 5.1.

Veta 13.1 (Existencia optimálnych riadení)**.** *Nech U a C sú uzavreté a nech*

(*a*) $$\lim_{\substack{|u|\to\infty \\ u\in U}} \frac{f^0(x,u)}{|u|} = -\infty$$

(*b*) *množina $Q(x)$ je konvexná pre každé x, kde*
$$Q(x) = \{(v^0, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v^0 \le f^0(x,u), v = f(x,u), u \in U\}.$$

Ak existuje aspoň jedno prípustné riadenie, potom existuje [1] *aj optimálne.*

Všimnime si, že podmienka (a) je prázdna, ak U je ohraničená. Podmienka (b) je splnená, ak U je konvexná, f je lineárna v u a f^0 je konkávna v u pre každé x.

13.2 Postačujúcosť PPM

V tejto časti sformulujeme a dokážeme vetu, ktorá hovorí, že za určitých dodatočných podmienok je PPM nielen nutnou, ale aj postačujúcou podmienkou optimality. Táto veta sa bude týkať štandardnej autonómnej úlohy s pevným časom. Veta sa často označuje ako Arrowova.

Veta 13.2 (PPM ako postačujúca podmienka optimality)**.** *Nech $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$ sú prípustné pre ŠÚOR s pevným časom a nech spolu s $\psi^0 = 1$, $\psi(t)$ spĺňajú podmienky PPM. Nech pre každé ψ je funkcia*

$$H^0(x,\psi) := \max_{u\in U} H(x,u,\psi)$$

konkávna v premennej x a nech funkcia $g(x)$ (definujúca množinu koncových stavov) je lineárna, t.j. $g(x) = Gx + \gamma$. Potom $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie. Navyše, ak H^0 je rýdzokonkávna, tak $\hat{u}$ je jediné optimálne riadenie.

Dôkaz. Nech $\hat{u}$, $\hat{x}$, ψ spĺňajú predpoklady vety. To znamená, že

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},\hat{u}), \quad \hat{x}(0) = x_0, \quad G\hat{x}(T) + \gamma = 0,\\
&\hat{u}(t) \in U, \quad t \in [0,T],\\
&\dot{\psi} = -H_x(\hat{x},\hat{u},\psi)^T, \quad \exists \chi : \psi(T) = G^T\chi,\\
&H(\hat{x},\hat{u},\psi) = \max_{u\in U} H(\hat{x},u,\psi), \qquad \text{kde} \;\; H(x,u,\psi) = f^0(x,u) + \psi^T f(x,u).
\end{aligned}$$

Nech $u(t)$, $x(t)$ sú ľubovoľné iné prípustné riadenie a jeho odozva. To znamená, že

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = x_0, \quad Gx(T) + \gamma = 0,\\
&u(t) \in U, \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Chceme dokázať, že $J(u) - J(\hat{u}) \le 0$. Najprv odhadneme nasledovný rozdiel

$$\begin{aligned}
H(x,u,\psi) - H(\hat{x},\hat{u},\psi) &\le \max_{u\in U} H(x,u,\psi) - H(\hat{x},\hat{u},\psi) = H^0(x,\psi) - H^0(\hat{x},\psi)\\
&\le H^0_x(\hat{x},\psi)(x-\hat{x}) = H_x(\hat{x},\hat{u},\psi)(x-\hat{x}). \qquad (13.1)
\end{aligned}$$

[1] Táto veta zaručuje existenciu optimálneho riadenia v triede merateľných funkcií

Tu sme využili najprv, že $H(\hat{x}, \hat{u}, \psi) = H^0(\hat{x}, \psi)$, potom konkávnosť H^0 a nakoniec obálkovú vetu. Počítajme teraz

$$\begin{aligned}
J(u) - J(\hat{u}) &= \int_0^T [f^0(x,u) - f^0(\hat{x},\hat{u})]dt \\
&= \int_0^T [H(x,u,\psi) - H(\hat{x},\hat{u},\psi) - \psi^T(f(x,u) - f(\hat{x},\hat{u}))]dt \\
&\leq \int_0^T [H_x(\hat{x},\hat{u},\psi)(x-\hat{x}) - \psi^T(\dot{x} - \dot{\hat{x}})]dt \\
&= \int_0^T [-\dot{\psi}^T(x-\hat{x}) - \psi^T(\dot{x} - \dot{\hat{x}})]dt \\
&= \int_0^T [-\frac{d}{dt}\psi^T(x-\hat{x})]dt = -[\psi^T(x-\hat{x})]_0^T \\
&= -\psi(T)^T(x(T) - \hat{x}(T)) + \psi(0)^T(x(0) - \hat{x}(0)) \\
&= \chi^T G(x(T) - \hat{x}(T)) - 0 = 0,
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. □

Poznámky:

1. V prípade, že máme úlohu na minimum, znenie Vety 13.2 sa zmení len v definícii Hamiltonovej funkcie, kde $H(x,u,\psi) = -f^0(x,u) + \psi^T f(x,u)$ v dôsledku toho, že $\psi^0 = -1$. To znamená, že aj v tomto prípade predpokladáme konkávnosť funkcie H^0.
2. Vetu 13.2 možno zovšeobecniť aj na neautonómne úlohy, kde $f^0 = f^0(t,x,u)$ a $f = f(t,x,u)$. Potom $H = H(t,x,u,\psi)$ a vo vete stačí žiadať, aby $H^0(t,x,\psi)$ bola konkávnou v x pre každé ψ a t (pozri Úlohu 13.1).
3. Predpoklad Vety 13.2 o konkávnosti H^0 je splnený, ak $H(x,u,\psi)$ je konkávna v (x,u) a U je konvexná (lebo maximum konkávnej funkcie cez konvexnú množinu je konkávna funkcia). To znamená, že napríklad, ak $f^0(x,u)$ je konkávna v (x,u) a $f(x,u)$ je lineárna v (x,u), potom $H(x,u,\psi)$ konkávna v (x,u) pre každé ψ a teda ak U je konvexná, tak $H^0(x,\psi)$ je konkávna pre každé ψ.

Nasledujúci príklad ukáže, že predpoklad konkávnosti $H^0(x,\psi)$ je slabší ako predpoklad konkávnosti $H(x,u,\psi)$ v (x,u) pre každé ψ.

Príklad 13.1. H^0 **kontra** H**.** Uvažujme nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T (u^2 - x)dt, \\
&\dot{x} = u, \qquad t \in [0,T], \quad T - \text{pevné}, \\
&x(0) = x_0, \quad u \in [0,1].
\end{aligned}$$

Pre túto úlohu zrejme $H = u^2 - x + \psi u$ nie je konkávna (je rýdzokonvexná) v u. Na druhej strane

$$H^0 = -x + \max_{u \in [0,1]} (u^2 + \psi u) = -x + \max\{0, 1 + \psi\}$$

je pre každé pevné ψ lineárna v x (a teda konkávna) a teda sú splnené postačujúce podmienky. Vyriešme túto úlohu. Pretože úloha má voľný koniec, tak máme $\psi(T) = 0$ a môžeme položiť $\psi^0 = 1$. Z tohoto a z adjungovanej rovnice $\dot{\psi} = 1$ dostávame $\psi(t) = t - T$. Z podmienky maxima dostávame

$$u = \begin{cases} 0 & t - T = \psi < -1 \\ 1 & t - T = \psi \geq -1 \end{cases}.$$

To znamená, že ak $T > 1$, tak optimálnym riadením je

$$\hat{u} = \begin{cases} 0 & t \in [0, T-1| \\ 1 & t \in [T-1, T] \end{cases}.$$

Ak $T \leq 1$, tak $\hat{u} \equiv 1$. □

Príklad 13.2. Postačujúcosť PPM v Ramseyho modeli. Podľa Arrowovej vety a Poznámky 2 sú nutné podmienky optimality pre Ramseyho model aj postačujúce. Naozaj, Hamiltonova funkcia $H(t, k, c, \psi) = e^{-rt}\mathrm{U}(c) + \psi(f(k) - \delta k - c)$ je konkávna v k aj v c pre každé $\psi > 0$ a t. Pritom v tomto prípade je ψ dané vzťahom (9.9) a teda vzhľadom na predpoklad na U' nadobúda len kladné hodnoty, preto je H^0 konkávna.

13.3 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 13.1. Sformulujte a dokážte analógiu Vety pre neutonómnu úlohu spomínanú v Poznámke 2. Sformulujte a odôvodnite analógiu Poznámky 3.

Úloha 13.2. Z príkladov, ktoré sme riešili na prednáškach resp. ako DÚ, si vyberte jeden a ukážte preň, že riadenie, ktoré sme našli pomocou PPM, je optimálne.

Kapitola 14

Lineárna úloha najrýchlejšieho prechodu

V tejto časti sa budeme zaoberať tzv. lineárnou úlohou najrýchlejšieho prechodu. Hoci takéto úlohy sa nevyskytujú v ekonomických aplikáciách, táto úloha bola v počiatkoch vzniku teórie optimálneho riadenia široko analyzovaná a skúmaná, najmä pre svoju jednoduchú štruktúru. Výsledky pre ňu dosiahnuté potom tvorili určité východisko pre analýzu zložitejších úloh. V tejto časti uvedieme niektoré základné poznatky o takejto úlohe a na príklade o najrýchlejšom premiestnení (Príklad 1.1) si ukážeme, ako možno pre takéto úlohy získať optimálne riadenie v tvare spätnej väzby.

14.1 Formulácia lineárnej úlohy najrýchlejšieho prechodu

Pod lineárnou úlohou najrýchlejšieho prechodu budeme rozumieť úlohu v ktorej je diferenciálny systém lineárny, t.j. $f(x,u) = Ax + Bu$, (kde A a B sú konštantné matice príslušných rozmerov) a minimalizujeme čas, to znamená, že $f^0 \equiv 1$ a T je voľné. Aby takáto úloha s počiatočnou podmienkou $x(0) = x_0$ mala netriviálne riešenia, je zrejmé, že koncový stav nemôže byť úplne voľný a preto budeme žiadať, aby koncová hodnota $x(T)$ sa rovnala nejakej predpísanej hodnote $x_T \neq x_0$. Aby sme pre úlohu s prípustnými riadeniami zabezpečili existenciu optimálneho riadenia, budeme (podľa Vety 13.1 o existencii) žiadať aby U bola kompaktná a konvexná. Dostávame tak nasledovnú úlohu, ktorú označíme (L)

$$\min \int_0^T 1 \, dt$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné },\\
&x(0) = x_0,\\
&x(T) = x_T,\\
&u(t) \in U, \text{ pre všetky } t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Hamiltonova funkcia pre túto úlohu má tvar

$$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 + \psi^T(Ax + Bu).$$

14.2 PPM pre lineárnu úlohu najrýchlejšieho prechodu

Aplikujme na úlohu (L) podmienky PPM v optimálnom $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$, $t \in [), \hat{T}]$. To znamená, existuje také $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0$, že v každom $t \in [0, \hat{T}]$ je splnená adjungovaná rovnica

$$\dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t) \tag{14.1}$$

a podmienka maxima a stacionarity

$$\psi^0 + \psi^T(t)(A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t)) = \max_{u \in U}[\psi^0 + \psi^T(t)(A\hat{x}(t) + Bu)] = 0. \tag{14.2}$$

Je zrejmé, že takáto podmienka maxima v poslednom výraze je ekvivalentná s podmienkou maxima v tvare:

$$\psi^T(t)B\hat{u}(t) = \max_{u \in U} \psi^T(t)Bu, \tag{14.3}$$

kde sme vynechali členy, ktoré od u nezáviseli. Dostali sme teda pre úlohu (L) adjungovanú rovnicu v tvare (14.1) a podmienku maxima v tvare (14.3). Všimnime si, že ani v (14.1) ani v (14.3) nevystupuje ψ^0. Toto však stále vystupuje spojené s $\psi(t)$ v podmienke $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0$. Využijúc podmienku stacionarity, t.j. poslednú rovnosť v (14.2), budeme vedieť túto podmienku vyjadriť len pomocou $\psi(t) \neq 0$. Naozaj, nech by $\psi(t) = 0$, potom z (14.2) dostaneme, že $\psi^0 = 0$ a to je spor. Dostali sme teda nasledovnú vetu:

Veta 14.1 (PPM pre (L))**.** *Nech $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ sú optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu (L). Potom existuje také netriviálne riešenie $\psi(t)$ adjungovanej rovnice (14.1), že v každom $t \in [0, \hat{T}]$ je splnená podmienka maxima (14.3).*

Dôkaz. My sme vyvodili túto vetu z Vety 13.1 pre všeobecnú úlohu optimálneho riadenia. V knihe [3] odsek 2.3.5 možno nájsť priamy dôkaz PPM pre (L). □

14.3 Úloha na syntézu optimálneho riadenia

V tomto odseku budeme riešiť úlohu o najrýchlejšom premiestnení (pozri Príklad 1.1). Budeme ju riešiť pri všeobecne zadanej počiatočnej podmienke a pevne zadaný koncový stav umiestnime do počiatku súradnej sústavy stavového priestoru. To znamená, že budeme riešiť úlohu

$$\min T$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned}
&\dot{x}^1(t) = x^2(t), t \in [0,T], T \text{je voľné},\\
&\dot{x}^2(t) = u(t),\\
&x^1(0) = x_0^1, \quad x^1(T) = 0,\\
&x^2(0) = x_0^2, \quad x^2(T) = 0,\\
&u(t) \in [-1,1].
\end{aligned}$$

Pre túto úlohu dostávame adjungovanú rovnicu v tvare

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^1(t) &= 0,\\
\dot{\psi}^2(t) &= -\psi^1(t),
\end{aligned}$$

ktorej riešením je

$$\begin{aligned}
\psi^1(t) &= a,\\
\psi^2(t) &= -at + b,
\end{aligned}$$

kde a a b sú konštanty. Podmienka maxima má tvar

$$\psi^2(t)\hat{u}(t) = \max_{u \in [-1,1]} \psi^2(t)u,$$

ktorej riešením je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi^2(t) > 0 \\ -1, & \text{ak } \psi^2(t) < 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \psi^2(t) = 0 \end{cases}.$$

Pretože $\psi(t) \neq 0$, tak aspoň jedno z čísel a, b musí byť rôzne od nuly a teda $\psi^2(t) = 0$ môže platiť najviac pre jedno t. V takomto t potom určíme hodnotu $u(t)$ ako limitu $u(t)$ sprava, ináč optimálne riadenie môže nadobúdať iba hodnoty 1, alebo -1, pričom z jednej hodnoty na druhú môže preskočiť najviac raz. Do úvahy prichádzajú iba 4 stratégie:

(a) $\hat{u}(t) = 1, \quad t \in [0, \hat{T}]$, $\qquad$ (b) $\hat{u}(t) = -1, \quad t \in [0, T]$,

(c) $\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } t \in [0, t_1) \\ -1, & \text{ak } t \in [t_1, \hat{T}] \end{cases}$, $\qquad$ (d) $\hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & \text{ak } t \in [0, t_2) \\ 1, & \text{ak } t \in [t_2, \hat{T}] \end{cases}$.

Trajektória optimálnej odozvy musí pozostávať z trajektórií rovníc

$$\begin{array}{cc} (+) & (-) \\ \dot{x}^1 = x^2, & \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = 1, & \dot{x}^2 = -1. \end{array} \tag{14.4}$$

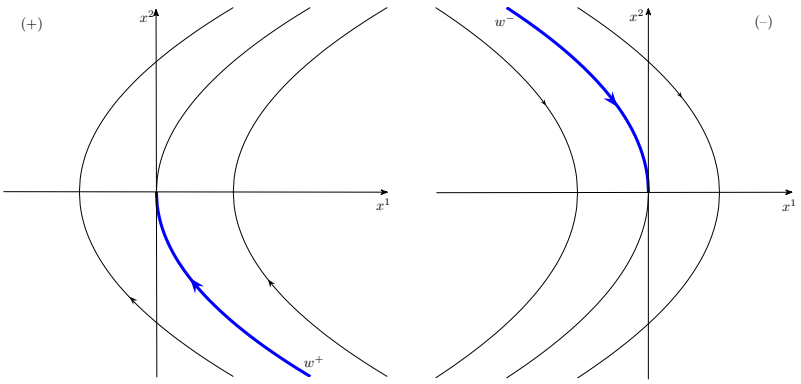
Ich trajektórie vyhovujú diferenciálnym rovniciam

$$\frac{dx^1}{dx^2} = x^2, \qquad \frac{dx^1}{dx^2} = -x^2,$$

ktorých riešením dostaneme

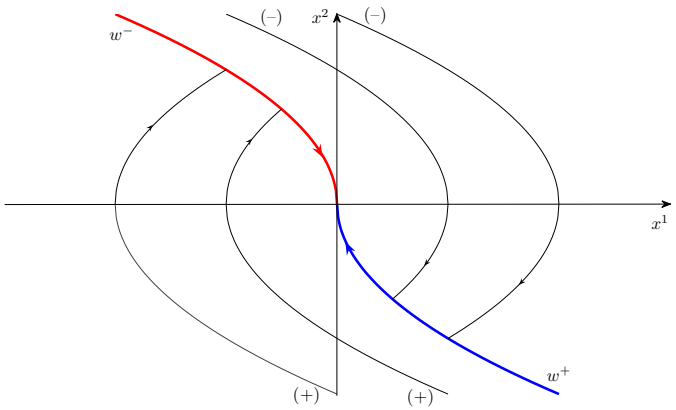
$$x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + c, \qquad x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + c,$$

kde c je konštanta. Takéto trajektórie sú zobrazené na Obr. 14.1.



Obr. 14.1: Trajektórie systémov diferenciálnych rovníc (14.4).

Cez začiatok prechádza z každého zo systémov (+), (−) práve jedna trajektória, a to, $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2$, resp. $x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2$. Označíme tú ich časť, ktorá je zložená z bodov prechádzajúcich bodom 0 (v smere rastúceho t) ako w^+ resp. w^-. Z bodov na w^+, resp. w^- a iba z nich sa možno dostať do 0 pomocou konštantného riadenia s hodnotou 1, resp. -1. Pretože optimálne riadenie môže preskočiť z $+1$ na -1, resp. naopak najviac raz, sú možné iba dva prípady: Odozva prebieha najprv po trajektórii rovnice (+), prejde na w^- a po ňom sa dostane do 0, alebo najprv po trajektórii rovnice (−) prejde na w^+ a po nej sa dostane do 0 (pozri Obr. 14.2).



Obr. 14.2: Syntéza optimálneho riadenia.

Z Obr. 14.2 nie je ťažké vyvodiť, že pod krivkou $w = w^+ \cup w^-$ a na w^+ sa bod optimálnej odozvy musí pohybovať po trajektórii systému (+), nad w a na w^- po trajektórii systému (−). Pretože trajektórie takto zložené z trajektórií systémov (+), (−) jednoznačne pokryjú $\mathbb{R}^2$, je týmto pravidlom ku každému začiatočnému bodu jednoznačne určené riadenie $\hat{u}(t)$, ktoré sa dá vyjadriť v tvare optimálnej spätnej väzby $\hat{u}(t) = v(x(t))$, kde

$$v(x) = \begin{cases} +1, & \text{ak } x \text{ je pod } w \text{ alebo na } w^+ \\ -1, & \text{ak } x \text{ je nad } w \text{ alebo na } w^-, \end{cases}$$

alebo ináč zapísané

$$v(x) = \begin{cases} +1, & \text{ak } x^2 \leq 0 \text{ a } x^1 \leq 1/2(x^2)^2, \text{ alebo } x^1 < -1/2(x^2)^2 \\ -1, & \text{ak } x^1 > 1/2(x^2)^2, \text{ alebo } x^2 \geq 0 \text{ a } x^1 \geq -1/2(x^2)^2 \ . \end{cases}$$

Riešenie plne odpovedá intuícii: Vozík musíme maximálnou silou roztláčať, až kým sa nedostaneme do stavu, z ktorého ho môžeme ešte maximálnou brzdiacou silou ubrzddiť. (Množina týchto bodov je práve w.) Pre každý počiatočný stav sme tak dostali jediné riadenie spĺňajúce podmienky PPM, ktoré prevádza bod x_0 do 0. Pretože úloha spĺňa podmienky existenčnej vety, tieto riadenia sú aj optimálne.
Ako teraz nájdeme optimálne riadenie $\hat{u}(t)$ pre daný počiatočný bod x_0? Ukážeme si to pre taký bod x_0, ktorý je pod čiarou w, teda spĺňa $x^2 \leq 0$ a $x^1 < 1/2(x^2)^2$, alebo $x^1 < -1/2(x^2)^2$. Pre takýto bod je $v(x_0) = 1$ a teda optimálna odozva sa spočiatku bude pohybovať po trajektórii systému (+), kým nedosiahne w^-. To značí, že bude platiť $\hat{u}(t) = 1$ pre $t \in [0, t_1]$, kde $t_1 > 0$ je také, že $x(t_1)$ leží na w^-, t.j. $\hat{x}^1(t_1) = -1/2(\hat{x}^2(t_1))^2$ a $x^2(t_1) > 0$. Riešením systému (+) dostávame

$$\hat{x}^2(t) = x_0^2 + t, \qquad \hat{x}^1(t) = x_0^1 + x_0^2 t + \frac{1}{2}t^2$$

a teda t_1 musí byť nezáporným riešením kvadratickej rovnice

$$x_0^1 + x_0^2 t + \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}(x_0^2 + t)^2,$$

t.j.

$$t_1 = -x_0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1}.$$

Dosadením do výrazu pre dostávame

$$\hat{x}^2(t_1) = \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1}.$$

Pre $t \geq t_1$ bude trajektóriou odozvy $\hat{x}^2(t)$ krivka w^-, teda bude platiť $\hat{u}(t) = -1$. Riešením druhej rovnice systému $(-)$ dostávame

$$\hat{x}^2(t) = \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1} - (t - t_1) = -x_0^2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1} - t.$$

V čase $\hat{T}$, kedy odozva dosiahne cieľový bod $(0,0)$, musí platiť $\hat{x}^2(\hat{T}) = 0$, z čoho dostávame

$$\hat{T} = -x_0^2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1}.$$

Celkove teda dostávame

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } 0 \leq t < -x_0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1} \\ -1, & \text{ak } -x_0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1} \leq t \leq -x_0^2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 - x_0^1} \end{cases}.$$

14.4 Normalita

V predchádzajúcom príklade sme vedeli z podmienky maxima jednoznačne vyjadriť riadenie ako funkciu adjungovanej premennej a pre každý počiatočný stav sme našli jediné optimálne riadenie. Toto riadenie bolo po čiastkach konštantné a nadobúdalo len krajné body množiny U. Takémuto riadeniu budeme hovoriť mantinelové. V tomto odseku ukážeme, že podobná vlastnosť bude platiť pre širšiu podtriedu tzv. normálnych úloh (L), i keď nasledujúci príklad ukáže, že to nie je úplne všeobecná vlastnosť úloh (L).

Príklad 14.1. Pre úlohu:

$$\begin{aligned} &\min T \\ &\dot{x}^1 = u^1, \quad x^1(0) = 1, \quad x^1(T) = 0, \\ &\dot{x}^2 = u^2, \quad x^2(0) = 0, \quad x^2(T) = 0, \\ &u^1 \in [-1,1], \quad u^2 \in [-1,1], \end{aligned}$$

je optimálne každé riadenie také, že $\hat{u}^1(t) = -1$ a $\int_0^{\hat{T}} \hat{u}^2(t)dt = 0$. Prvá zložka optimálnej odozvy je $\hat{x}^1(t) = -t+1$ a optimálny čas je $\hat{T} = 1$. Vidíme teda, že v tomto príklade iba prvá zložka optimálneho riadenia má vlastnosť mantinelovosti. Druhá zložka ju nemusí spĺňať. Zvoľme jedno optimálne riadenie pre túto úlohu také, že jeho druhá zložka nie je mantinelová a pozrime sa, ako takéto riadenie spĺňa podmienky PPM.
Adjungovaná rovnica pre túto úlohu dáva riešenie $\psi^1(t) = c$ a $\psi^2(t) = d$, kde c a d sú konštanty. Podmienka maxima potom dáva

$$cu^1 + du^2 \to \max_{u^1 \in [-1,1], u^2 \in [-1,1]}$$

a jej riešením je

$$u^1(t) = \begin{cases} +1, & \text{ak } c > 0 \\ -1, & \text{ak } c < 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } c = 0 \end{cases}, \quad u^2(t) = \begin{cases} +1, & \text{ak } d > 0 \\ -1, & \text{ak } d < 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } d = 0 \end{cases}.$$

Je teda zrejmé, že pre zvolené optimálne riadenie je $c < 0$ a pre druhú zložku optimálneho riadenia teda nastáva prípad $d = 0$, kedy riadenie nie je jednoznačne určené podmienkou maxima.
Poďme analyzovať situáciu pre všeobecný prípad v snahe nájsť nejakú postačujúcu podmienku k tomu, aby riadenie bolo jednoznačne určené podmienkou maxima. Kvôli jednoduchosti budeme predpokladať, že

$$U = U_1 \times \cdots \times U_m, \quad \text{kde} \quad U_i = [\alpha_i, \beta_i], \ i = 1, \ldots, m. \tag{14.5}$$

Pre takto zvolené U bude podmienka maxima (14.3) ekvivalentná so sytémom m podmienok

$$\psi(t)^T b^{(i)} \hat{u}^i(t) = \max_{u^i \in [\alpha_i, \beta_i]} \psi(t)^T b^{(i)} u^i, \quad i = 1, ..., m,$$

kde $b^{(i)}$ je i-ty stĺpec matice B. Riešením týchto podmienok dostávame

$$u^i(t) = \begin{cases} \beta_i, & \text{ak } \psi(t)^T b^{(i)} > 0 \\ \alpha_i, & \text{ak } \psi(t)^T b^{(i)} < 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \psi(t)^T b^{(i)} = 0 \end{cases}.$$

Všimnime si, že ak je počet bodov t, v ktorých $\psi(t)^T b^{(i)} = 0$ konečný, potom dodefinujeme $u^i(t)$ v týchto bodoch ako limitu sprava a teda riadenie je určené jednoznačne. Bude nás teda zaujímať prípad, keď je nekonečne veľa bodov t takých, že $\psi(t)^T b^{(i)} = 0$, pretože iba vtedy nie je $u^i(t)$ jednoznačne určené z podmienky maxima. V tomto prípade však z vlastností funkcie $\psi(t)$ (je to analytická funkcia) vyplýva, že

$$\psi(t)^T b^{(i)} \equiv 0 \tag{14.6}$$

Derivovaním (14.6) podľa t a využitím adjungovanej rovnice (14.1) dostaneme

$$\psi(t)^T A b^{(i)} \equiv 0 \tag{14.7}$$

opakovaním tohoto postupu dostaneme

$$\psi(t)^T A^2 b^{(i)} \equiv 0 \tag{14.8}$$

atď. až

$$\psi(t)^T A^{n-1} b^{(i)} \equiv 0 \tag{14.9}$$

Vzťahy (14.6) až (14.9) môžeme zapísať do jedného maticového výrazu

$$\psi(t)^T \left(b^{(i)}, Ab^{(i)}, A^2 b^{(i)}, \ldots, A^{n-1} b^{(i)}\right) \equiv 0 \tag{14.10}$$

Pretože $\psi(t) \neq 0$, tak (14.10) implikuje, že matica

$$M^i := \left(b^{(i)}, Ab^{(i)}, A^2 b^{(i)}, \ldots, A^{n-1} b^{(i)}\right) \tag{14.11}$$

musí byť singulárna. Predpoklad, že $u^i(t)$ nie je jednoznačne určené z podmienky maxima nás doviedol k singularite M^i. Z toho vyplýva, že predpoklad regularity M^i zabezpečí, že $u^i(t)$ bude jednoznačne vyjadrené z podmienky maxima.
Systém $\dot{x} = Ax + Bu$, kde A a B sú konštantné, s oblasťou riadenia U danou (14.5) sa nazýva *normálny*, ak pre každé $i = 1, ..., m$ platí, že

$$\det \left(b^{(i)}, Ab^{(i)}, A^2 b^{(i)}, \ldots, A^{n-1} b^{(i)}\right) \neq 0,$$

kde $b^{(i)}$ je i-ty stĺpec matice B.

14.5 Mantinelovosť a jednoznačnosť

V tomto odseku uvedieme bez dôkazov niektoré základné vlastnosti normálnych systémov.

Veta 14.2 (Mantinelovosť a jednoznaňosť)**.** *Nech je systém $\dot{x} = Ax + Bu$, kde A a B sú konštantné, s oblasťou riadenia U danou (14.5) normálny. Potom pre ľubovoľne zvolený počiatočný a koncový stav existuje najviac jedno optimálne riadenie pre prislúchajúcu úlohu najrýchlejšieho prechodu a toto riadenie je mantinelové, t.j. je po čiastkach konštantné a nadobúda iba krajné body množiny U.*

Poznamenajme, že odvodenie, ktoré sme robili v predchádzajúcom odseku, nie je úplným dôkazom tejto vety. My sme totiž ukázali, že k danému $\psi(t)$ existuje jediné extremálne riadenie (t.j. spĺňajúce podmienku maxima). K jednoznačnosti by bolo treba

dokázať, každé optimálne riadenie je extremálne vzhľadom na to isté $\psi(t)$. Tento dôkaz možno nájsť v [3].
Úlohy, s ktorými sme sa zaoberali mali najviac jeden bod prepnutia. V knihe [3] je uvedený a riešený jeden príklad úlohy (L), opisujúci harmonický pohyb lineárnej pružiny, ktorú treba v najkratšom čase zastaviť. Tento príklad vedie na normálny systém a teda optimálne riadenia sú mantinelové. Počet prepnutí optimálnych riadení však môže byť veľmi veľký a je závislý od počiatočnej podmienky. Nasledujúca veta formuluje predpoklady, pri ktorých je možné odhadnúť počet prepnutí optimálneho riadenia.

Veta 14.3 (Veta o n intervaloch)**.** *Nech je systém $\dot{x} = Ax + Bu$, kde A a B sú konštantné, s oblasťou riadenia U danou (14.5) normálny a nech všetky vlastné čísla matice A sú reálne. Potom každá zložka optimálneho riadenia pre príslušnú úlohu (L) má najviac $n-1$ bodov nespojitosti.*

14.6 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 14.1. Uvažujme úlohu najrýchlejšieho prechodu riešenú na prednáške.

a) Využitím výsledkov z prednášky určte optimálne riadenie a optimálny čas v prípade, že $x_0^1 = -1, \quad x_0^2 = 0$.

b) Podobným spôsobom ako na prednáške nájdite optimálne riadenie a optimálny čas ak x_0 leží nad w.

Úloha 14.2. Najrýchlejšia ťažba ropy. Nájdite optimálne riešenie (riadenie aj odozvu) pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\min T,\\
&\dot{x} = -\gamma y,\\
&\dot{y} = u,\\
&x(0) = x_0 > 0 \text{ dané}, \quad x(T) = 0,\\
&y(0) = y_0 > 0 \text{ dané}, \quad y(T) = 0,\\
&u \in [-1, 1],
\end{aligned}$$

kde $\gamma > 0$ je daná konštantna. Ak x označuje zostatkové množstvo ropy v nejakej oblasti a y úroveň technologického vybavenia slúžiaceho na ťažbu ropy, uvedenú úlohu možno interpretovať ako úlohu čo najrýchlejšieho vyťaženia zásob ropy v danej oblasti vrátane likvidácie pomocného technického vybavenia. Urobte syntézu optimálneho riadenia pre túto úlohu.

Úloha 14.3. Urobte syntézu optimálneho riadenia pre úlohu najrýchlejšieho prechodu

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -x^1 + u, \qquad x^1(T) = 0 \\ \dot{x}^2 &= x^2 + u, \qquad x^2(T) = 0, \qquad |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Úloha 14.4. Zistite, či je systém $\dot{x}^1 = u^1$, $\dot{x}^2 = x^1 + u^2$, $\dot{x}^3 = x^2 + u^1 + u^2$ s oblasťou riadenia $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$ normálny.

Kapitola 15

Singulárne optimálne riadenia

Singulárne riadenia sa pomerne často vyskytujú v úlohách, ktoré majú Hamiltonovu funkciu lineárnu v riadení. Vedú na pojem zlatého stredu a magistrály. Optimálne je potom to prípustné riadenie, ktoré odozvu čo najrýchlejšie dovedie na magistrálu a čo najdlhšie ju na magistrále udrží. Pojem singulárneho riadenia si najprv vysvetlíme na príklade, ktorý je modifikáciou tzv. Solowovho neoklasického modelu z makroekonomickej teórie rastu.

15.1 Príklad úlohy na singulárne riadenie

Príklad 15.1. Solowov model ekonomického rastu. V tomto odseku sa budeme zaoberať úlohou:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T (1-s(t))f(k(t))dt, \ T \text{ pevné},\\
&\dot{k}(t) = s(t)f(k(t)) - \delta k(t), \quad t \in [0,T],\\
&k(0) = k_0,\\
&s(t) \in [0,1].
\end{aligned}$$

V tejto úlohe je stavovou premennou kapitál k, ktorý sa exponenciálne znehodnocuje konštantou úmernosti $\delta > 0$. Funkcia $f(k)$ je produkčná funkcia, o ktorej predpokladáme, že $f \in C^2$, $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k\to 0^+} f'(k) = \infty$ $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$. Riadiacou premennou je $s \in [0,1]$, je to číslo, ktoré určuje, aká časť vyprodukovaného kapitálu sa znova investuje. Zvyšok sa spotrebováva. Účelová funkcia teda predstavuje množstvo kapitálu určeného na spotrebu v priebehu daného časového horizontu $[0,T]$.

Poznámka: Na rozdiel od nášho príkladu, Solowov model známy z makroekonomie sa neformuluje ako úloha optimálneho riadenia. Uvažuje sa v ňom iba dynamika daná diferenciálnou rovnicou pre k, pričom s je konštantná veličina. Analyzuje sa rovnovážny stav, kedy $\dot{k} = 0$, čo nastáva, ak dvojica (s,k) spĺňa $sf(k) - \delta k = 0$ a teda $s = \frac{\delta k}{f(k)}$. Pre takéto (s,k) potom vieme vyjadriť spotrebu $(1-s)f(k) = f(k) - \delta k$ a táto je

maximálna v bode k_z, kde $f'(k_z) = \delta$. Takáto voľba hodnoty k a s sa v makroekonómii nazýva zlaté pravidlo kapitálu.

Čo dostaneme riešením nutných podmienok optimality pre túto úlohu? Keďže ide o úlohu s voľným koncom, tak $\psi(T) = 0$ a môžeme položiť $\psi^0 = 1$. Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{\psi} = -(1-s)f'(k) - \psi(sf'(k) - \delta),$$

podmienka maxima dáva

$$f(\hat{k}) - \psi\delta\hat{k} + s(\psi - 1)f(\hat{k}) \to \max_{s\in[0,1]}$$

a jej riešením dostávame

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi(t) > 1 \\ 0, & \text{ak } \psi(t) < 1 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \psi(t) = 1 \end{cases}.$$

Vzhľadom na to, že ψ spĺňa pomerne zložitú diferenciálnu rovnicu, nevieme povedať, či $\psi(t) = 1$ nastane iba v konečnom počte hodnôt t a preto musíme pripustiť možnosť, že $\psi(t) = 1$ na intervale nenulovej dĺžky. Predpokladajme teda, že na nejakom netriviálnom intervale I je $\psi(t) = 1$. (Takýto interval nazývame singulárny.) Potom zrejme $\dot{\psi}(t) = 0$, pre $t \in I$ a z adjungovanej rovnice dostávame

$$0 = \dot{\psi} = -(1-s)f'(k) - (sf'(k) - \delta), \tag{15.1}$$

z čoho vyplýva, že

$$f'(k(t)) = \delta, \quad \text{pre každé } t \in I. \tag{15.2}$$

Z vlastností funkcie f (jej derivácie rýdzomonotónne klesajú z ∞ do 0) vyplýva, že existuje práve jeden bod k_z taký, že

$$f'(k_z) = \delta.$$

Z toho vyplýva, že na I je $k(t) \equiv k_z$ a teda aj $\dot{k}(t) = 0$, z čoho vyplýva

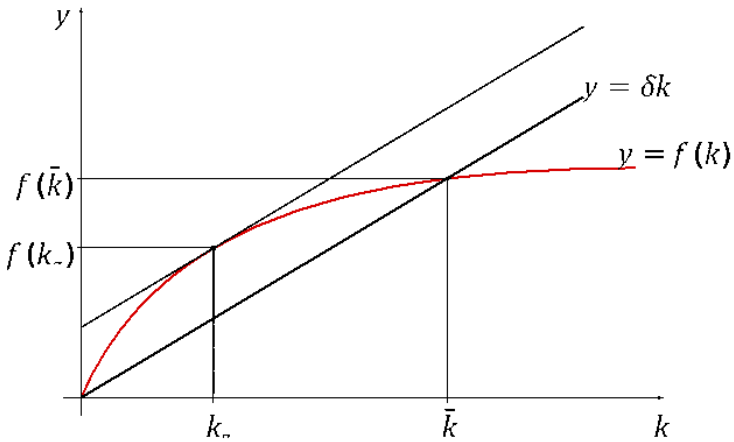
$$0 = \dot{k}_z = \hat{s}f(k_z) - \delta k_z, \qquad \text{pre každé } t \in I. \tag{15.3}$$

Vyjadrením z poslednej rovnice dostaneme, že $\psi(t) = 1$ na I implikuje, že

$$\hat{s}(t) = s_z := \frac{\delta k_z}{f(k_z)} \text{ pre každé } t \in I. \tag{15.4}$$

Z predpokladov kladených na f vyplýva, že $s_z \in [0,1]$ (pozri Obr. 15.1). Dostávame teda

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi(t) > 1 \\ 0, & \text{ak } \psi(t) < 1 \\ \frac{\delta k_z}{f(k_z)}, & \text{ak } \psi(t) = 1 \end{cases}. \tag{15.5}$$



Obr. 15.1: Významné body na produkčnej funkcii.

Hodnota s_z je singulárnou hodnotou riadenia a v tomto príklade jej hovoríme aj *zlatý stred*. Predstavuje určitú rovnováhu medzi spotrebou a investíciami, resp. medzi súčasnou a budúcou spotrebou, ktorú je optimálne udržiavať z dlhodobého hľadiska. [1]
Vzťah (15.5) napovedá, že optimálne riadenie sa môže skladať iba z úsekov, na ktorých je hodnota riadenia rovná buď niektorej z krajných hodnôt intervalu $[0, 1]$, alebo hodnote zlatého stredu. Zatiaľ však nič nevieme, ktoré z týchto úsekov, v akom poradí a koľkokrát sa vyskytnú. K tomu potrebujeme vyšetriť časový priebeh adjungovanej funkcie ψ.
Pretože $\psi(T) = 0$ a $\psi(t)$ je spojitá funkcia, tak existuje $t_1 < T$ také, že $\hat{u}(t) = 0$ na $[t_1, T]$. Analýza správania sa $\psi(t)$ naľavo od t_1 je náročnejšia a závisí aj od stavovej premennej k. Celkove časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od k_0 a T a kvalitatívnu analýzu odvodíme v jednom z ďalších odsekov pomocou syntézy optimálneho riadenia. Iný spôsob analýzy možno nájsť napr. v [3]. Na tomto mieste teraz uvedieme, že postupnosť úsekov môže byť iba nasledovná:

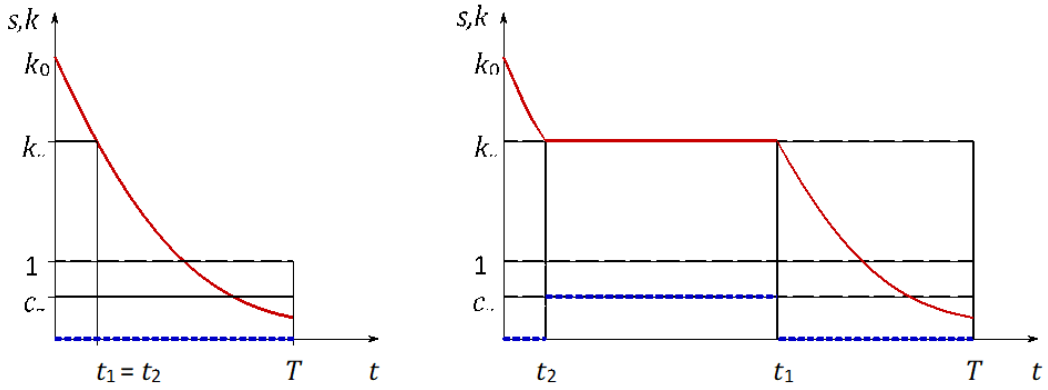
$$(i) \quad \hat{s}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_2) \\ s_z, & t \in [t_2, t_1) \\ 0, & t \in [t_1, T] \end{cases}, \quad \text{pre } k_0 \geq k_z \tag{15.6}$$

$$(ii) \quad \hat{s}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_2) \\ s_z, & t \in [t_2, t_1) \\ 0, & t \in [t_1, T] \end{cases}, \quad \text{pre } k_0 \leq k_z, \tag{15.7}$$

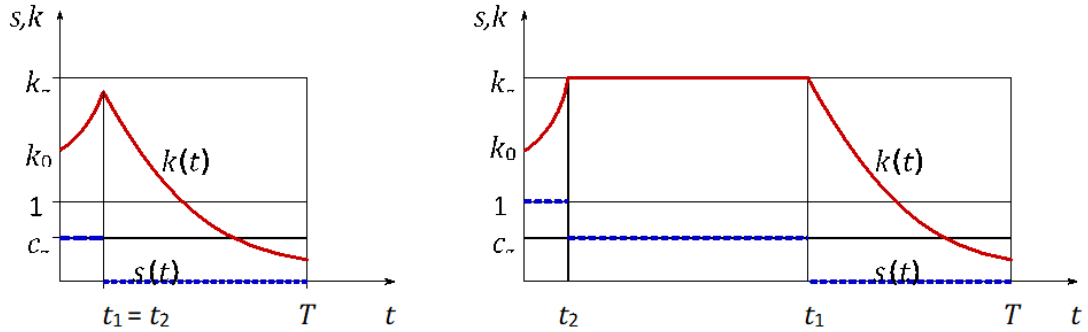
kde $0 \leq t_2 \leq t_1 < T$. V prípade, že $k_0 = k_z$, prvý úsek nenastáva, t.j. $0 = t_2$. Druhý úsek (t_2, t_1) je singulárny a jeho dĺžka závisí od celkového času T. V prípade, že T je menšie ako určitá kritická hodnota, tak $t_2 = t_1$ a teda singulárny úsek nenastane.

[1] Všimnime si, že hodnota (s_z, k_z) odpovedá zlatému pravidlu kapitálu.

Singulárny úsek v priestore stavovej premennej sa niekedy označuje aj ako magistrála. Rovnako ako v tejto, aj v mnohých ďalších úlohách sa pozoruje jav, že keď je čas T dostatočne dlhý, tak optimálnym správaním je čo najrýchlejšie sa dostať na magistrálu a čo možno najdlhšie na nej zotrvať. Priebeh spotreby a kapitálu v závislosti od času pre všetky uvedené prípady je znázornený na Obr. 15.2 a 15.3.



Obr. 15.2: Priebeh kapitálu k a spotreby s v prípade $k_0 > k_z$ pre a) malé T (vľavo) a b) veľké T (vpravo).



Obr. 15.3: Priebeh kapitálu k a spotreby s v prípade $k_0 < k_z$ pre a) malé T (vľavo) a b) veľké T (vpravo).

15.2 Definícia singulárneho riadenia

Interval, na ktorom optimálne riadenie $\hat{u}(t)$ nemaximalizuje Hamiltonovu funkciu ostro (t.j. $\hat{u}(t)$ nie je jedinou hodnotou, pre ktorú sa v podmienke maxima nadobúda maximum) sa nazýva *singulárny*. Ak optimálne riadenie má singulárny netriviálny interval, tak sa nazýva singulárne. Hodnota odozvy na singulárnom úseku sa nazýva magistrála.

Poznamenajme, že so singulárnym riadením sme sa už stretli v Príklade 10.1 o obchodovaní s komoditami. V tomto príklade sme dostali, že ak $s = p_1$, tak na intervale $[T/2, T]$ hodnota účelovej funkcie nezávisí od riadenia. To znamená, že optimálna je akákoľvek hodnota riadenia z intervalu $[-1, 1]$, ktorá zrejme nemaximalizuje Hamiltonovu funkciu ostro. Takéto riadenia sú singulárne takpovediac triviálne, ako dôsledok nejednoznačnosti optimálnych riadení. V Príklade 15.1 o Solowovom modeli, bola situácia odlišná. Napriek tomu, že Hamiltonova funkcia v prípade $\psi = 1$ nadobúdala svoje maximum pre každé $s \in [0, 1]$, dokázali sme použitím nutných podmienok vyššieho rádu nájsť jedinú hodnotu riadenia s_z.

15.3 Nutné podmienky optimality vyššieho rádu

Singulárne riadenia sa veľmi často vyskytujú v úlohách lineárnych v riadení, kde Hamiltonova funkcia má tvar

$$H(x, u, \psi, \psi^0) = K(x, \psi, \psi^0) + L(x, \psi, \psi^0)u.$$

Pre takéto úlohy vieme vyvodiť nutné podmienky optimality vyššieho rádu, ktoré môžu zúžiť množinu možných hodnôt optimálneho riadenia na singulárnom úseku. Ak totiž I je netriviálny singulárny interval optimálneho riadenia, potom zrejme platí

$$L(\hat{x}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv 0 \text{ na } I \tag{15.8}$$

a z podmienky stacionarity dostávame pre autonómne úlohy

$$K(\hat{x}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv \text{konšt na } I \tag{15.9}$$

pričom, ak je T voľné, tak konšt=0.
Pretože rovnice (15.8) a (15.9) platia pre každé $t \in I$, tak aj ich derivácie platia pre každé $t \in I$, t.j.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d^2L}{dt^2} = ... = 0,$$
$$\frac{dK}{dt} = \frac{d^2K}{dt^2} = ... = 0,$$

kde derivácie platia do takého rádu, do ktorého existujú derivácie. Tieto rovnosti predstavujú už spomínané podmienky vyššieho rádu.

Poznámka 1: Všimnime si, že v prípade Solowovho modelu z Príkladu 15.1, sme zo všetkých podmienok vyššieho rádu použili iba $\frac{dL}{dt} = 0$ na singulárnom intervale I, kde $L(x, \psi) = 0$. Naozaj, v tomto príklade bolo $L(x, \psi) = (\psi - 1)f(k) = 0$ na I, čo vzhľadom na predpoklady na f a skutočnosť, že nás zaujímalo iba kladné k, viedlo k

podmienke $\psi(t) = 1$. Preto podmienka $\frac{dL}{dt} = 0$ v našom príklade znamenala $\dot{\psi} = 0$. Dosadením hodnoty $\dot{\psi}$ z adjungovanej rovnice a hodnoty $\psi = 1$ do tejto podmienky sme dostali rovnicu (15.1), z ktorej s vypadlo a získaný vzťah (15.2) predstavoval nelineárnu rovnicu len s neznámou k. V našom príklade rovnica (15.2) mala jediné riešenie, ktoré sme označili k_z. To znamenalo, že na I bola stavová premenná rovná hodnote k_z, predstavujúcej magistrálu. Keďže stavová premenná bola na I konštantná, tak bola pravá strana stavovej diferenciálnej rovnice rovná nule (15.3), z čoho bolo možné nájsť hodnotu zlatého stredu (15.4), t.j. singulárneho riadenia na I. Uvedený postup sa dá zovšeobecniť - viď Úloha 15.5.

Poznámka 2: V prípade, že úloha je autonómna s diskontným faktorom, je výhodné použiť "current value" formuláciu PPM. Pre modifikáciu Solowovho modelu s účelovou funkciou v tvare $\int_0^T e^{-rt}(1-s)f(k)dt$ tak jedinými zmenami bude posunutie hodnoty magistrály na hodnotu spĺňajúcu podmienku $f'(k) = \delta + r$ a zmena adjungovanej rovnice na $\dot{\psi} = -(1-s)f'(k) - \psi(sf'(k) - \delta - r)$. Toto sa prejaví iba určitým posunom fázového portrétu pri syntéze optimálneho riadenia. Viď Úloha 15.4.

15.4 Syntéza optimálneho riadenia pre Solowov model

Naším cieľom je teraz ukázať, že optimálne riadenia v Solowovom modeli z odseku 15.1 môžu byť iba v tvare popísanom na konci odseku vzorcami (15.6) a (15.7). Využijeme pri tom, že stavová a adjungovaná funkcia sa správajú podľa

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k, \tag{15.10}$$

$$\dot{\psi} = -(1-s)f'(k) - \psi(sf'(k) - \delta), \tag{15.11}$$

kde podľa (15.4) je $s(t)$ po čiastkach konštantná funkcia nadobúdajúca iba hodnoty $0, 1, s_z$. To, ktorá z týchto troch hodnôt v danom čase t nastane, závisí od znamienka výrazu $\psi(t) - 1$.

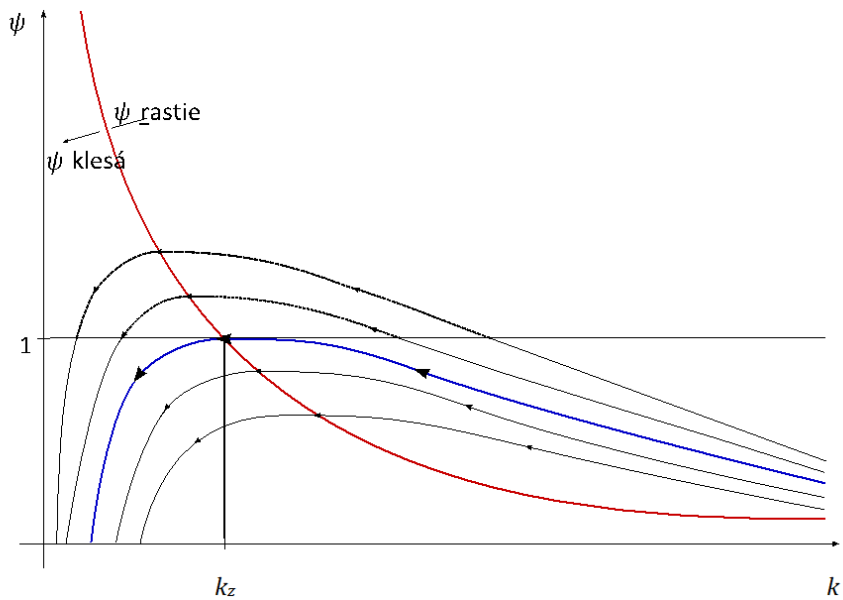
Na analýzu preto použijeme metódu syntézy jednotlivých fázových portrétov, odvodených zo systému (15.10)–(15.11) pre jednotlivé prípady ($s = 0$, $s = 1$ a $s = s_z$), do jedného spoločného portrétu. Z portrétu pre $s = 0$, vezmeme časť ležiacu v polrovine $\psi \leq 1$, z portrétu pre $s = 1$, vezmeme časť v polrovine $\psi \geq 1$. Priamka $\psi = 1$ bude čiarou prepnutia, kde bude možné prejsť z trajektórií jedného systému na druhý. Na tejto čiare hodnota $k = k_z$ predstavuje všetky trajektórie systému (15.10)–(15.11) pre $s = s_z$. Keďže nás zaujímajú iba kladné odozvy, stačí nám analýzu robiť v polpriestore $k > 0$.

Zakreslime najprv fázový portrét systému (15.10)–(15.11) v prípade $s = 0$, t.j. daný

systémom diferenciálnych rovníc:

$$\dot{k} = -\delta k,$$
$$\dot{\psi} = -f'(k) + \delta\psi.$$

Z prvej rovnice máme $\dot{k} \leq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$, z čoho vyplýva, že v polpriestore $k > 0$ hodnota k stále klesá. Z druhej rovnice máme $\dot{\psi} = 0 \Leftrightarrow \psi = \frac{f'(k)}{\delta}$, kde predpoklady kladené na f implikujú priebeh krivky $\psi = \frac{f'(k)}{\delta}$ vykreslený na Obr. 15.4 červenou čiarou. Zrejme nad touto čiarou ψ rastie a pod ňou klesá. Trajektórie potom majú priebeh naznačený na Obr. 15.4. Z tohoto portrétu nás najviac bude zaujímať časť ležiaca v polpriestore $\psi \leq 1$.

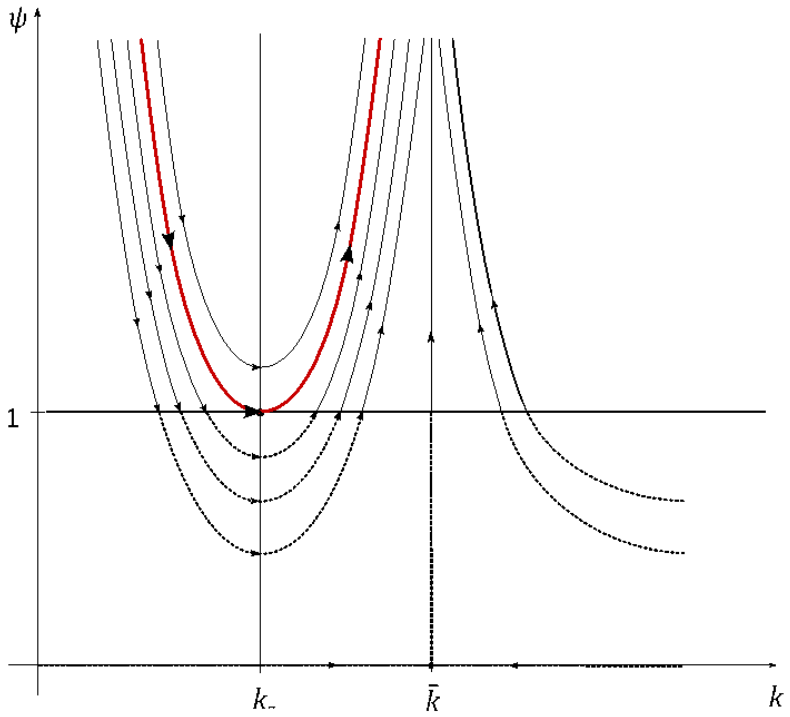


Obr. 15.4: Trajektórie systému (15.10)–(15.11) pre $s = 0$.

Analyzujme teraz fázový portrét systému (15.10)–(15.11) v prípade $s = 1$, t.j. daný systémom diferenciálnych rovníc:

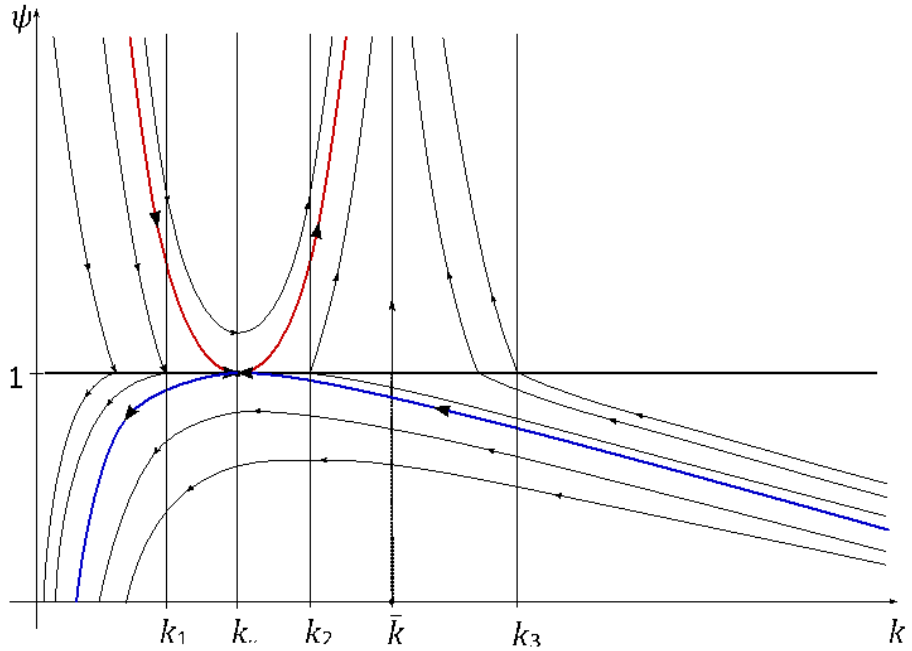
$$\dot{k} = f(k) - \delta k,$$
$$\dot{\psi} = -(f'(k) - \delta)\psi.$$

Z prvej rovnice máme $\dot{k} = 0 \Leftrightarrow f(k) = \delta k$, čo nastáva, vzhľadom na prepoklady kladené na f, práve v dvoch bodoch, a to v $k = 0$ a v $k = \bar{k}$, kde $\bar{k} > k_z$ (viď obr. 15.1). Z toho vyplýva, že naľavo od $k = \bar{k}$ hodnota k rastie a napravo klesá. Z druhej rovnice máme $\dot{\psi} = 0 \Leftrightarrow (f'(k) - \delta)\psi = 0$, čo nastáva práve vtedy, ak $\psi = 0$ alebo $k = k_z$. Z toho vyplýva, že naľavo od $k = k_z$ hodnota ψ klesá a napravo rastie. Máme dva



Obr. 15.5: Trajektórie systému (15.10)–(15.11) pre $s = 1$.

rovnovážne stavy $(0, 0)$ a $(\bar{k}, 0)$ typu sedlo. Trajektórie sú zobrazené na Obr. 15.5. Z tohoto portrétu nás najviac bude zaujímať časť ležiaca v polpriestore $\psi \geq 1$.
Spojením relevantných častí pre $\psi \leq 1$ resp. $\psi \geq 1$ oboch portrétov do jedného portrétu dostávame možný priebeh trajektórií zobrazený na Obr. 15.6. Tu hodnota $(k_z, 1)$ je hodnotou odpovedajúcou riadeniu rovnému zlatému stredu. Na Obr. 15.6 sú zobrazené trajktórie spĺňajúce podmienky PPM v Solowovom modeli bez ohľadu na zadanú počiatočnú a koncovú podmienku. Vzhľadom na Poznámku 3 z podkapitoly 13.2 o postačujúcosti PPM, optimálnymi budú pre našu úlohu tie trajektórie, ktoré spĺňajú počiatočnú podmienku $k(0) = k_0$ a podmienku transverzality $\psi(T) = 0$, kde k_0 a T sú dané hodnoty. To znamená, že ako optimálne riešenia pre našu úlohu prichádzajú do úvahy trajektórie fázového portrétu z Obr.15.6 začínajúce v $k = k_0$ a končiace v $\psi = 0$. Takýchto trajektórií je veľa, ktorá z nich to bude, a aký bude jej kvalitatívny priebeh bude závisieť od hodnoty T, ale aj od polohy k_o vzhľadom na k_z.



Obr. 15.6: Syntéza Obrázkov15.5.

Ak je $k_0 < k_z$, tak sa najprv pohybujeme po trajektóriách systému $s = 1$ a na konci po trajektóriách systému $s = 0$. Z jednej hodnoty na druhú možeme preskočiť najviac raz, a to práve na čiare prepnutia $\psi = 1$. Ak je T dostatočne veľké, tak dosiahneme rovnovážny stav $(k_z, 1)$ odpovedajúci zlatej hodnote s_z a prípadne v nej zotrváme. Ak je čas T príliš malý, tak prvá časť nenastáva a optimálnymi sú iba časti trajektórií systému $s = 0$.

Ak je $k_0 > k_z$, tak na začiatku aj konci sa pohybujeme po trajektóriách systému $s = 0$. Ak je hodnota T dostatočne veľká, tak dosiahneme rovnovážny stav $(k_z, 1)$ odpovedajúci zlatej hodnote s_z a prípadne v nej zotrváme. Zotrvávanie v rovnovážnom stave odpovedá singulárnemu úseku.

Vidíme potvrdenie hypotézy o postupnosti jednotlivých úsekov formulované na konci podkapitoly 15.1 prostredníctvom vzorcov (15.6)–(15.7) a Obr. 15.2 a 15.3. Zároveň vidíme, že pre každú kladnú hodnotu počiatočného stavu existuje jediná optimálna trajektória.

Takto získaný spoločný portrét umožňuje analyzovať úlohu nielen pre voľný koncový stav, ale aj pre ľubovoľne zadaný koniec - viď Úloha 15.3.

15.5 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 15.1. Nekonečne veľa optimálnych riadení. Uvažujme o úlohe

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^2 u(t)\,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = u(t),\\
&x(0) = 0,\\
&x(2) = 1,\\
&u(t) \in [0,1].
\end{aligned}$$

a) Ukážte, že úloha má nekonečne veľa optimálnych riadení, pričom každé prípustné riadenie je optimálne.
b) Ukážte, že každé optimálne riadenie (dokonca aj také riadenie, ktoré nadobúda iba krajné body intervalu $[0,1]$) je singulárne.

Úloha 15.2. Optimálne trajektórie v Príklade 15.1. Na Obr. 15.6 vyznačte trajektórie, odpovedajúce úlohe Solowovho modelu z Príkladu 15.1 (úloha s voľným koncom) v prípade malého T a veľkého T pre počiatočné hodnoty k_0 postupne rovné hodnotám k_1, k_2 a k_3 vyznačeným na obrázku. Ako sa s meniacim k_0 kvalitatívne mení správanie riadenia a odozvy?

Úloha 15.3. Solowov model s pevným koncom. Na Obr. 15.6 vyznačte trajektórie, odpovedajúce úlohe Solowovho modelu s pevným koncom $k(T) = k_T$ v prípade malého T a veľkého T. Ako sa kvalitatívne mení správanie pre počiatočné hodnoty k_0 postupne rovné hodnotám k_1, k_2 a k_3 vyznačeným na a pre hodnoty $k_T < k_Z$, $k_T = k_Z$, $k_T \in (k_Z, \bar{k})$, $k_T = \bar{k}$ a $k_T > \bar{k}$?

Úloha 15.4. Solowov model s diskontáciou. Analogicky ako sme v Príklade 15.1 kvalitatívne vyriešili Solowov model, vyriešte aj jeho modifikáciu, kde do účelovej funkcie vložíte diskontný faktor e^{-rt}. Použite pritom "current value"formuláciu PPM. Porovnajte tento model s Ramseyho modelom a nájdite vzťah medzi $c(t)$ a $s(t)$. Porovnajte hodnotu zlatého stredu a magistrály v takto modifikovanom Solowovom modeli s hodnotou rovnovážneho stavu v Ramseyho modeli.

Úloha 15.5. Zovšeobecnenie postupu zo Solowovho modelu. Majme nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}(F_1(x(t)) + F_2(x(t))u(t))\,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_1(x(t))u(t),\\
&x(0) = a,\\
&u(t) \in U,
\end{aligned}$$

kde F_1, F_2, f_1, f_2 sú dané hladké reálne funkcie, $T > 0$, $r > 0$ a a sú dané parametre, U je daný uzavretý interval a $x(T)$ je voľné.
a) Ukážte, že rovnica na určenie hodnoty magistrály je daná v tvare:

$$0 = -F_2'(x)f_2(x)f_1(x) + F_2(x)f_2'(x)f_1(x) + F_1'(x)f_2^2(x) - F_2(x)f_2(x)f_1'(x) + F_2(x)f_2(x)r.$$

b) Predpokladajme, že táto rovnica má len izolované riešenia. Aká je potom hodnota singulárneho riadenia u_z odpovedajúca hodnote jednému z izolovaných riešení x_z?

Úloha 15.6. Uvažujme nasledovnú úlohu optimálneho riadenia

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T x(t)^2 \,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x}(t) = u(t),\\
&x(0) = a,\\
&u \in [-1, 1],
\end{aligned}$$

kde $T > 0$ a a sú dané konštanty. (a) Nájdite pre túto úlohu hodnotu singulárneho riadenia a hodnotu jeho odozvy. (b) Pomocou syntézy príslušných fázových portrétov (v priestore x a ψ) analyzujte možné priebehy optimálneho riadenia a odozvy pre rozličné hodnoty a.

Úloha 15.7. Študentova dilema. Študent sa rozhoduje, akú časť svojho času by mal venovať štúdiu a akú časť zárobkovej činnosti (brigáde). Časť venovanú vzdelávaniu označme u. Brigáda mu pomôže zvýšiť aktuálny príjem, avšak vzdelávanie je investíciou zvyšujúcou príjem v budúcnosti. Úroveň vedomostí študenta x je okrem času stráveného štúdiom ovplyvňovaná aj mierou samozabúdania $\delta > 0$.
Túto úlohu možno sformulovať nasledovne:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T cx(1-u) \,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x} = u - \delta x,\\
&x(0) = 0,\\
&u \in [0, 1],
\end{aligned}$$

kde T, c a δ sú dané kladné konštanty. (a) Nájdite pre túto úlohu hodnotu singulárneho riadenia a hodnotu jeho odozvy. (b) Pomocou syntézy fázových portrétov (v priestore x a ψ) analyzujte priebehy optimálneho riadenia a odozvy pre rozličné hodnoty T. Kvôli jednoduchosti uvažujte $c = 1$ a $\delta = \frac{1}{2}$.

Úloha 15.8. Reklamný model.

Uvažujme nasledovnú úlohu optimálneho riadenia

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T (6x - u)\,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x} = u(1-x) - x,\\
&x(0) = a,\\
&u \in [0, 10],
\end{aligned}$$

kde $T > 0$ a $a \in [0, 1]$ sú dané konštanty.
a) Pomocou vety o porovnávaní riešení diferenciálnej rovnice ukážte, že hodnoty odozvy na prípustné riadenia pre uvedenú úlohu ležia v intervale $[0, 1]$.
b) Nájdite pre túto úlohu hodnotu singulárneho riadenia (zlatého stredu) a hodnotu jeho odozvy (magistrály).
c) Uvažujte modifikáciu tejto úlohy s diskontným faktorom e^{-t} v účelovej funkcii. Odvoďte hodnotu zlatého stredu a magistrály pre takto modifikovanú úlohu. Použite pri tom "current value"formuláciu PPM.
d) Pomocou fázových portrétov urobte (pre pôvodnú aj modifikovanú úlohu) syntézu optimálneho riadenia a vyznačte optimálne trajektórie v prípade malého T a veľkého T.
e) Obe úlohy sú špeciálnym prípadom určitého reklamného modelu, ktorý v literatúre nesie meno svojich autorov. Vyhľadajte na internete alebo v knižnici príslušný všeobecný model, zistite jeho presné pomenovanie, všeobecnú verziu, význam a ekonomickú interpretáciu jednotlivých premenných a parametrov. Návod: (Sethi Thomson)

Časť IV

Úlohy optimálneho riadenia s nekonečným časom

Kapitola 16

PPM pre úlohu na nekonečnom časovom horizonte

V tejto a nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať úlohami na nekonečnom časovom horizonte. Takéto úlohy sa využívajú hlavne v ekonomickom modelovaní.

16.1 Formulácia štandardnej úlohy

Pod štandardnou úlohou optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte budeme rozumieť úlohu (N)

$$\max J := \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t))dt, \tag{16.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, \infty), \tag{16.2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{16.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \in C, \tag{16.4}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, \infty). \tag{16.5}$$

Poznamenajme, že oproti úlohám na konečnom časovom horizonte žiadame, aby pre prípustné riadenie $\hat{u}(t)$ a jeho odozvu $\hat{x}(t)$ integrál $\int_0^\infty f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt$ konvergoval.

16.2 Pontrjaginov princíp maxima

Pre úlohy s konečným časom platil Pontryaginov princíp maxima ako nutná podmienka optimality. Sformulujme podobnú vetu pre úlohu (N) na nekonečnom časovom horizonte a dokážme ju pomocou Vety 6.1 sformulovanej pre úlohy s pevným časom.

Veta 16.1. Nutné podmienky, nekonečný horizont. *Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $x(t)$ jeho odozva pre (N). Potom existuje konštanta $\psi^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ také, že*

(i) $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0, \psi^0 \geq 0$

(ii) $\psi(t)$ *rieši adjungovanú rovnicu*

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \psi$$

(iii) pre každé $t \in [0, \infty)$ *je splnená podmienka maxima*

$$\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^T f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} (\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi^T f(t, \hat{x}(t), u)).$$

Poznámka: Všimnime si, že na rozdiel od formulácií Pontrjaginovho princípu maxima pre úlohy na konečnom časovom horizonte, Veta 16.1 negarantuje splnenie limitnej verzie podmienky transverzality (PT) ani podmienky stacionarity (PS).

Dôkaz. Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre úlohu (N). Zvoľme postupnosť $\{T_k\} \to \infty$, pričom $T_k > 0$. Pre každé T_k definujme nasledovnú úlohu optimálneho riadenia na konečnom časovom horozinte s pevným časom T_k a pevným koncom určeným hodnotou $\hat{x}(T_k)$, t.j. úlohu (K_{T_k})

$$\max \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t))dt \tag{16.6}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, T_k], \tag{16.7}$$

$$x(0) = x_0, \tag{16.8}$$

$$x(T) = \hat{x}(T_k), \tag{16.9}$$

$$u(t) \in U, \quad \forall\, t \in [0, T_k]. \tag{16.10}$$

Uvažujme teraz jedno ľubovoľne zvolené T_k. Je zrejmé, že zúženie riadenia $\hat{u}(t)$ a jeho odozvy na interval $[0, T_k]$, je optimálne riadenie a odozva pre (K_{T_k}) . Keby totiž neboli optimálne existovalo by iné prípustné riadenie $\tilde{u}(t)$ a jeho odozva $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T_k]$, pre (K_{T_k}), pre ktoré by platilo

$$\int_0^{T_k} f^0(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt > \int_0^{T_k} f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt. \tag{16.11}$$

Zostrojme riadenie

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & \text{ak } t \in [0, T_k] \\ \hat{u}(t), & \text{ak } t \in [T_k, \infty) \end{cases} \tag{16.12}$$

Jeho odozva bude mať tvar

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & \text{ak } t \in [0, T_k] \\ \hat{x}(t), & \text{ak } t \in [T_k, \infty) \end{cases} \tag{16.13}$$

Pretože koncová podmienka $\tilde{x}(T_k) = \hat{x}(T_k)$ na stavovú premennú nám zabezpečila, že akákoľvek odozva na prípustné riadenie sa musí dostať do bodu $\hat{x}(T_k)$ a ďalej sa musí

správať ako optimálne $\hat{x}(t)$. Zrejme teda $\tilde{u}(t),\ t \in [0,\infty)$ je prípustné riadenie pre úlohu (N) a pre hodnotu účelovej funkcie v tomto riadení platí

$$J(\tilde{u}) = \int_0^\infty f^0(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))dt = \int_0^{T_k} f^0(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))dt + \int_{T_k}^\infty f^0(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt >$$

$$> \int_0^{T_k} f^0(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt + \int_{T_k}^\infty f^0(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt = J(\hat{u}), \tag{16.14}$$

kde sme využili vzťah (16.11). Dostali sme, že $J(\tilde{u}) > J(\hat{u})$, čo je spor s predpokladom, že $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie pre úlohu (N). Teda musí platiť, že príslušné zúženie $\hat{u}(t)$ je optimálne aj pre úlohu (K_{T_k}). Z optimality $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$, kde $t \in [0,T_k]$, pre úlohu (K_{T_k}) vyplýva, že pre túto úlohu platí Pontrjaginov princíp maxima (Veta 6.1). To znamená, že existuje taká konštanta $\psi_k^0 \in \mathbb{R}$, a spojitá funkcia $\psi_k(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, že platia nasledovné podmienky

(i) $(\psi_k^0, \psi_k(t)) \neq 0, \quad \psi_k^0 \geq 0$

(ii) $\psi_k(t)$ rieši diferenciálnu rovnicu

$$\dot{\psi}_k(t) = -\psi_k^0 \left(\frac{\partial f^0(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T \psi_k(t)$$

(iii) pre každé $t \in [0,\infty)$, pre ktoré je $\hat{u}(t)$ spojitá platí

$$\psi^0 f^0(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) + \psi^T f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) =$$

$$= \max_{u\in U}[\psi^0 f^0(t,\hat{x}(t),u) + \psi^T f(t,\hat{x}(t),u)] \equiv \text{konšt.}$$

Poznamenávame, že indexom k označujeme príslušné funkcie a konštanty prislúchajúce k úlohe (K_{T_k}). Označme si $\psi_k(0) = A_k$. Z podmienky (i) vyplýva, že $(\psi_k^0, A_k) \neq 0$. Pretože podmienky Pontrjaginovho princípu maxima sú jednoznačné až na multiplikatívnu konštantu, môžme predpokladať, že $\|(\psi_k^0, A_k)\| = 1$. Z postupnosti $\{(\psi_k^0, A_k)\}$ je teda možné vybrať konvergentnú podpostupnosť (kvôli jednoduchosti ju budeme označovať rovnako ako pôvodnú), ktorá konverguje k nejakému $(\psi^0, A) \neq 0$. Všimnime si, že adjungované funkcie rozšírené o nultú zložku $(\psi_k^0, \psi_k(t))$ spĺňajú tú istú homogénnu lineérnu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^0 \end{pmatrix}, \tag{16.15}$$

ibaže pre každé k je to na inom intevale $[0,T_k]$ a s inou počiatočnou podmienkou

$$\begin{pmatrix} \psi_k(0) \\ \psi_k^0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k \\ \psi_k^0 \end{pmatrix}. \tag{16.16}$$

Označme $\Phi(t, t_0)$ fundamentálny systém riešení systému (16.15). Potom

$$\begin{pmatrix} \psi_k(t) \\ \psi_k^0 \end{pmatrix} = \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} A_k \cdot \\ \psi_k^0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T_k]. \tag{16.17}$$

Definujme funkciu

$$\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi^0 \end{pmatrix} := \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} A \\ \psi^0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty). \tag{16.18}$$

Zrejme takto definovaná adjungovaná funkcia je netriviálnym riešením (AR) pre každé $t \in [0, \infty)$. Navyše, vzhľadom na lineárnosť Hamilitonovej funkcie v premennej (ψ^0, ψ), zo splnenia podmienok

$$\psi_k^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi_k^T(t) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} [\psi_k^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi_k^T(t) f(t, \hat{x}(t), u)]$$

pre každé $t \in [0, T_k]$ dostávame, že pre každé $t \in [0, \infty)$ platí podmienka

$$\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^T(t) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} (\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi^T(t) f(t, \hat{x}(t), u)).$$

Tým je veta dokázaná.

□

Poznámka 1. Veta 16.1 vo všeobecnosti nedáva dostatok podmienok na určenie optimálneho riadenia, pretože chýba podmienka transverzality. Tento nedostatok Vety 16.1 sa však neprejaví v prípade úloh, kde množina C z podmienky (16.4) pozostáva z jediného bodu, t.j. úloha je s pevným koncom. Jednu takúto úlohu budeme riešiť neskôr v podkapitole 17.3.

Poznámka 2. Analogicky ako pre úlohy s konečným časom aj tu definujeme Hamiltonovu funkciu

$$H(t, x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi^T f(t, x, u)$$

a pomocou tejto funkcie možno zapísať aj adjungovanú rovnicu a podmienku maxima. V prípade, že je úloha autonómna, tak vynechávame t z množiny argumentov H, v prípade, že $\psi^0 = 1$, vynechávame aj ψ^0.

Poznámka 3. Všimnime si, že pri odvodzovaní nutných podmienok pre úlohu (N) na nekonečnom časovom horizonte z podmienok pre úlohu (K_{T_k}) s pevným časom, sme nikde neuvažovali podmienku stacionarity pre úlohu s pevným časom. Táto by podľa Poznámky 1 v Kapitole 6 mala pre úlohu (K_{T_k}) tvar

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi_k(t), \psi_k^0) = -\int_t^{T_k} \frac{\partial H(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s), \psi_k(s), \psi_k^0)}{\partial s} ds - \psi_k^{n+1}(T_k), \tag{16.19}$$

Aj v prípade, žeby sa nám podarilo zdôvodniť limitný prechod v integráli na pravej strane (16.19), nezískali by sme tým žiadnu užitočnú informáciu, pretože $\psi_k^{n+1}(T_k) = \chi_k^{n+1}$, kde χ_k^{n+1} sú neznáme konštanty. V nasledujúcej kapitole však použijeme iný prístup k odvodzovaniu nutných podmienok, kde základom budú určité úlohy síce s pevným koncom ale s voľným časom, kedy $\psi_k^{n+1}(T_k) = 0$. Pre autonómne úlohy (prípadne aj s diskontným faktorom) sa nám tak podarí vyvodiť limitnú podmienku stacionarity.

16.3 Poznámka o podmienke transverzality

Pretože tvrdenie Vety 16.1 sme dostali prevedením úlohy (N) na postupnosť úloh s pevným koncom, pre ktoré je podmienka transverzality prázdna, t.j. nedáva žiadnu informáciu o koncovom stave $\psi(T)$, vo Vete 16.1 sme nedostali žiadnu podmienku transverzality. Ako ukazuje nasledujúci príklad, táto podmienka vo všeobecnosti ani nemusí vždy platiť.

Príklad 16.1. Majme úlohu:

$$\max J := \int_0^\infty (1 - x(t))u(t)dt, \tag{16.20}$$

$$\dot{x}(t) = (1 - x(t))u(t), \tag{16.21}$$

$$x(0) = 0, \tag{16.22}$$

$$0 \leq u \leq 1. \tag{16.23}$$

Všimnime si, že $f = f^0$ a preto môžeme (16.20) napísať v tvare

$$J = \int_0^\infty \dot{x}dt = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0) = \lim_{t\to\infty} x(t) =: x(\infty)$$

teda optimálne riadenia budú tie, pre ktoré je $x(\infty)$ maximálne. Z rovníc (1.2.15) až (16.23) vidieť, že pre malé t je $x(t)$ rastúce a rastie pokiaľ $(1 - x(t)) > 0$.
Položme $u(t) \equiv 1$. Je zrejmé, že toto riadenie zabezpečuje najrýchlejší možný rast pre $x(t)$, ovšem iba pokiaľ $x(t)) < 1$. Vypočítajme odozvu pre toto riadenie. Z (16.21) dostaneme, že $\dot{x} = (1 - x)$ a teda z (16.22) vyplýva, že odozvou je $x(t) = 1 - e^{-t}$. Pre túto odozvu je $x(t) < 1$, pre každé $t \in [0, \infty)$, pričom

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Z toho vyplýva, že $u(t) \equiv 1$ je optimálme riadenie a maximálnou hodnotou účelovej funkcie je hodnota 1.
Všimnime si, že aj pre riadenie $u(t) \equiv \frac{1}{2}$ platí, že jeho odozva v limite sa blíži k 1. Skutočne

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(1 - x)$$

a teda $x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$ a znova dostaneme, že $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$. Z toho máme, že aj toto riadenieje optimálne.
Pozrime sa, ako to je s PPM. Hamiltonova funkcia má tvar

$$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(1 - x)u + \psi(1 - x)u = (1 - x)u(\psi^0 + \psi). \tag{16.24}$$

H je lineárnou funkciou premennej u a jej maximalizovaním cez $u \in [0, 1]$ dostaneme

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ak } (1 - x)(\psi^0 + \psi) > 0 \\ 0, & \text{ak } (1 - x)(\psi^0 + \psi) < 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } (1 - x)(\psi^0 + \psi) = 0 \end{cases} \tag{16.25}$$

Pretože $u(t) \equiv \frac{1}{2}$ je optimálne riadenie, spĺňa PPM a teda musí pre toto riadenie platiť $(1 - x(t))(\psi^0 + \psi(t)) = 0$ pre všetky $t \in [0, \infty)$. Z toho máme, že buď $(1 - x(t)) = 0$ alebo $(\psi^0 + \psi(t)) = 0$. Vieme , že $x(t) < 1$, pre všetky $t \in [0, \infty)$ z čoho vyplýva, že musí platiť druhá možnosť

$$\psi^0 + \psi(t) = 0 \tag{16.26}$$

pre všetky $t \in [0, \infty)$. Podľa podmienky (i) z vety 6 vieme, že jediným riešením rovnice (16.26) je

$$\psi^0 = 1 \quad \psi(t) \equiv -1.$$

Tým sme ukázali, že podmienka transverzality $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ nemusí vždy platiť.

Poznamenajme, že existujú predpoklady, za ktorých platí aj podmienka transverzality v tvare

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0.$$

Spomínané predpoklady sú však v takom tvare, že sa prakticky nedajú overiť a preto sa nimi nebudeme zaoberať. V ďalšej kapitole uvedieme jeden typ úloh, pre ktoré možno odvodiť aspoň určitú limitnú podmienku pre Hamiltonovu funkciu.

16.4 Postačujúce podmienky optimality

Rovnako, ako sme vo Vete 13.2 odvodili postačujúce podmienky optimality pre úlohu s konečným časom, možno odvodiť postačujúce podmienky optimality pre úlohu (N).

Veta 16.2. Postačujúce podmienky, nekonečný horizont. *Nech $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$ sú prípustné pre úlohu (N) a nech spolu s $\psi^0 = 1$, $\psi(t)$ spĺňajú nutné podmienky optimality dané Vetou 16.1. Nech pre každé ψ a t je funkcia*

$$H^0(t, x, \psi) := \max_{u\in U} H(t, x, u, \psi)$$

konkávna v premennej x a nech pre každé $x(t)$, ktoré je odozvou na nejaké prípustné riadenie $u(t)$ úlohy (N), je splnená nasledujúca limitná podmienka:

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t)(x(t) - \hat{x}(t)) \geq 0 \tag{16.27}$$

Potom $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie. Navyše, ak H^0 je rýdzokonkávna, tak $\hat{u}$ je jediné optimálne riadenie.

Dôkaz. Viď Úloha 16.1.

Vzhľadom na to, že Veta nedáva dostatok podmienok na určenie izolovaných riešení, nutné podmienky spĺňa často celé kontinuum kriviek. Pomocou podmienky (16.27) sa dá často ukázať, že spomedzi týchto riešení je optimálne to, ktoré konverguje k rovnovážnemu stavu. Budeme to vidieť v Kapitole 17.4

16.5 Riešenie úloh

Príklad 16.2. Optimálna spotreba s pevným koncom. Opäť sa budeme zaoberať úlohou o optimálnej spotrebe, tentoraz na nekonečnom časovom horizonte. To znamená, že budeme maximalizovať diskontovanú spotrebu v priebehu nekonečného časového intervalu

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} \ln c(t) dt, \tag{16.28}$$

keď máme danú zmenu kapitálu

$$\dot{k}(t) = ik(t) - c(t), \tag{16.29}$$

počiatočný stav kapitálu

$$k(0) = k_0 > 0 \tag{16.30}$$

a ďalej vieme, že kapitál musíme na konci spotrebovať

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0. \tag{16.31}$$

Vzhľadom na ln v účelovej funkcii implicitne predpokladáme, že v každom prípustnom (a teda aj v optimálnom) riadení je $c(t) > 0$. Na úlohu sa teda pozeráme ako na úlohu bez ohraničení na riadenie. Napíšeme nutné podmienky optimality v takomto optimálnom riadení, ktoré sú dané Vetou 16.1. Keďže pravá strana stavovej rovnice je lineárna v riadení c, môžeme podľa Poznámky 7.3(a) položiť $\psi^0 = 1$. Adjungovaná rovnica má potom tvar

$$\dot{\psi}(t) = -i\psi(t). \tag{16.32}$$

a Hamiltonova funkcia

$$H(k, c, \psi^0, \psi) = e^{-rt} \ln c + \psi(ik - c) \tag{16.33}$$

by mala v optimálnom $\hat{c}(t)$ pre každé $t \geq 0$ spĺňať podmienku maxima, z ktorej vyplýva, že

$$e^{-rt} \frac{1}{\hat{c}(t)} - \psi(t) = 0. \tag{16.34}$$

Vyriešením adjungovanej rovnice (16.32) dostaneme, že

$$\psi(t) = Ae^{-it}, \quad \text{kde } A \text{ je konštanta.} \tag{16.35}$$

Dosadením (16.35) do (16.34) dostaneme

$$\hat{c}(t) = \frac{1}{A} e^{(i-r)t}, \tag{16.36}$$

pričom zrejme $A > 0$. Ľahko sa dá ukázať, že v takomto riadení integrál v účelovej funkcii konverguje (viď. Úlohu ex:nekonecny.horizont.0). Ostáva určiť A. K tomu využijeme

skutočnosť, že odozva na riadenie $\hat{c}(t)$ a počiatočnú podmienku (16.30) musí spĺňať aj limitnú koncovú podmienku (16.30). Dosadíme vzťah (17.19) do rovnice (16.29)

$$\dot{k}(t) = ik(t) - \frac{1}{A}e^{(i-r)t}. \tag{16.37}$$

Túto diferenciálnu rovnicu riešime pomocou vzorca variácie konštánt. Dostaneme

$$k(t) = e^{it}k_0 - \frac{1}{A}\int_0^t e^{i(t-s)}e^{(i-r)s}ds = e^{it}k_0 - \frac{1}{A}e^{it}\int_0^t e^{-rs}ds.$$

Vypočítaním integrálu dostaneme konečný výsledok pre $k(t)$

$$\hat{k}(t) = e^{it}\left(k_0 - \frac{1}{Ar}(1 - e^{-rt})\right). \tag{16.38}$$

Ďalej má platiť koncová podmienka pre stavovú premennú

$$\lim_{t\to\infty} \hat{k}(t) = 0.$$

Aby naozaj platila, musí $k_0 - \frac{1}{Ar}(1 - e^{-rt})$ konvergovať k nule rýchlejšie, než rastie e^{it} do nekonečna. Nutnou podmienkou k tomu je, že v limite platí podmienka

$$\lim_{t\to\infty}\left(k_0 - \frac{1}{Ar}(1 - e^{-rt})\right) = 0. \tag{16.39}$$

Pretože $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0$, tak dostávame, že musí byť

$$A = \frac{1}{k_0 r}. \tag{16.40}$$

Keď dosadíme A do (16.38) dostaneme, že

$$\hat{k}(t) = k_0 e^{(i-r)t}. \tag{16.41}$$

Pretože tento vzťah sme dostali len z nutnej podmienky kovergencie $k(t)$ do nuly, musíme overiť, či je podmienka konvergencie naozaj splnená. Vidíme, že aby platila koncová podmienka pre stavovú premennú, musí byť $i < r$. Spotrebu určíme dosadením (16.40) do (17.19)

$$\hat{c}(t) = k_0 r e^{(i-r)t}. \tag{16.42}$$

Dostali sme teda, že ak $i < r$, tak úloha má jediného kandidáta na optimálne riešenie určeného spotrebou $\hat{c}(t)$ podľa (16.42) a jeho odozvou $\hat{k}(t)$ podľa (16.41). Ľahko sa dá dokázať (overením predpokladov Vety 16.2 - viď Úloha), že toto riadenie je aj optimálne. Pre $i \geq r$ žiadny kandidát a teda ani optimálne riadenie neexistuje.
Ukázali sme, že keď poznáme nielen počiatočnú ale aj koncovú podmienku na stavovú premennú, máme dostatok informácii na určenie optimálneho riešenia.

16.6 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 16.1. Dokážte Vetu 16.2. (Návod: Postupujte analogicky ako v dôkaze Vety 13.2.)

Úloha 16.2. Modifikujte Vetu 16.2 pre minimalizačnú úlohu.

Úloha 16.3. Ukážte pre úlohu o optimálnej spotrebe z Príkladu 16.2, že
(a) ak je $c(t)$ dané vzťahom (17.19), tak integrál v účelovej funkcii (16.28) konverguje;
(b) ak je $\hat{k}(t)$ dané vzťahom (16.41), tak v každom prípustnom $k(t)$ je splnená podmienka (16.27).
Overte aj ostatné podmienky Vety 16.2 a urobte záver o optimalite $\hat{c}(t)$.

Úloha 16.4. Úloha na nekonečnom časovom horizonte. Nájdite optimálne riešenie (riadenie aj odozvu) pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-rt} u^2 \, \mathrm{d}t, \\
&\dot{x} = x + u, \\
&x(0) = x_0 > 0 \text{ dané}, \\
&\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,
\end{aligned}$$

kde $r > 0$ je daný parameter.

Kapitola 17

Nutné podmienky pre autonómnu úlohu s diskontným faktorom

17.1 Úlohy s diskontným faktorom

Ako sme uviedli v predchádzajúcej kapitole, Veta 16.1 nedáva dostatok podmienok na určenie optimálneho riadenia pre úlohy s voľným koncovým stavom. V tejto kapitole sa budeme zaoberať špeciálnym typom úloh s voľným koncom, pre ktoré budeme vedieť odvodiť ďalšiu podmienku, do určitej miery nahrádzajúcu chýbajúcu podmienku transverzality. Pôjde o úlohy autonómne, až na diskontný faktor v účelovej funkcii (podobné úlohy, ale na konečnom časovom horizonte sme analyzovali v časti 7.1).
Štandardný tvar takejto úlohy s diskontným faktorom (DN) bude

$$\max J := \int_0^\infty e^{-rt} F(x(t), u(t))dt \tag{17.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, \infty), \tag{17.2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{17.3}$$

$$u(t) \in U, \quad \forall\, t \in [0, \infty). \tag{17.4}$$

Pre túto úlohu je Hamiltonián definovaný štandartne ako

$$H(t, x, u, \psi, \psi^0) = \psi^0 e^{-rt} F(x, u) + \psi^T f(x, u).$$

Všimnime si, že

$$\frac{\partial H(t, x, u, \psi, \psi^0)}{\partial t} = -r\psi^0 e^{-rt} F(x, u). \tag{17.5}$$

17.2 Limitná podmienka Hamiltoniánu

Pre túto úlohu platia nasledovné nutné podmienky optimality.

Veta 17.1 (Nutné podmienky pre úlohu s diskontným faktorom)**.** *Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre (DN). Potom existujú konštanta $\psi^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ také, že platí*

(i) $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0, \quad \psi^0 \geq 0$

(ii) $\psi(t)$ rieši adjungovanú rovnicu

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 e^{-rt} \left(\frac{\partial F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \psi(t)$$

(iii) pre každé $t \in [0, \infty)$ platí podmienka maxima

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = \max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u, \psi(t), \psi^0),$$

a podmienka stacionarity

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = r\psi^0 \int_t^\infty e^{-rs} F(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds.$$

Dôsledok 17.1 (Limitná podmienka Hamiltoniánu.)**.**

$$\lim_{t \to \infty} H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi) = 0.$$

Dôkaz Vety 17.1. Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva pre (DN), kde $t \in [0, \infty)$. Zvolme si postupnosť $\{T_k\}$, kde $T_k > 0$ a $T_k \to \infty$. Pre každé T_k si zadefinujme nasledovnú neatonómnu Bolzovu úlohu s voľným časom a s pevným koncom určeným bodom $\hat{x}(T_k)$ pre zvolené T_k. Úlohu označíme (BK_{T_k})

$$\max J := \int_0^T e^{-rt} F(x(t), u(t)) dt + \varphi(T - T_k), \quad T - \text{voľné}, \tag{17.6}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{17.7}$$

$$x(0) = x_0, \tag{17.8}$$

$$x(T) = \hat{x}(T_k), \tag{17.9}$$

$$u(t) \in U, \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{17.10}$$

kde

$$\varphi(\tau) = e^{-r\tau} \int_{T_k}^\infty e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt. \tag{17.11}$$

Všimnime si, že funkcia $\varphi(\tau)$ je dobre definovaná $R \to R$ vďaka podmienke konvergencie integralu v prípustnom riadení.
Najprv sporom ukážeme, že $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ pre $t \in [0, \hat{T}]$, kde $\hat{T} = T_k$, je optimálne riešenie aj pre úlohu (BK_{T_k}). Teda predpokladajme, že by $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ neboli optimálne pre

úlohu (BK_{T_k}). Potom by muselo existovať iné prípustné riadenie $\tilde{u}(t)$ a odozva $\tilde{x}(t)$ pre $t \in [0, \tilde{T}]$, kde $\tilde{T} > 0$, ktoré by dávalo väčšiu hodnotu účelovej funkcie ako $\hat{u}(t), \hat{x}(t)$ pre $t \in [0, T_k]$. To znamená, že

$$J(\tilde{u}) = \int_0^{\tilde{T}} e^{-rt} F(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt + e^{-r(\tilde{T}-T_k)} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt >$$

$$> \int_0^{T_k} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + e^{-r(T_k-T_k)} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt. \tag{17.12}$$

Pravá strana nerovnosti (17.12) je vlastne

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt.$$

Úpravou ľavej strany nerovnosti (17.12) použitím substitúcie $s = t + \tilde{T} - T_k$ dostaneme

$$\int_0^{\tilde{T}} e^{-rt} F(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt + \int_{\tilde{T}}^{\infty} e^{-rs} F(\hat{x}(s - \tilde{T} + T_k), \hat{u}(s - \tilde{T} + T_k))ds. \tag{17.13}$$

Dosadením (17.13) do (17.12) máme

$$\int_0^{\tilde{T}} e^{-rt} F(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt + \int_{\tilde{T}}^{\infty} e^{-rs} F(\hat{x}(s - \tilde{T} + T_k), \hat{u}(s - \tilde{T} + T_k))ds >$$

$$> \int_0^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt = J(\hat{u}). \tag{17.14}$$

Zostrojme riadenie $\tilde{u}(t)$

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & \text{ak } t \in [0, \tilde{T}] \\ \hat{u}(t - \tilde{T} + T_k), & \text{ak } t \in [\tilde{T}, \infty) \end{cases}.$$

Odozvou pre takéto riadenie bude

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & \text{ak } t \in [0, \tilde{T}] \\ \hat{x}(t - \tilde{T} + T_k), & \text{ak } t \in [\tilde{T}, \infty) \end{cases}.$$

Je to prípustné riadenie a podľa (17.14) dáva väčšiu hodnotu účelovej funkcie J ako optimálne riadenie $\hat{u}(t)$ pre úlohu (DN), čím dostávame spor. Z toho vyplýva, že $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$ a T_k musia byť optimálne aj pre (BK_{T_k}).
Môžeme teda na túto úlohu aplikovať Pontrjaginov princíp maxima. Úloha (BK_{T_k}) je neautonómnou Bolzovou úlohou optimálneho riadenia, kde funkcia φ je tiež neautonómna a závisí iba od koncového času. Na takéto úlohy sa vzťahuje výsledok Úlohy 10.6, podľa ktorého okrem štandardných podmienok PPM príslušná Hamiltonova funkcia spĺňa vzťah (10.2)), t.j.

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = -\int_t^{\hat{T}} \frac{\partial H(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s), \psi(s), \psi^0)}{\partial s} ds - \psi^0 \varphi_T(\hat{T}, x(\hat{T})).$$

pre každé $t \in [0, \hat{T}]$. Ak pre našu úlohu (BK_{T_k}) s optimálnym časom $\hat{T} = T_k$ označíme ψ_k, ψ_k^0 príslušnú adjungovanú funkciu, tak dostaneme

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi_k(t), \psi_k^0) = -\int_t^{T_k} \frac{\partial H(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s), \psi_k(s), \psi_k^0)}{\partial s} ds - \psi^0 \varphi_T(T - T_k)|_{T=T_k} \tag{17.15}$$

Použitím vzťahu (17.11), ktorý definuje funkciu φ dostaneme ze

$$\psi_k^0 \frac{\partial \varphi(T - T_k)}{\partial T}\bigg|_{T=T_k} = \psi_k^0 \left(\frac{\partial e^{-r(T-T_k)}}{\partial T} \right)_{T=T_k} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt =$$

$$= -\psi_k^0 r e^{-r(T_k - T_k)} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = -\psi_k^0 r \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt. \tag{17.16}$$

Na druhej strane, pre deriváciu Hamiltonovej funkcie podľa t dostávame

$$\frac{\partial H(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s), \psi(s), \psi^0)}{\partial s} = -\psi_k^0 r e^{-rs} F(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds$$

Dosadíme to do rovnice (17.15) a dostaneme

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi_k(t), \psi_k^0) = \psi_k^0 \int_t^{T_k} r e^{-rs} F(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds + r\psi_k^0 \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt =$$

$$= r\psi_k^0 \int_t^{\infty} e^{-rs} F(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds. \tag{17.17}$$

Existenciu konštanty ψ^0 a funkcie $\psi(t)$ zo znenia vety teraz dostaneme limitným prechodom analogicky ako v predchádzajúcej vete. Zo vzťahu (17.17) dostaneme v limite pre $k \to \infty$

$$H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = r\psi^0 \int_t^{\infty} e^{-rs} F(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds,$$

čím je veta dokázaná. □

Veta 17.1 sa vzťahuje k úlohám s diskontným faktorom. V Kapitole 15 sme uviedli substitúciu, pomocou ktorej sme pre autonómne úlohy s diskontáciou odvodili autonómne nutné podmienky optimality. Tú istú substitúciu môžeme použiť aj v prípade úloh na nekonečnom časovom horizonte a Veta 17.1 v termínoch okamžitej adjungovanej premennej $\tilde{\psi}$ a Hamiltoniánu okamžitej hodnoty definovaného vzťahom

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}, \psi^0) = \psi^0 F(x, u) + \tilde{\psi}^T f(x, u).$$

by potom znela nasledovne:

Veta 17.2. *Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre (DN). Potom existujú konštanta $\psi^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $\tilde{\psi}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ také, že platí*

(i) $(\psi^0, \tilde{\psi}(t)) \neq 0, \quad \psi^0 \geq 0$

(ii) $\tilde{\psi}(t)$ *rieši adjungovanú rovnicu*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = r\tilde{\psi}(t) - \psi^0 \left(\frac{\partial F(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T \tilde{\psi}(t)$$

(iii) pre každé $t \in [0, \infty)$ *platí podmienka maxima*

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}(t), \psi^0) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u, \tilde{\psi}(t), \psi^0),$$

a podmienka stacionarity

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}(t), \psi^0) = r\psi^0 \int_t^\infty e^{(t-s)r} F(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds.$$

Dôsledok 17.2 (Limitná podmienka Hamiltoniánu)**.** *Nech* $\hat{u}(t), \hat{x}(t), \tilde{\psi}(t), \psi^0$ *sú určené Vetou 17.2. Potom pre Hamiltonián súčasnej hodnoty platí nasledujúca limitná podmienka*

$$lim_{t \to \infty} e^{-rt} \mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{\psi}(t), \psi^0) = 0.$$

17.3 Riešenie úloh

Príklad 17.1. Optimálna spotreba s voľným koncom. Opäť sa budeme zaoberať úlohou o optimálnej spotrebe na nekonečnom časovom horizonte, ale uvoľníme podmienku na koncový stav. To znamená, že budeme riešiť

$$\begin{aligned} &\max \int_0^\infty e^{-rt} \ln(c(t))\, dt, \\ &\dot{k}(t) = ik(t) - c(t), \\ &k(0) = k_0 > 0, \\ &\lim_{t \to \infty} k(t) \geq 0. \end{aligned} \tag{17.18}$$

To znamená, že riešime tú istú úlohu ako v Príklade 16.2, iba podmienku (16.31) sme nahradili slabšou (17.18). Takéto uvoľnenie koncovej podmienky spôsobuje, že Veta 16.1 nedáva dostatok podmienok na určenie izolovaných riešení. Uvidíme, ako nám v tejto situácii pomôže hlavný výsledok odvodený v tejto časti Dôsledok 17.1.
Je zrejmé, že aj pre túto úlohu je platné celé odvodzovanie z riešenia Príkladu 16.2 až po moment, kedy sme využili limitnú podmienku (16.31). To znamená, že aj v tomto pripade sú riadenie, odozva a adjungovaná funkcia dané vzťahmi

$$\hat{c}(t) = \frac{1}{A} e^{(i-r)t}, \quad \hat{k}(t) = e^{it} \left(k_0 - \frac{1}{Ar}(1 - e^{-rt})\right), \quad \psi(t) = Ae^{-it} \tag{17.19}$$

kde $A > 0$ je zatiaľ neznáma konštanta. V Príklade 16.2 sme ju určili z (16.31), v tomto prípade použijeme Dôsledok 17.1.
Počítajme

$$\begin{aligned} H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi) &= e^{-rt} \ln \hat{c}(t) + \psi(t) i \hat{k}(t) - \psi(t)\hat{c}(t) \\ = e^{-rt} \ln \left(\frac{1}{A} e^{(i-r)t} \right) &+ A e^{-it} i e^{it} \left(k_0 - \frac{1}{Ar}(1 - e^{-rt}) \right) - A e^{-it} \frac{1}{A} e^{(i-r)t} \\ &= e^{-rt} \ln \left(\frac{1}{A} e^{(i-r)t} \right) + Aik_0 - \frac{i}{r}(1 - e^{-rt}) - e^{-rt} \\ &= e^{-rt} \ln \frac{1}{A} + e^{-rt}(i-r)t + Aik_0 - \frac{i}{r} + (\frac{i}{r} - 1)e^{-rt}. \end{aligned} \tag{17.20}$$

Vidime, že výraz na pravej strane (17.20) obsahuje päť sčítancov, z ktorých prvý, druhý, a piaty konvergujú do nuly pre $t \to \infty$. Z toho vyplýva, že limitná podmienka Hamiltoniánu dáva, že súčet tretieho a štvrtého sčítanca má byť nulový, čo znamená, že

$$A = \frac{1}{k_0 r}, \tag{17.21}$$

čo je rovnaká podmienka, ako nám vyšla pre úlohu s pevným koncom (pozri (16.40)). Po dosadení A do (17.19) dostávame

$$\hat{c}(t) = k_0 r e^{(i-r)t}, \quad \hat{k}(t) = k_0 e^{(i-r)t}, \quad \psi(t) = \frac{1}{k_0 r} e^{-it}. \tag{17.22}$$

Vidíme, že takéto $\hat{c}(t)$ a $\hat{k}(t)$ je prípustné pre túto úlohu (pre akúkoľvek kombináciu parametrov r a i!), a teda je jediným kandidátom na optimálne riešenie.
Ostáva overiť postačujúcosť. Je zrejmé, že v tejto úlohe je príslušná funkcia $H^0(x, \psi)$ konkávna v x, tak stačí overiť, že pre každé prípustné $k(t)$ je splnená podmienka

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t)(k(t) - \hat{k}(t)) \geq 0. \tag{17.23}$$

Dosadením (17.22) do (17.23) dostávame:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{k_0 r} e^{-it}(k(t) - k_0 e^{(i-r)t}) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{k_0 r} e^{-it} k(t) - \frac{1}{r} e^{-rt} \right) \geq 0, \tag{17.24}$$

pričom posledná nerovnosť platí vďaka podmienke (17.18), ktorú musí splňať každé prípustné $k(t)$.

Príklad 17.2. Lineárno kvadratická úloha. Úlohou bude

$$\min J := \int_0^\infty e^{-rt} \left(\frac{u^2}{2} - xu + \frac{x^2}{2} \right) dt, \tag{17.25}$$

$$\dot{x} = u, \tag{17.26}$$

$$x(0) = x_0, \tag{17.27}$$

kde $r > 0$ a x_0 sú konštanty. Je to minimalizačná autonómna úloha s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte. Pre stavovú premennú x máme danú len počiatočnú podmienku a riadenie u nie je ohraničené.
Všimnime si, že účelovú funkciu, vieme prepísať do tvaru

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-rt}(u-x)^2 dt \geq 0 \tag{17.28}$$

a teda riadenie a jeho odozva dané vzťahom $\hat{u}(t) = \hat{x}(t) = x_0 e^t$ sú pre túto úlohu optimálne. Pozrime sa, akých kandidátov na optimálne riešenie dostaneme z nutných podmienok optimality pre túto úlohu (zrejme medzi nimi bude aj práve určené optimálne riadenie).
Napíšme najprv Hamiltonovu funkciu v tvare okamžitej hodnoty:

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,\psi^0,) = \psi^0(\frac{u^2}{2} - xu + \frac{x^2}{2}) + \psi u = \psi^0\frac{(u-x)^2}{2} + \psi u, \tag{17.29}$$

pritom pod ψ budeme rozumieť okamžitú hodnotu adjungovanej premennej. Keďže ide o minimalizačnú úlohu bez ohraničení na riadenie s lineárnou diferenciálnou rovnicou, môžeme položiť $\psi^0 = -1$. V optimálnom riešení spĺňa Hamiltonova funkcia podmienku maxima, ktorá implikuje

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0. \tag{17.30}$$

Dosaďme teda (17.29) do (17.30) a dostaneme

$$-(u-x) + \psi = 0 \tag{17.31}$$

a teda

$$\psi = u - x. \tag{17.32}$$

Pozrime sa na adjungovanú rovnicu, ktorá využitím faktu, že $\psi^0 = -1$ a dosadení m rovnice (17.32) nadobúda tvar

$$\dot{\psi} = r\psi - (u-x) = (r-1)\psi. \tag{17.33}$$

Z (17.32) vidieť, že $u = \psi + x$, čo môžme dosadiť do (17.26) a následne spolu s (17.33) dostávame homogénny systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \psi, \\ \dot{\psi} &= (r-1)\psi. \end{aligned} \tag{17.34}$$

Riešením tohoto systému pre počiatočnú podmienku (17.27) je

$$\begin{aligned} \psi(t) &= (r-2)Ae^{(r-1)t}, \\ \hat{x}(t) &= Ae^{(r-1)t} + (x_0 - A)e^t, \end{aligned} \tag{17.35}$$

kde A je zatiaľ neurčená konštanta. Tvar riadenia $\hat{u}(t)$ zistíme z (17.26), pretože

$$\hat{u} = \dot{\hat{x}} = A(r-1)e^{(r-1)t} + (x_0 - A)e^t. \tag{17.36}$$

Aby boli riadenie $\hat{u}(t)$ a odozva $x(t)$ prípustné, musí v nich (navyše od úloh na konečnom časovom horizonte) integrál (17.25) konvergovať. To znamená, že musí existovať konečná limita funkcie $F(T)$ pre T idúce do nekonečna, kde

$$F(T) = \int_0^T e^{-rt} F(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt.$$

Pozrime sa na tento integrál. Môžme ho upraviť

$$F(T) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}(\hat{u} - \hat{x})^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt} A^2 e^{2(r-1)t}(r-2)^2 dt. \tag{17.37}$$

Vyčíslením integrálu dostaneme

$$F(T) = \frac{1}{2}A^2(r-2)[e^{(r-2)T} - 1] = \frac{1}{2}A^2(r-2) - \frac{1}{2}A^2(r-2)e^{(r-2)T}. \tag{17.38}$$

Nás zaujíma funkcia $F(T)$ v limite pre T idúce do nekonečna

$$\lim_{T\to\infty} F(T) = \frac{1}{2}A^2(r-2) - \frac{1}{2}A^2(r-2)\lim_{T\to\infty} e^{(r-2)T}. \tag{17.39}$$

Z rovnice (17.39) môžeme vidieť, že ak $r \leq 2$, tak $F(T)$ konverguje pre ľubovoľnú konštantu A a ak $r > 2$, musí byť $A = 0$. Všimnime si, že ak by bolo $r = 2$, tak z rovnice (17.35) dostaneme, že

$$\hat{x}(t) = x_0 e^t. \tag{17.40}$$

Riadenie by v tomto prípade malo ten istý tvar ako jeho odozva

$$\hat{u}(t) = x_0 e^t \tag{17.41}$$

a po dosadení do účelovej funkcii by sme dostali $f^0(\hat{x}, \hat{u}) = 0$ a teda $J = 0$. Máme teda:

$$\text{ak } r \geq 2, \text{ tak } \hat{x}(t) = \hat{u}(t) = x_0 e^t, \quad \psi(t) = 0, \quad J = 0.$$

Keďže $\psi(t) = 0$, ľahko vidieť, že sú splnené aj postačujúce podmienky optimality. Vidíme teda, že v prípade $r \geq 2$ teória umožňuje jednoznačne identifikovať optimálne riadenie. Zložitejšie to bude v prípade $0 < r < 2$.
V prípade $0 < r < 2$ totiž potrebujeme špecifikovať hodnotu konštanty A. K tomu využijeme Dôsledok 17.2. Počítajme

$$e^{-rt}\mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, \psi, \psi^0) = -\psi^0 \frac{(u-x)^2}{2} + \psi u \tag{17.42}$$

Dosadením riadenia (17.36) a jeho odozvy (17.35) do Hamiltonovej funkcie dostaneme na pravej strane rovnice (17.42) výraz

$$e^{-rt}\left[+\frac{1}{2}(A(r-1)e^{(r-1)t}+(x_0-A)e^t)^2-(Ae^{(r-1)t}+(x_0-A)e^t)^2\right],$$

ktorý môžeme upraviť do tvaru

$$A^2\frac{(r-2)r}{2}e^{(r-2)t}+A(x_0-A)(r-2). \tag{17.43}$$

Limitná podmienka Hamiltoniánu teraz implikuje, že

$$A(x_0-A)(r-2)=0.$$

Keďže rozoberáme prípad $0<r<2$, dostaneme tu dve možnosti, buď $A=0$ alebo $A=x_0$. Pre $A=0$ je opäť

$$\hat{x}(t)=\hat{u}(t)=x_0e^t, \quad \psi(t)=0, \quad J=0. \tag{17.44}$$

Toto riešenie je optimálne, keďže sa dá ľahko overiť, že spĺňa postačujúce podmienky optimality. Na druhej strane, pre $A=x_0$ dostaneme

$$\hat{x}(t)=x_0e^{(r-1)t}, \quad \hat{u}(t)=x_0(r-1)e^{(r-1)t}, \quad \psi(t)=(r-2)x_0e^{(r-1)t}. \tag{17.45}$$

Riešenie (17.45) však nie je optimálne, keďže

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-rt}x_0^2(r-2)^2e^{2(r-1)t}dt=-\frac{1}{2}x_0^2(r-2)>0.$$

17.4 Ramseyho model na nekonečnom horizonte

V tejto časti nadviažeme na analýzu Ramseyho modelu v časti 9.1, kde sme sa zamerali na riešenie modelu na konečnom časovom horizonte a rozšírime ho na nekonečný časový horizont.
Ramseyho model na nekonečnom horizonte môžeme sformulovať nasledovne:

$$\max\int_0^\infty e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))dt \tag{17.46}$$

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-\delta k(t)-c(t), \quad \forall\ t\geq 0, \tag{17.47}$$

$$k(0)=k_0, \tag{17.48}$$

$$\lim_{t\to\infty}k(t)\geq 0. \tag{17.49}$$

Všimnime si, že oproti pôvodnej formulácii na konečnom časovom horizonte (9.1) – (9.4) sa zmenila koncová podmienka, a to z podmienky na pevný koniec na podmienku nezápornosti kapitálu v limite.

Pripomeňme, že nutné podmienky na konečnom časovom horizonte viedli na systém diferenciálnych rovníc

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - c, \tag{17.50}$$

$$\dot{c} = \frac{\mathrm{U}'(c)}{\mathrm{U}''(c)}[r + \delta - f'(k)]. \tag{17.51}$$

Fázový portrét tohto systému je znázornený na Obr. 9.1. Uvedený systém má stacionárny bod $(\hat{k}, \hat{c})$ typu sedlo, ktorého obidve zložky sú kladné.
Pripomeňme, že v prípade úloh na nekonečnom horizonte je dodatočnou podmienkou na prípustnosť riešení konvergencia integrálu v účelovej funkcii. Ukážeme, že v našom prípade je táto podmienka splnená, a to práve vďaka ohraničeniu (17.49). Všimnime si totiž, že všetky trajektórie, pozdĺž ktorých je od istého času hodnota kapitálu klesajúca (t.j. trajektórie ležiace nad stabilnou sedlovou cestou) dosiahnu v konečnom čase zápornú hodnotu kapitálu a preto nespĺňajú podmienku (17.49), sú teda neprípustné. Na druhej strane, vo všetkých ostatných trajektóriách je spotreba ohraničená zhora, čo spolu s diskontným faktorom zabezpečuje konvergenciu integrálu v účelovej funkcii. Teraz ukážeme, že jediným optimálnym riešením úlohy (17.46) – (17.49) je riešenie konvergujúce pozdĺž stabilnej sedlovej cesty do stacionárneho bodu $(\hat{k}, \hat{c})$.
Ak označíme

$$J(c) = \int_0^\infty e^{-rt}\mathrm{U}(c(t))dt,$$

potom musíme ukázať, že pre ľubovoľné prípustné riadenie $\tilde{c}(t)$, ktoré je rôzne od riadenia $c^*(t)$ aspoň na nejakom netriviálnom intervale, platí $J(\tilde{c}) < J(c^*)$. Odozvu prislúchajúcu k tomuto riadeniu označme $\tilde{k}(t)$. Využitím definície Hamiltonovej funkcie máme

$$J(\tilde{c}) - J(c^*) = \int_0^\infty e^{-rt}[\mathrm{U}(\tilde{c}(t)) - \mathrm{U}(c^*(t))]dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{ H(\tilde{k}, \tilde{c}, \psi) - H(k^*, c^*, \psi) - \psi(\dot{\tilde{k}} - \dot{k}^*) \right\} dt. \tag{17.52}$$

Platí

$$H(\tilde{k}, \tilde{c}, \psi) - H(k^*, c^*, \psi) \leq \max_c H(\tilde{k}, c, \psi) - H(k^*, c^*, \psi).$$

Keďže Hamitlonova funkcia H je separovaná v premenných k a c (t.j. možno ju zapísať v tvare $H_1(k, c, \psi) + H_2(k, c, \psi)$, tak platí

$$\max_c H(\tilde{k}, c, \psi) = H(\tilde{k}, c^*, \psi),$$

preto

$$H(\tilde{k}, \tilde{c}, \psi) - H(k^*, c^*, \psi) \leq H(\tilde{k}, c^*, \psi) - H(k^*, c^*, \psi).$$

S využitím rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie Ďalej využijeme, že Hamiltonova funkcia je diferencovateľná a rýdzokonkávna v premennej k pre ľubovoľné prípustné c

a pre ψ, ktoré spolu s (k^*, c^*) spĺňa nutné podmienky PPM. Vďaka tomu platí

$$H(\tilde{k}, c^*, \psi) - H(k^*, c^*, \psi) < \frac{\partial H(k^*, c^*, \psi)}{\partial k}(\tilde{k} - k^*) = -\psi(\tilde{k} - k^*), \tag{17.53}$$

pričom posledná rovnosť vyplýva z adjungovanej rovnice. Dosadením (17.53) do (17.52) dostaneme

$$\begin{aligned} J(\tilde{c}) - J(c^*) &< \int_0^\infty -\psi(\tilde{k} - k^*) - \psi(\dot{\tilde{k}} - \dot{k}^*)\, dt \\ = \int_0^\infty \tfrac{d}{dt}\Big[-\psi(\tilde{k} - k^*)\Big]\, dt &= -\lim_{t\to\infty} \psi(t)(\tilde{k}(t) - k(t)^*), \end{aligned} \tag{17.54}$$

pretože pre ľubovoľné $\tilde{k}$ platí $\tilde{k}(0) = k_0$. Naším cieľom je teda ukázať, že pre každé $\tilde{k}(t)$ prislúchajúce k nejakému prípustnému riadeniu $\tilde{c}(t)$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t)(\tilde{k}(t) - k(t)^*) \geq 0. \tag{17.55}$$

S využitím podmienky maxima možno túto podmienku prepísať do tvaru

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt} U(c^*(t)(\tilde{k}(t) - k(t)^*) \geq 0. \tag{17.56}$$

Pretože $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0$, stačí dokázať, že výraz $U(c^*(t))(\tilde{k}(t) - k^*(t))$ je od nejakého τ počnúc zdola ohraničený. Keďže podľa predpokladu $c^*(t)$ konverguje ku kladnej hodnote $\hat{c}$, funkcia $\mathrm{U}(c^*(t))$ je od istej hodnoty τ ohraničená. Zároveň vieme, že pre každé $t \geq 0$ je $\tilde{k}(t)$ kladná, a teda výraz $\tilde{k}(t) - k^*(t)$ je pre odozvu $\tilde{k}(t)$ pre ľubovoľné prípustné riadenie zdola ohraničený (vďaka ohraničenosti funkcie $k^*(t)$ zhora, ktorá vyplýva z konvergencie funkcie $k^*(t)$ do bodu $\hat{k}$). Tým je nerovnosť (17.56) Jednoznačnosť optimálneho riadenia $c^*(t)$ vyplýva z ostrej nerovnosti vo vzťahu (17.54), ktorú sme dostali vďaka rýdzokonkávnosti Hamiltonovej funkcie H v premennej k.

17.5 Úlohy na samostatné riešenie

Úloha 17.1. Postačujúcosť v Príklade 17.2. Dokážte, že
(a) riešenie (17.44) spĺňa postačujúce podmienky optimality;
(b) riešenie (17.45) nespĺňa postačujúce podmienky optimality.

Úloha 17.2. Fázový portrét v Príklade 17.2. Analyzujte fázový portrét systému (17.34) pre rozličné hodnoty parametra r. Dajte tieto portréty do súvisu s analytickými riešeniami, ktoré sme vyvodili v Príklade 17.2. Interpretujete riešenia (17.44) a (17.45).

Úloha 17.3. Model produkcie a zásob (production-inventory model) Ukážte, že riešením modelu optimálnej produkcie a zásob uvedeného v Úlohe 9.4 na nekonečnom časovom horizonte s limitnou podmienkou na koncový stav v tvare

$$\lim_{t\to\infty} I(t) \geq 0$$

je riešenie konvergujúce pozdĺž stabilnej sedlovej cesty do stacionárneho bodu. Nájdite explicitný tvar tohto riešenia.

Úloha 17.4. Optimálna stratégia ťažby monopolistu Predpokladajme, že majiteľ bane vie, že v jeho bani sa nachádza isté množstvo uhlia $x_0 > 0$. Zvolená miera ťažby u však ovplyvňuje jednotkovú cenu p, za ktorú môže vyťažené uhlie predať: $p(u) = a - bu$. Okrem toho na jednotku ťažby treba vynaložiť náklady c, ktoré rastú pri klesajúcom zostatkovom množstve uhlia, pričom $c(x_0) > 0$ a $\lim_{x\to 0^+} c(x) = \infty$. Cieľom je teda stanoviť stratégiu ťažby tak, aby vlastník bane maximalizoval celkový diskontovaný diskontovaný zisk na nekonečnom časovom horizonte.
Túto úlohu môžeme sformulovať ako úlohu optimálneho riadenia nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^\infty e^{-rt}((a-bu)u - c(x)u)\,\mathrm{d}t,\\
&\dot{x} = -u,\\
&x(0) = x_0 > 0 \text{ dané},\\
&\lim_{t\to\infty} x(t) \geq 0,\\
&u \geq 0.
\end{aligned}
$$

a) Napíšte nutné podmienky optimality pre vnútorné riešenie (t.j. bez zohľadnenia ohraničenia na riadenia) pre $\psi^0 = 1$.

b) Pomocou fázového portrétu v priestore (x, u) ukážte, že za uvedených predpokladov a pri požiadavke splnenia uvedených ohraničení nedôjde k úplnému vyťaženiu uhlia v bani (t.j. existuje hodnota $\bar{x} > 0$, pod ktorú množstvo uhlia neklesne). Tento záver ekonomicky zdôvodnite.

Úloha 17.5. Model produkcie a zásob (production-inventory model na nekonečnom horizonte) Modifikujte Úlohu 9.4 a riešte pre prípad nekonečného časového horizontu. Ukážte, že riešením modelu na nekonečnom časovom horizonte s limitnou podmienkou na koncový stav v tvare $\lim_{t\to\infty} I(t) \geq 0$ je riešenie konvergujúce pozdĺž stabilnej sedlovej cesty do stacionárneho bodu. Nájdite explicitný tvar tohto riešenia.

Časť V

Riešenia úloh a prílohy

Riešenia úloh

$\boxed{1.1}$ Príklad formulácie úlohy:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}(P(x(t)) - C(u(t)))\,\mathrm{d}t,\ T \text{ je pevné},\\
&\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t),\\
&x(0) = x_0 > 0 \text{ dané},\\
&x(t) \geq 0,\\
&u(t) \geq 0,
\end{aligned}$$

kde $P(x)$ je (rastúca a konkávna) funkcia zisku v závislosti od podielu ľudí, ktorý poznajú produkt (x) a $C(u)$ je (rastúca a konvexná) funkcia nákladov v závislosti od intenzity marketingovej kampane (u). (Porov. aj Úlohu 8.3.)

$\boxed{1.2}$ Príklad formulácie úlohy:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}(pu(t)x(t) - c(u(t)))\,\mathrm{d}t,\ T \text{ je pevné},\\
&\dot{x}(t) = ax(t)(1 - x(t)) - u(t)x(t),\\
&x(0) = x_0 > 0 \text{ dané},\\
&x(t) \in [0, 1],\\
&u(t) \geq 0,
\end{aligned}$$

Ide o maximalizačnú neautonómnu úlohu optimálneho riadenia s pevným časom, s voľným koncom, s ohraničeniami na stav aj na riadenie formulovanú v Lagrangeovom tvare.

Pri transformácii na úlohu variačného počtu vyjadríme $u(t)$ zo stavovej rovnice, t.j.

$$u(t) = \frac{ax(t)(1 - x(t) - \dot{x}(t)}{x(t)}$$

a dosadíme do účelovej funkcie.

$\boxed{1.3}$ Príklad formulácie úlohy:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}(\mathrm{U}(C(t)) - D(P(t)))\,\mathrm{d}t,\ T \text{ je pevné},\\
&\dot{P}(t) = H(C(t)) - \gamma P(t),\\
&P(0) = P_0 > 0 \text{ dané},\\
&P(t) \geq 0,\\
&U(t) \in [0, U_{max}],
\end{aligned}$$

kde $H(C)$ je (rastúca) funkcia závislosti prírastku úrovne znečistenia životného prostredia od spotreby, pre ktorú platí $H(0) = 0$.

$\boxed{1.4}$ Príklad formulácie úlohy:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T e^{-rt}(\mathrm{U}(C(t)) - D(P(t)))\,\mathrm{d}t,\ T \text{ je pevné},\\
&\dot{P}(t) = H(C(t)) - \gamma P(t) - G(A),\\
&\dot{K}(t) = F(K(t)) - \delta K(t) - C(t) - A(t),\\
&P(0) = P_0 > 0 \text{ dané},\\
&K(0) = K_0 > 0 \text{ dané},\\
&P(t) \geq 0, A(t) \geq 0, K(t) \geq 0, C(t) \geq 0,
\end{aligned}$$

kde $H(U)$ je (rastúca) funkcia závislosti prírastku úrovne znečistenia životného prostredia od spotreby, pre ktorú platí $H(0) = 0$ a $G(A)$ je (rastúca) funkcia, ktorá vyjadruje zníženie znečistenia v závislosi od výšky kapitlu použitej na tento účel (A), pre ktorú platí $G(0) = 0$.

$\boxed{1.5}$ Ak označíme $\bar{K}$ ako riešenie rovnice $(1-\beta)K^\alpha - \delta K = 0$, tak izoklíny tohto dynamického systému sú $K = 0$, $K = \bar{K}$ a $P = \frac{\beta}{\gamma}K^\alpha$. Stacionárny bod v kladnom kvadrante $(\bar{K}, \frac{\beta}{\gamma}\bar{K}^\alpha)$ je stabilný uzol.

$\boxed{1.6}$ Návod: Pri dôkaze prvej časti tvrdenia zaveďte novú stavovú premennú y, ktorá spĺňa stavovú rovnicu v tvare $\dot{y}(t) = f^0(x(t), u(t), t)$ spolu s počiatočnou podmienkou $y(0) = 0$.

$\boxed{2.1}$ Formulácia v tvare úlohy variačného počtu:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\,\mathrm{d}t,\ T \text{ je dané},\\
&x(0) = x_0 \text{ dané},\\
&x(T) = x_T \text{ dané}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2.2}$ Formulácia v tvare úlohy variačného počtu:

$$\begin{aligned}
&\min \int_0^T 2\pi x(t)\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,\mathrm{d}t,\ T \text{ je dané},\\
&x(0) = r,\\
&x(T) = r,
\end{aligned}$$

kde $r > 0$ je daný polomer kruhov.

$\boxed{2.3}$ Riešenie Eulerovej rovnice je $\hat{x}(t) = \frac{tc}{T}$.

$\boxed{2.4}$ Riešenie Eulerovej rovnice je $\hat{x}(t) = c\dfrac{e^{rt}-1}{e^{rT}-1}$. Návod: Všimnite si, funkcia pod integrálom (f^0) v účelovej funkcii nezávisí od explicitne od x (závisí iba od t a $\dot{x}$). V takom prípade sa Eulerová funkcia zjednoduší do tvaru

$$\frac{d\, f_x^0(t,\dot{\hat{x}})}{dt}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_x^0(t,\dot{\hat{x}}) = \text{const. (keďže } f^0 \in C^2),$$

čo môže uľahčiť jej riešenie.

$\boxed{2.5}$ Optimálne riešenie: $\hat{x}(t) = x_0 + \dfrac{t}{T}(x_T - x_0)$. (Využite návod uvedený v riešení Úlohy 2.4.)

$\boxed{2.6}$ Optimálne riešenie: $\hat{x}(t) = \dfrac{t^4+t}{24}$, ide o minimum.

$\boxed{2.7}$ Optimálne riešenie: $\hat{x}(t) = e^t + \dfrac{1}{2}\sin t$, ide o kandidáta na minimum, postačujúca podmienka však nie je splnená.

$\boxed{2.9}$ Optimálnym riešením je každé prípustné riešenie, ktoré je zároveň minimom aj maximom. Zdôvodnenie (návod): Priamym výpočtom integrálu v účelovej funkcii je možné ukázať, že jeho hodnota je konštantná a nezávisí od priebehu funkcie $x(t)$.

$\boxed{2.10}$ Návod: Ukážte, že funkcia $C(t)$ je spojitá v t a pre každé $x(t)$, ktoré je riešením Eulerovej rovnice, platí $\dfrac{dC(t)}{dt} \equiv 0$ pre každé $t \in [0,T]$.

$\boxed{3.2}$ Riešenie:

- $\hat{x}(t) = \frac{1}{4}t^2 - t + 1$, $\hat{T} = 2$, kandidát na minimum;
- $\hat{x}(t) = \frac{1}{4}t^2 - (1+\sqrt{5})t$, $\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}$, kandidát na minimum.

$\boxed{3.3}$ Riešenie:

- $\hat{x}(t) = -\dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{t}{\pi} + \dfrac{1}{2}$, globálne minimum;
- $\hat{x}(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}$, globálne minimum.

$\boxed{3.4}$ $\hat{x}(t) = -\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{9}{8}t + 2$, kandidát na minimum

$\boxed{3.5}$ $\hat{x}(t) \equiv A \ \forall t$, globálne minimum

$\boxed{3.6}$ $\hat{x}(t) = -2t, \quad \hat{T} = 1$, kandidát na minimum

$\boxed{3.7}$

a) Od parametra a závisí iba hodnota účelovej funkcie, nie však tvar riešenia $\hat{x}(t)$. Návod: Vypočítajte integrál $\displaystyle\int_0^1 ax(t)\dot{x}(t)\ dt$.

b) Optimálne riešenie v závislosti od hodnoty b:

   (i) Ak $b = 1$, tak minimum je v tvare $\hat{x}(t) = ce^t + de^{-t}$, maximum neexistuje.

   (ii) Ak $b = 0$, tak úloha má optimálne riešenie (minimum) iba v prípade $x_0 = x_T = 0$, pričom toto riešenie je v tvare $\hat{x}(t) \equiv 0$ pre každé $t \in [0, 1]$.

   (iii) Ak $b = -1$, tak riešením Eulerovej rovnice je riešenie v tvare $\hat{x}(t) = c\sin(t) + d\cos(t)$. Toto riešenie je kandidátom na maximum, nespĺňa však postačujúcu podmienku.

c) Návod: Riešením Eulerovej rovnice je akékoľvek riešenie v tvare $x(t) = a\sin(t)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné.

$\boxed{3.8}$

$\boxed{3.9}$ Návod: Rozlišujte dva prípady. Prvý - $\hat{x}(T) > x_T$ - dôkaz analogický ako pre základnú úlohu. Druhý - $\hat{x}(T) = x_T$ - prípustné variačné krivky budú spĺňať $\delta x(0) = 0$ a $\delta x(T) \geq 0$. Pomocou variačných kriviek spĺňajúcich $\delta x(T) = 0$ odvodíme Eulerovu rovnicu. Pre ostatné variačné krivky spĺňajúce $\delta x(T) > 0$, za susedné volíme iba $\hat{x}+\varepsilon\delta x$, kde $\varepsilon \geq 0$. Potom $F(\varepsilon) \leq F(0)$ pre $\varepsilon \geq 0$ dosť malé a teda $F'(0) \leq 0$. Ďalej analogicky ako v úlohe s voľným koncom.

$\boxed{4.1}$ Všeobecné riešenie Eulerovej rovnice je v tvare $\hat{x}(t) = \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2$, $\hat{y}(t) = \frac{1}{4}t^2 + c_3 t + c_4$, ide o globálne minimum.

$\boxed{4.2}$ Riešenie: $\hat{x}(t) = t^3 - t^2$, ide o globálne minimum.

$\boxed{4.3}$ Návod: Postupujte analogicky ako pri dôkaze uvedenom v časti 2.2. Variačné krivky $\delta x(.)$ však budú spĺňať iba vlastnosť $\delta x(0) = 0$, pričom $\delta x(T)$ bude voľné.

$\boxed{4.4}$ Riešenie: $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$, ide o globálne minimum.

$\boxed{5.2}$ Riešenie podmienok PPM: $\hat{u}(t) \equiv -1$, $\hat{x}(t) = 10 - 2t$, $\hat{T} = 5$.

$\boxed{5.3}$ Riešenie podmienok PPM: $\hat{u}(t) \equiv -1$, $\hat{x}(t) = 10 - 2t$, $\hat{T} = 5$.

$\boxed{5.4}$ Riešenie podmienok PPM: $\hat{u}(t) = 3e^t$, $\hat{x}(t) = \dfrac{3 - 9e^{2t}}{6e^t}$, $\hat{T} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

$\boxed{5.5}$ Riešenie:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}t - 1, \\ x^*(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + 1, \\ y^*(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{t^2}{2} - t, \\ T^* &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

$\boxed{5.6}$ Riešenie: $\hat{u}(t) \equiv 1$, $\hat{y}(t) \equiv y_0$ a $\hat{x}(t)$ je riešením stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}u(ax(t) + by_0), \quad x(0) = x_0.$$

Návod: Využite, že vďaka podmienke transverzality a kladnosti oboch stavových premenných možno z adjungovaných rovníc ukázať, že obe adjungované premenné sú konštantné.

$\boxed{6.1}$ Riešenie podmienok PPM: $\hat{u}(t) \equiv 1$, $\hat{x}(t) = 4 + t$, $\hat{T} = 1$.

$\boxed{6.2}$ Riešenie podmienok PPM:

$$\hat{x}(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}, \quad \hat{u}(t) = \psi(t) = 3Ae^{2t} - Be^{-2t},$$

kde

$$A = \frac{e^4}{1 + 3e^4}, \quad B = \frac{1 + 2e^4}{1 + 3e^4}.$$

Návod: Odvoďte systém lineárnych diferenciálnych rovníc pre x a ψ (premennú u vyjadrite z podmienky maxima) a tento systém vyriešte.

$\boxed{6.3}$ Riešenie podmienok PPM:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pre } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{pre } t \in [1, 2] \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pre } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{pre } t \in [1, 2] \end{cases}$$

Adjungovaná premenná má tvar

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t - t^2 - 1 & \text{pre } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{pre } t \in [1, 2] \end{cases}$$

Pre úlohu (d) je riešenie v tvare

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pre } t \in [0, a) \\ 0 & \text{pre } t \in [a, 2] \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} a - t & \text{pre } t \in [0, a) \\ 0 & \text{pre } t \in [a, 2] \end{cases}$$

V tomto prípade má adjungovaná premenná tvar

$$\psi(t) = \begin{cases} 2at - t^2 - a^2 & \text{pre } t \in [0, a) \\ 0 & \text{pre } t \in [a, 2] \end{cases}$$

t.j. $\psi(0) = -a^2$. Hodnotová funkcia v bode $t = 0$ je v tvare $V(0) = -\dfrac{a^3}{3}$, preto $\dfrac{dV(a)}{da} = -a^2$.

$\boxed{6.4}$

$\boxed{6.5}$ Podmienka maxima a adjungovaná rovnica sa nezmenia. Podmienka transverzality nedáva dodatočnú informáciu ($\psi(T)$ je voľné) a podmienka stacionarity bude v tvare

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv \Phi'(T)\psi(T) \quad \text{pre každé } t \in [0, T].$$

Ekvivalentná alternatíva tejto formulácie je, že existuje konštanta $K \in \mathbb{R}$ taká, že podmienka stacionarity je tvare

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv K \quad \text{pre každé } t \in [0, T]$$

a podmienka transverzality je v tvare

$$\psi(T) = \frac{K}{\Phi'(T)}.$$

$\boxed{6.8}$ Označme $H[t] := H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t))$. Využite, že

$$H[T] - H[t] = \int_t^T \frac{dH[s]}{dt} ds,$$

pričom z podmienky stacionarity vyplýva, že $H[T] = 0$. Pri výpočte $\dfrac{dH[t]}{dt}$ využite adjungovanú rovnicu a podmienku

$$\frac{\partial H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t))}{\partial u} = 0,$$

ktorá vyplýva z podmienky stacionarity.

$\boxed{6.9}$ Nutná podmienka existencie prípustného nezáporného riadenia je $k_T \leq k_0 e^{i(T-t)}$.

$\boxed{7.2}$ V prípade $B = c_1 = c_2 = 1$ je riešenie nutných podmienok pre úlohu o plánovaní výroby nasledovné:

- Ak $T \in (0, 2]$, potom

$$u(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{T} - \frac{T}{4}, \qquad x(t) = \frac{t^2}{4} + t\left(\frac{1}{T} - \frac{T}{4}\right).$$

- Ak $T \geq 2$, potom

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, T-2) \\ \frac{1}{2}(t - T + 2), & t \in [T-2, T] \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, T-2) \\ \frac{t^2}{4} - \frac{T-2}{2}t + \frac{(T-2)^2}{4}, & t \in [T-2, T] \end{cases}
\end{aligned}
$$

V prípade $T = 1$ má účelová funkcia vyjadrujúca celkové náklady pre riešenie nutných podmienok hodnotu $\frac{71}{48} \approx 1,48$, zatiaľ čo pre plán rovnomernej výroby by to bolo až $\frac{3}{2}$. V prípade $T = 3$ má účelová funkcia vyjadrujúca celkové náklady pre riešenie nutných podmienok hodnotu $\frac{4}{3} \approx 1,33$, zatiaľ čo pre plán rovnomernej výroby by to bolo až $\frac{11}{6} \approx 1,83$.

$\boxed{7.3}$ V prípade zahrnutia dodatočného ohraničenia na riadenie v tvare $u \in [0, 1]$ do úlohy o plánovaní výroby je riešenie nutných podmienok nasledovné:

- A $T < B$, úloha nemá žiadne prípustné riešenie.
- Ak $T \in \left[B, B + \dfrac{c_1}{c_2}\right]$, potom

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \begin{cases} 1 + \frac{c_2}{2c_1}t - \tau, & t \in [0, \tau) \\ 1, & t \in [\tau, T] \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} \frac{t^2 c_2}{4c_1} + (1-\tau)t, & t \in [0, \tau) \\ t - T + B, & t \in [\tau, T] \end{cases}
\end{aligned}
$$

  kde $\tau = \sqrt{(T-B)\dfrac{c_2}{c_1}}$.

- Ak $T \geq B + \dfrac{c_1}{c_2}$, potom

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1) \\ (B - T + t)\frac{c_2}{2c_1} + \frac{1}{2}, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ 1, & t \in [\tau_2, T] \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1) \\ \frac{t^2 c_2}{4c_1} - \frac{c_2 \tau_1}{2c_1}t + \tau_1^2 \frac{c_2}{4c_1}, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ t - T + B, & t \in [\tau_2, T] \end{cases}
\end{aligned}
$$

  kde

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= T - B - \frac{c_1}{c_2}, \\
\tau_2 &= T - B + \frac{c_1}{c_2}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{9.2}$ Návod: Keďže matice A je štvorcová a regulárna (vďaka predpokladu nezápornosti determinantu), tak existuje jej Jordanov rozklad v tvare $A = MBM^{-1}$, kde B je horná trojuholníková matica s vlastnými číslami matice A (označme ich λ_1 a λ_2) na diagonále a M je regulárna matica. (Pokiaľ sú obe vlastné čísla matice A rôzne, ide o klasický spektrálny rozklad.) Pre determinant matice A preto platí:

$$det(A) = det(MBM^{-1}) = det(MM^{-1}).\det(B) = \lambda_1\lambda_2.$$

Dokončenie je priamočiare. Tvrdenie možno rozpísať aj pomocou charakteristického polynómu.

$\boxed{10.1}$ Riešenie podmienok PPM je v tvare

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t) &\equiv 1,\\
\hat{x}(t) &= e^{-t}(a+1) - 1,\\
\psi(t) &= -e^{t-\hat{T}},\\
\hat{T} &= \ln\frac{a+1}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{10.3}$ Prípad $\psi^0 = 0$ možno vylúčiť z podmienky transverzality a z podmienky, že multiplikátory ψ^0 a ψ nemôžu byť zároveň nulové. Kandidát na optimálne riadenie je v tvare

$$\hat{u}(t) = e^{\delta(t-T)}\left[S - \frac{\pi}{\delta}\right] + \frac{\pi}{\delta}$$

Vlastnosti $\hat{u}$:
Ak $S - \frac{\pi}{\delta} > 0$, tak $\hat{u}$ rastie.
Ak $S - \frac{\pi}{\delta} < 0$, tak $\hat{u}$ klesá.
Ak $S - \frac{\pi}{\delta} = 0$, tak $\hat{u} = \frac{\pi}{\delta}$ je konštantné.

$\boxed{10.4}$ Označme adjungovanú premennú prislúchajúcu k stavovej premennej x ako ψ a adjungovanú premennú prislúchajúcu k stavovej premennej y ako μ. Označme ďalej

$$\tau := T + \frac{1}{b}\ln\left(1 - \frac{a}{b}\right).$$

Z predpokladu $a > b$ vyplýva, že $\tau < T$. Môžeme teda rozlíšiť dva prípady: $\tau \leq 0$ a $\tau \in (0, T)$. V prvom prípade je riešenie podmienok PPM (riadenie a adjungované premenné) v tvare

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t) &\equiv 0,\ t \in [0, T],\\
\psi(t) &= \frac{1}{b}\left(1 - e^{b(t-T)}\right),\ t \in [0, T],\\
\mu(t) &\equiv 1,\ t \in [0, T].
\end{aligned}$$

V druhom prípade je riešenie podmienok PPM v tvare

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$
$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-(a-b)(t-\tau)} & t \in [0, \tau) \\ \frac{1}{b}\left(1 - e^{b(t-T)}\right) & t \in [\tau, T] \end{cases}$$
$$\mu(t) \equiv 1, \ t \in [0, T].$$

$\boxed{10.5}$ Podmienka maxima a adjungovaná rovnica zostanú rovnaké ako v štandardnej úlohe, podmienka transverzality bude prázdna. Podmienka stacionarity bude v tvare

$$H(t, \hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi) \equiv \phi'(\hat{T})\psi^0$$

pre každé $t \in [0, \hat{T}]$.

$\boxed{11.1}$ Platí $V(0, x_0) = \frac{1}{6}T^3 + x_0 T$ a $\psi(t) = T - t$, preto $\dfrac{\partial V(0, x_0)}{\partial x_0} = \psi(0) = T$.

$\boxed{11.2}$ Hodnotová funkcia je

$$V(x, t) = \frac{1}{2}\left(-br + \sqrt{b^2 r^2 + \frac{4a}{b}}\right) e^{-rt} x^2$$

a optimálna spätná väzba je

$$u = -\frac{1}{b}\left(-br + \sqrt{b^2 r^2 + \frac{4a}{b}}\right) x.$$

Návod: Využite, že z dôvodu nezápornosti účelovej funkcie musí platiť $c \geq 0$.

$\boxed{11.3}$ Návod: Z RDP pre danú úlohu za predpokladu $V(t, x) = x^T W(t) x$ je možné ukázať, že pravá strana nadobúda minimum pre $u = -R^{-1} B^T W x$. Dosadením tohto výrazu späť do RDP dostaneme Riccatiho diferenciálnu rovnicu, ktorá je uvedená v zadaní.

$\boxed{12.1}$ Lagrangeova funkcia je v tvare

$$L = \psi^0 x + \psi(x + u) + \mu_1(1 - u) + \mu_2(1 + u) + \mu_3(2 - x - u).$$

Podmienka regularity je splnená, lebo žiadne dve ohraničenia nemôžu byť zároveň splnené na nejakom netriviálnom intervale. Podmienka $\psi^0 \neq 0$ vyplýva z toho, že úloha má voľný koniec. Riešenie uvedené v bode (v) zadania spĺňa podmienky PPM spolu s $\psi^0 = 1$, s adjungovanou premennou

$$\psi(t) = \begin{cases} 2(2 - \ln 2)e^{-t} - 1, & \text{ak } t \in [0, \ln 2) \\ 1 - t, & \text{ak } t \in [\ln 2, 2] \end{cases} \tag{17.57}$$

a s multiplikátormi

$$\mu_1(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{ak } t \in [0, \ln 2) \\ 0, & \text{ak } t \in [\ln 2, 2] \end{cases}$$
$$\mu_2(t) = 0 \text{ pre } t \in [0, 2]$$
$$\mu_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t \in [0, \ln 2) \\ \psi(t), & \text{ak } t \in [\ln 2, 2] \end{cases}$$

$\boxed{12.2}$ Riadenie a odozva spĺňajúce podmienky PPM je v tvare

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{ak } t \in [0, \frac{3}{2}) \\ 1, & \text{ak } t \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$
$$x(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{ak } t \in [0, \frac{3}{2}) \\ t - 2, & \text{ak } t \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

$\boxed{14.1}$ Riešenie časti a) je $\hat{T} = 2$, pričom riadenie je $\hat{u}(t) \equiv 1$ na $[0, 1)$ a $\hat{u}(t) \equiv -11$ na $[1, 2]$. V prípade časti b) platí

$$\hat{T} = x_0^2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 + x_0^1},$$
$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & \text{ak } 0 \le t < x_0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 + x_0^1}, \\ 1, & \text{ak } x_0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2)^2 + x_0^1} \le t \le \hat{T}. \end{cases}$$

$\boxed{15.1}$ (a) Návod: Ukážte, že hodnota účelovej funkcie je v každom prípustnom riadení rovná jednej. (b) Návod: Ukážte najprv, že pre každé optimálne riadenie je príslušné ψ konštantné a následne, že $\psi^0 + \psi = 0$.

$\boxed{15.6}$ (a) Singulárne riadenie: $u(t) \equiv 0$, jeho odozva: $x(t) \equiv 0$.

$\boxed{15.7}$ Singulárne riadenie: $u(t) \equiv \dfrac{1}{2}$, jeho odozva: $x(t) \equiv \frac{1}{2\delta}$.

$\boxed{16.4}$ Podmienky PPM majú riešenie, ktoré je zároveň prípustným riešením, iba pre $r \in (0, 1)$. V takom prípade je riadenie $u(t) = \psi(t) = x_0(r - 2)e^{(r-1)t}$ a odozva $x(t) = x_0 e^{(r-1)t}$.

Príloha A: Zhrnutie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre všeobecnú úlohu na konečnom časovom horizonte

Formulácia úlohy (U):

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\ \mathrm{d}t + \varphi(x(T), T), \qquad T \text{ je voľné alebo pevné}\\
&\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\\
&x(0) = x_0,\\
&x(T) \in C := \{x \,|\, g(x(T), T) = 0, h(x(T), T) \geq 0\},\\
&u(t) \in U, \text{ pre každé } t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Predpoklady na dáta:

- $T > 0$, $U \subset \mathbb{R}^m$,
- $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f^0 \in C^1$,
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$,
- $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^2$,
- $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$, $g \in C^1$,
- $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$, $h \in C^1$.

Podmienka regularity (PR) v $(\hat{x}, \hat{T})$:

Gradienty funkcií $g_i, i = 1, ...l$, podľa (x, t) v bode $(\hat{x}, \hat{T})$ spolu s gradientmi aktívnych ohraničení funkcií $h_j, j = 1, ..., r$, podľa (x, t) v bode $(\hat{x}, \hat{T})$ sú lineárne nezávislé.

Hamiltonova funkcia:

$$H(t, x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi^T f(t, x, u)$$

Pontrjaginov princíp maxima:

Nech $\hat{u}\,(t)\,,\ t \in [0, \hat{T}]$, je optimálne riadenie pre úlohu (U) a nech $\hat{x}\,(t)$ je jeho odozva. Nech v bode $(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})$ je splnená podmienka regularity (PR). Potom existuje konštanta $\psi^0 \in \mathbb{R}$, pre ktorú platí $\psi^0 = 0$ alebo $\psi^0 = 1$ (resp. $\psi^0 = -1$ v prípade úlohy na minimum), spojitá funkcia $\psi(t) : [0, \hat{T}] \to \mathbb{R}^n$, vektor $\chi \in \mathbb{R}^l$ a vektor $\lambda \in \mathbb{R}^r$, také, že platí:

(a) nenulovosť multiplikátorov:

$$(\psi^0, \psi(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [0, \hat{T}], \text{ resp. ekvivalentne } (\psi^0, \chi, \lambda) \neq 0,$$

(b) podmienka komplementarity:

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda^T h(\hat{x}(\hat{T})) = 0, \tag{PK}$$

(c) podmienka maxima:

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) = \max_{u \in U} H(\hat{x}(t), u, \psi^0, \psi(t)), \quad \forall t \in [0, \hat{T}], \tag{PM}$$

(d) adjungovaná rovnica:

$$\dot{\psi}(t) = -\left(\frac{\partial H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t))}{\partial x}\right)^T, \tag{AR}$$

(e) podmienka transverzality:

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial \varphi(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})}{\partial x}\right)^T \psi^0 + \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})}{\partial x}\right)^T \chi + \left(\frac{\partial h(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})}{\partial x}\right)^T \lambda, \tag{PT}$$

(f) podmienka stacionarity, ktorej tvar závisí od typu úlohy nasledovne:

- ak je úloha autonómna [1]a T je voľné:

$$H(t, \hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi) \equiv 0$$

- ak je úloha autonómna a T je pevné:

$$H(t, \hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi) \equiv \text{konštanta}$$

- ak je úloha neautonómna a T je voľné:

$$H(t, \hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi)\,|_{t=\hat{T}} = -\left(\frac{\partial \varphi(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})}{\partial T}\right) \psi^0 - \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})}{\partial T}\right)^T \chi - \left(\frac{\partial h(\hat{x}(\hat{T}), \hat{T})}{\partial T}\right)^T \lambda.$$

[1]Úloha (U) je autonómna, ak všetky funkcie f^0, f, φ, g, h vstupujúce do zadania úlohy nezávisia explicitne od času.

Príloha B: Elementy z teórie diferenciálnych rovníc

Formula variácie konštánt

Riešenie viacrozmernej rovnice $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ prechádzajúce bodom (t_0, x_0) je v tvare

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds$$

kde $\Phi(t, s)$ je tzv. matica prechodu, t.j. $\Phi(t, s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$, kde $\Phi(t)$ je fundamentálna matica riešení rovnice $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Riešenie pre niektoré špeciálne prípady:

- V prípade jednorozmernej diferenciálnej rovnice:

  $$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

  je riešenie v tvare

  $$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau}\, b(s)\, ds.$$

- V prípade jednorozmernej diferenciálnej rovnice:

  $$\dot{x}(t) = ax(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

  je riešenie v tvare

  $$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}\, b(s)\, ds.$$

- V prípade jednorozmernej autonómnej diferenciálnej rovnice:

  $$\dot{x}(t) = ax(t) + b, \qquad x(t_0) = x_0$$

  je riešenie v tvare

  $$x(t) = -\frac{b}{a} + \left[x_0 + \frac{b}{a}\right] e^{a(t-t_0)}.$$

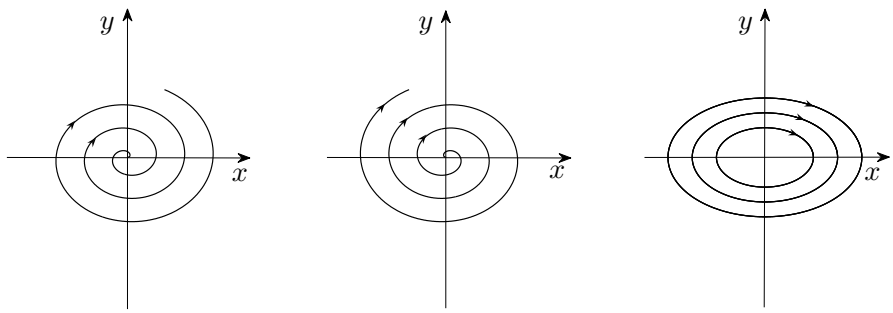
Klasifikácia stacionárnych bodov dvojrozmerného systému obyčajných diferenciálnych rovníc

Nech je daný systém dvoch autonómnych obyčajných diferenciálnych rovníc prvého stupňa

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{17.58}$$

Ďalej nech $(\hat{x}, \hat{y})$ je stacionárny bod tohto systému, t.j. $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ a $g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$.

Označme vlastné čísla jakobiánu systému (17.58) v bode $(\hat{x}, \hat{y})$ ako λ_1 a λ_2. Potom za predpokladu ich nenulovosti pre charakter stacionárneho bodu platí:



Obr. 17.1: Rôzne typy stacionárnych bodov v prípade komplexných hodnôt vlastných čísiel jakobiánu.

- Ak sú vlastné čísla reálne a nenulové, môžu nastať tri prípady:
  - ak sú obe vlastné čísla záporné, potom je $(\hat{x}, \hat{y})$ stabilný uzol (*stable node*);
  - ak sú obe vlastné čísla kladné, potom je $(\hat{x}, \hat{y})$ nestabilný uzol (*unstable node*);
  - ak majú vlastné čísla opačné znamienka, potom je $(\hat{x}, \hat{y})$ sedlo (*saddle*).
- Ak sú vlastné čísla komplexné, opäť môžu nastať tri prípady[2] (viď Obr. 17.1):
  - ak je reálna časť oboch vlastných čísiel záporná, potom je $(\hat{x}, \hat{y})$ stabilné ohnisko (*stable focus*);
  - ak je reálna časť oboch vlastných čísiel kladná, potom je $(\hat{x}, \hat{y})$ nestabilné ohnisko (*unstable focus*);
  - ak je reálna časť oboch vlastných čísiel nulová, potom je $(\hat{x}, \hat{y})$ stred (*center*), ktorý je stabilný, ale nie je asymptoticky stabilný.

[2]Reálna časť oboch vlastných čísiel je vždy rovnaká, lebo vlastné čísla sú komplexne združené.

Príloha C: Diplomové práce z optimálneho riadenia

Pod vedením autorky bolo v uplynulých rokoch obhájených v študijnom programe Ekonomická a finančná matematika na FMFI UK viacero diplomových prác, ktoré sa zaoberajú spojitou teóriou optimálneho riadenia, alebo jej aplikáciou na riešenie ekonomických modelov. Tieto diplomové práce môžu slúžiť študentom s hlbším záujmom o niektorú z oblastí optimálneho riadenia aj ako vhodný dodatočný študijný materiál. Preto na tomto mieste uvádzame ich prehľad spolu s podrobnejším popisom témy, ktorou sa zaoberajú. Viaceré z týchto diplomových prác pokrývajú aj oblasti zahrnuté v týchto skriptách a vo viacerých prípadoch boli výsledky týchto prác pri písaní skrípt priamo použité. Súčasťou detailnejšieho popisu prác sú preto aj referencie na tieto skriptá, ktoré sa na tieto výsledky vzťahujú.

Jana Štorová (2001): *Úlohy optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte*

Obsahom práce je prehľad formulácie nutných podmienok PPM pre rôzne typy úloh na konečnom horizonte (autonómna a neautonómna úloha, úloha s pevným časom aj s voľným časom, diskontovaná úloha, Bolzova úloha). Hlavným výsledkom práce je odvodenie nutných podmienok optimality pre autonómnu úlohu na nekonečnom časovom horizonte vrátane úlohy s diskontným faktorom (pozri Vetu 16.1 a Vetu 17.1).

Pavol Jurča (2004): *Ramseyho model ekonomického rastu ako úloha optimálneho riadenia*

Táto práca sa podrobnejšie zaoberá vlastnosťami optimálneho riešenia Ramseyho modelu formulovanom na nekonečnom horizonte. Časť výsledkov tejto práce je obsiahnutá v častiach 9.1 a 17.4. Viaceré výsledky uvedené v práci však nie sú pokryté v týchto skriptách. Ide najmä o analýzu riešení pre veľkú počiatočnú hodnotu kapitálu v prípade dodatočnej podmienky na ireverzibilitu investícií, analýzu niektorých špeciálnych prípadov účelovej funkcie, ako aj dôkaz viacerých tvrdení, ktoré sú v ekonomickej literatúre často formulované bez dôkazu.

Anna Kériová (2005): *Zbierka úloh z optimálneho riadenia*

Obsahom práce je 39 riešených príkladov, ktoré môžu slúžiť na lepšie precvičenie spôsobu aplikácie nutných podmienok PPM na riešenie konkrétnych úloh. Ide prevažne o jednoduchšie príklady z oblastí pokrytých kapitolami III až 11.4.

Viktor Lintner (2006): *Model obchodovania s komoditami ako úloha optimálneho riadenia*

Práca sa zaoberá modelom obchodovania s komoditami, ktorého jedna verzia je sformulovaná a riešená v Príklade 10.1. Obsahom práce je však detailná analýza viacerých verzií tohto modelu, ktoré zahŕňajú dva rôzne typy cenovej funkcie (lomenú a skokovú) a viacero rôznych parametrov, ktoré ovplyvňujú riešenie modelu.

Michal Strelka (2010): *Zbierka úloh z optimálneho riadenia*

Aj táto práca predstavuje zbierku úloh, ktorá môže poslúžiť na lepšie precvičenie aplikácie nutných podmienok. Na rozdiel od diplomovej práce A. Kériovej je však v práci obsiahnutých 6 úloh, ktoré sú zložitejšie a predstavujú aplikáciu téorie optimálneho riadenia na ekonomické modely. Viaceré z týchto modelov sú obsiahnuté aj v texte týchto skrípt, a to v Úlohe 8.3 (modifikácia Nerlove - Arrow reklamného modelu), v Úlohe 5.6 (dvojsektorový model) a v Úlohách 9.4 a 17.3 (model efektívneho využitia zásob a produkcie).

Mária Gyurianová (2011): *Úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na stavové premenné*

Diplomová práca M. Gyurianovej sa podrobne venuje úlohám s ohraničeniami na koncový stav a so zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné, ktoré sú obsahom kapitoly 11.4). Aplikácia nutných podmienok PPM pre takéto úlohy je ilustrovaná na troch zložitejších ekonomických úlohách, akou je napr. úloha o optimálnej spotrebe v modeli s lineárnou funkciou užitočnosti a podmienkou ireverzibility investícií (viď Príklad 12.3).

Katarína Macková (2011): *Použitie Greenovej vety pri riešení spojitých úloh optimálneho riadenia*

Práca skúma možnosti využitia Greenovej vety pri riešení úloh optimálneho riadenia, čo presahuje rámec týchto skrípt. Aplikácia tejto metódy je ilustrovaná na riešení viacerých modelov ekonómie, marketingu a z oblasti prírodných zdrojov, a to na konečnom aj nekonečnom časovom horizonte.

Michaela Dobríková (2016): *Riešenie spojitých úloh optimálneho riadenia metódou analýzy fázových portrétov*

Práca sa zaoberá kvalitatívnou analýzou úloh optimálneho riadenia pomocou fázového portrétu. Formuluje predpoklady na úlohy, ktoré vedú k pevnému bodu typu sedlo. Exaktne dokazuje jednoznačnosť riešení v Ramseyho modeli ekonomického rastu s konečným časom. V úlohe o optimálnej spotrebe ukazuje, že v závislosti od vzťahu medzi úrokovou mierou a diskontným faktorom, môžeme získať rôzne typy pevného bodu.

Literatúra

[1] D. P. Bertsekas: *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2005.

[2] L. D. Berkovitz: *Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[3] P. Brunovský: *Matematická teória optimálneho riadenia*, ALFA, Bratislava, 1980.

[4] P. Brunovský, M. Halická, M. Mitas: *The deterministic optimal liquidation problem*, Lecture Notes in Economics and Mathematical systems 687 (2018), 267–278, In book: Control Systems and Mathematical Methods in Economics, Springer 2018

[5] P. Brunovsky, M. Holecyová: *Optimal control, dichotomy, and closed range*, SIAM Journal on Control and Optimization, 56(2) (2018), 633-648.

[6] V. G. Boltjanskij: *Matematičeskije metody optimaľnogo upravlenija*, Nauka, Moskva, 1966. 1992.

[7] G. Feichtinger, R. F. Hartl: *Optimale Kontrolle ökonomische Prozesse*, W.Gruyter, Berlin – New York, 1986.

[8] I. M. Gelfand, S. V. Fomin: *Variacionnoje isčislenije*, Gasudarstvennoje izdavateľstvo, Moskva, 1961.

[9] M. Halická, P. Jurča: *On the sustainable growth in an economy with perfectly substituable exhaustible resources*, Natural Resource Modeling 26 (2013), No 3, 403-434

[10] M. Halická : *Regular synthesis for the linear-convex optimal control problem with convex control constraints*, Math. Slovaca 37 (1987), No1, 89-110

[11] M. Halická : *Regular synthesis for ther linear time optimal control problem with convex control constraints*, SIAM J. Control and Opt. 27 (1989), No2, 308-329

[12] M. Halická, P. Brunovský, P. Jurča: *Optimálne riadenie. Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, Bratislava, 2009.

[13] M. Hamala: *Nelineárne programovanie*, ALFA, Bratislava, 1972.

[14] M. Hamala, M. Trnovská: *Nelineárne programovanie, teória a algoritmy*, EPOS, Bratislava, 2013.

[15] F. H. Hartl, S. P. Sethi, R. G. Vickson, R.G.: A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints, *SIAM Review*, Vol. 37, No. 2, 181–218, 1995.

[16] A. C. Chiang: *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Inc. New York, 1996.

[17] P. Jurča: *The Ramsey model of economic growth as an optimal control problem*, Journal of Electrical Engineering. - Vol. 56, No. 12/s (2005), s. 65-68

[18] P. Jurča: *On sustainability constraint in models with non-renewable resources*, Proceedings of 15th International Scientific Conference on Mathematical Methods in Economics and Industry, Košice, UPJŠ, 2007.

[19] M. I. Kamien, N. L. Schwartz: *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier, 1995.

[20] D. Leonard, N. Long: *Optimal control theory and static optimization in economics*, Cambridge University Press, 1992.

[21] E. B. Lee, L. Markus: *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, New York, 1967.

[22] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltyanski,, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mischenko: *The Mathematical Theory of Optimal Precesses*, Interscience Publishers, New York, 1962.

[23] F. P. Ramsey: A mathematical Theory of Saving, *Economic Journal*, Vol. 38, 543–559, 1928.

[24] P. Quittner: *Úvod do variačného počtu*, Učebné texty, FMFI UK, 2011.

[25] A. Seierstad, K. Sydsæter: *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[26] S. P. Sethi, G. L. Thomson: *Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics*, Springer, New York, 2000.