FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

PÍSOMNÁ PRÁCA K DIZERTAČNEJ SKÚŠKE

2005

Mária Trnovská

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Centrálna trajektória v semidefinitnom programovaní

P Í S O M N Á P R Á C A
K D I Z E R T A Č N E J S K Ú Š K E

2005

Mária Trnovská

Obsah

Úvod

Techniky metód vnútorného bodu (MVB) boli rozšírené v 60. rokoch minulého storočia vo forme bariérových metód (A.Fiacco, G.McCormick, [6]). Aplikovali sa na všeobecné úlohy (nelineárneho) matematického programovania (MP), ktorých duálne vlastnosti neboli analyzované. Základná myšlienka MVB spočíva v tom, ľe k danej (napr. minimalizačnej) úlohe MP sa priradila trieda pomocných perturbovaných úloh s tzv. transformačnou bariérovou účelovou funkciou. Minimum takejto funkcie leľí vo vnútri mnoľiny prípustných riešení pôvodnej úlohy a na jeho nájdenie moľno pouľiť metódy voľnej optimalizácie. Navyše, tieto transformačné funkcie sú parametrizované parametrom $\mu > 0$, ktorým moľno meniť váhu kladenú na bariérový člen účelovej funkcie. Preto pre $\mu \to 0$ sa príslušné minimá transformačných funkcii budú blíľiť k minimu pôvodnej úlohy.

Teória MVB zdôvodňovala existenciu a jednoznačnosť miním perturbovaných úloh pre všeobecné úlohy konvexného programovania a všeobecné bariérové funkcie. Bola dokázaná len konvergenia presných riešení a preto bola snaha riešiť kaľdú transformovanú úlohu čo najpresnejšie. To všetko spôsobovalo značné numerické problémy, následkom čoho v polovici 70. rokov záujem o MVB utíchol.

Lineárne programovanie (LP), ako špeciálne odvetvie matematického programovania, sa vyvíjalo úplne samostatne a vyššie spomenuté techniky sa tu vôbec nepouľívali. Simplexová metóda navrhnutá G.B.Dantzigom (1947) sa totiľ povaľovala za spoľahlivú a výkonnú metódu na riešenie úloh LP.

Situácia sa zmenila v 70. rokoch po vzniku nového odboru, zaoberajúceho sa výpočtovou zloľitosťou. V r. 1972 V.Klee a G.Minty [22] ukázali, ľe simplexová metóda nie je polynomiálna, dôsledkom čoho vznikla snaha o alternatívne prístupy riešenia úloh LP. Prvým polynomiálnym algoritmom na riešenie úloh LP bol elipsoidný algoritmus navrhnutý v r. 1979 L.Khachianom [21], ktorý bol však pre beľné úlohy pomalý.

Obrat nastal v r. 1984, keď N.Karmarkar predstavil svoj polynomiálny algoritmus pre úlohu lineárneho programovania [20], ktorý vyuľíval nelineárnu projektívnu geometriu. O rok neskôr bola ukázaná formálna ekvivalencia medzi Karmarkarovym algoritmom a klasickou logaritmickou bariérovou metódou aplikovanou na úlohy LP (P.Gill a kol. - [8]). M. Wright [44] označila rok 1984 začiatkom revolúcie vnútorného bodu. Ukázalo sa totiľ, ľe bariérová metóda je pre niektoré úlohy rýchlejšia ako simplexová metóda a môľe jej konkurovať pri mnohých ďalších úlohách lineárneho programovania. M. Wright ďalej o tomto období píše: "..revolúcia vnútorného bodu nabrala hybnosť a akcelerovala do niekoľkých smerov..".

V druhej polovici 80. rokov sa začali matematici zaoberať moľnosťami aplikácie nových prístupov MVB aj na niektoré úlohy konvexného programovania. Takýmito úlohami boli aj úlohy kvadratického konvexného programovania a úlohy lineárnej komplementarity.

Okrem algoritmických otázok sa začali skúmať aj teoretické otázky MVB. Týkali sa najmä centrálnych trajektórii - hladkých kriviek riešení perturbovaných úloh, ktoré majú mnohé geometrické vlastnosti uľitočné pri analýze zloľitosti. V 90. rokoch autori Y.E.Nesterov a A.S.Nemirovski [32] rozšírili škálu úloh konvexnej optimalizácie, ktoré bolo moľné algoritmicky riešiť v polynomiálnom čase. Metódy vnútorného bodu sa mohli

následne efektívne aplikovať na mnohé úlohy, ktoré boli dovtedy výpočtovo neatraktívne. Tak vznikli aj nové odvetvia matematického programovania, ako semidefinitné programovanie, či kónické programovanie.
Semidefinitné programovanie sa v posledných rokoch stalo populárnym odvetvím matematického programovania, pretoľe sa dalo aplikovať na neatraktívne úlohy, akými boli napr. optimalizácia vlastných čísel. V 90. rokoch našlo SDP uplatnenie v teórii riadenia, štatistike a v kombinatorickej optimalizácii (viď. [2], [25]). Mnohé optimalizačné úlohy z týchto oblastí sa dajú priamo naformulovať ako úlohy SDP a potom efektívne riešiť pomocou MVB, alebo sa dajú relaxovať pomocou SDP, čím sa získajú lepšie odhady, ako pri relaxácii pomocou LP.
Ako sme uľ spomenuli, centrálna trajektória má významné postavenie pri študovaní metód vnútorného bodu. Je analytickou krivkou vo vnútri mnoľiny prípustných riešení a "vedie" k optimálnemu riešeniu na hranici. Mnoho algoritmov vnútorného bodu "sleduje" centrálnu trajektóriu a preto je základným pojmom pri navrhovaní a analýze algoritmov lineárneho a nelineárneho programovania a úloh komplementarity.
V tejto práci sa študujú vlastnosti centrálnych a zvlášť váľených centrálnych trajektórii v SDP. Váľená centrálna trajektória v LP sa dá definovať podobným spôsobom ako klasická trajektória v LP a to pomocou perturbovaných úloh s bariérovou účelovou funkciou. Aj vlastnosti klasickej trajektórie (a ich dôkazy) plynule prechádzajú na váľenú trajektóriu. Klasická centrálna trajektória v SDP je zovšeobecnením trajektórie v LP, no pri definovaní váľenej centrálnej trajektórie v SDP vznikajú problémy. Príčinou je fakt, ľe prechod od klasickej k váľenej centrálnej trajektórii v SDP je omnoho komplikovanejší a postupovať spôsobom pouľitým v lineárnom programovaní, t.j. definovať váhové bariérové funkcie, sa ukazuje ako zloľité. Preto existuje viac prístupov, ako dobre definovať váľenú centrálnu trajektóriu v SDP. Našim cieľom v tejto práci je popísať tieto prístupy a pre jeden z nich poskytnúť nový, zjednodušený dôkaz existencie váľenej trajektórie. Ďalej podávame stručný prehľad základných vlastností klasickej a váľenej centrálnej trajektórie v SDP, poukáľeme na otvorené problémy v tejto oblasti a navrhneme tézy budúcej dizertačnej práce.
Kapitola 1 obsahuje označenia a definície pojmov. Definované sú úlohy SDP v štandardnom tvare, mnoľiny prípustných, ostro prípustných a optimálnych riešení. Ďalej sú uvedené vlastnosti týkajúce sa duality a nutné a postačujúce podmienky optimality. Kapitola 2 hovorí o klasickej centrálnej trajektórii v SDP. Je ukázané, ľe za určitých predpokladov je moľné dobre definovať centrálnu trajektóriu. Definovaný je centrujúci systém a ukázané sú ďalšie vlastnosti centrálnej trajektórie, ako analytickosť a konvergencia k optimálnemu riešeniu. V Kapitole 3 ukáľeme, ako je definovaná centrálna trajektória v LP a ako z nej moľno odvodiť váľenú centrálnu trajektóriu v LP. Tieľ sú sformulované vlastnosti centrálnej trajektórie. Kapitola 4 hovorí o váľenej centrálnej trajektórii v SDP. Sú tu uvedené rôzne prístupy skúmania a definovania váľenej trajektórie v SDP. Pre jeden z prístupov uvádzame tieľ nový zjednodušený dôkaz existencie váľenej centrálnej trajektórie. V Kapitole 5 podáme prehľad doterajších výsledkov a príslušných publikácii, týkajúcich sa centrálnych a zvlášť váľených centrálnych trajektórii v lineárnom a semidefinitnom programovaní. Tieľ navrhneme ciele budúcej dizertačnej práce. Napokon Kapitola 6 obsahuje pomocné tvrdenia z maticovej analýzy, definície pojmov

a niektoré ďalšie vlastnosti uľitočné pri spracovaní tejto témy.

1 Notácia a definície

Označme R, (R_+, R_{++}) množiny reálnych (nezáporných reálnych, kladných reálnych) čísel. Nech R^n je vektorový priestor nad R dimenzie n a R^n_+, resp. R^n_{++} podmnožina tých vektorov z R^n, ktoré majú všetky zložky nezáporné, resp. kladné.
Ďalej označme S^n vektorový priestor symetrických matíc dimenzie $\bar{n} = n(n+1)/2$. Na S^n definujeme skalárny súčin " $\bullet$ " nasledovne

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = tr(\mathbf{XY}), \quad \mathbf{X} \in S^n, \mathbf{Y} \in S^n.$$

Ďalej označme $S^n_+(S^n_{++})$ podmnožinu kladne semidefinitných (kladne definitných) matíc. Poznamenávame, že množiny S^n_+, S^n_{++} tvoria konvexný kužeľ. Pre $\mathbf{X} \in S^n_+$ budeme písať $\mathbf{X} \succeq 0$, pre $\mathbf{X} \in S^n_{++}$ budeme písať $\mathbf{X} \succ 0$.
Majme dané matice $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{C} \in S^n$ a vektor $b \in R^m$. Potom úlohu

$$\left.\begin{array}{c} \min_{\mathbf{X} \in S^n} \ \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \\ \mathbf{A_i} \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \mathbf{X} \succeq 0 \end{array}\right\} \qquad (P)$$

nazývame primárnou úlohou semidefinitného programovania v štandardnom tvare s premennou $\mathbf{X} \in S^n$ a úlohu

$$\left.\begin{array}{c} \max_{y \in R^m} \ b^T y \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A_i} y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \\ \mathbf{S} \succeq 0 \end{array}\right\} \qquad (D)$$

nazývame duálnou úlohou semidefinitného programovania v štandardnom tvare s premennými $\mathbf{S} \in S^n, y \in R^m$.
Označme

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{X} \in S^n \;\middle|\; \mathbf{A_i} \bullet \mathbf{X} = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \ \mathbf{X} \succeq 0 \right\},$$
$$\mathcal{P}^0 = \left\{ \mathbf{X} \in S^n \;\middle|\; \mathbf{A_i} \bullet \mathbf{X} = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \ \mathbf{X} \succ 0 \right\}$$

množinu prípustných, resp. ostro prípustných riešení primárnej úlohy a

$$\mathcal{D} = \left\{ (y, \mathbf{S}) \in R^m \times S^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^m \mathbf{A_i} y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \ \mathbf{S} \succeq 0 \right\},$$

$$\mathcal{D}^0 = \left\{ (y, \mathbf{S}) \in R^m \times S^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^m \mathbf{A_i} y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, \ \mathbf{S} \succ 0 \right\}$$

množinu prípustných, resp. ostro prípustných riešení duálnej úlohy. Nech p^* je optimálna hodnota úlohy (P) a d^* je optimálna hodnota úlohy (D), t.j.

$$p^* = \inf\{\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \mid \mathbf{X} \in \mathcal{P}\},$$

$$d^* = \sup\{b^T y \mid y \in \mathcal{D}\},$$

pričom definujeme $p^* = +\infty$ ak $\mathcal{P} = \emptyset$ a $d^* = -\infty$ ak $\mathcal{D} = \emptyset$. Označme

$$\mathcal{P}^* = \{\mathbf{X} \in \mathcal{P} | \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} = p^*\},$$

$$\mathcal{D}^* = \{y \in \mathcal{D} | b^T y = d^*\}$$

mnoľiny optimálnych riešení primárnej, resp. duálnej úlohy.

Veta 1.1 *Slabá veta o dualite.*

$$d^* \leq p^*.$$

Veta 1.2 *Veta o dualite.*
a) Ak $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak $d^* = p^*$. Navyše ak je hodnota p^* konečná, tak primárne optimum sa nadobúda, t.j. $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$.
b) Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$, tak $d^* = p^*$. Navyše ak je hodnota d^* konečná, tak primárne optimum sa nadobúda, t.j. $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$.
c) Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak $d^* = p^*$ a $\mathcal{P}^* \neq \emptyset, \mathcal{D}^* \neq \emptyset$.

Rozdiel $\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - b^T y$, resp. $p^* - d^*$ budeme nazývať duálna , resp. optimálna duálna medzera. Slabá veta o dualite hovorí, ľe (optimálna) duálna medzera je vľdy nezáporná. Veta o dualite hovorí, ľe ak existuje vnútorný bod aspoň jednej z úloh $(P), (D)$, tak optimálna duálna medzera je nulová.
Zrejme pre $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ prípustné platí

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - b^T y = \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} \right) \bullet \mathbf{X} - b^T y = \mathbf{S} \bullet \mathbf{X}.$$

Navyše z Dôsledku 6.4 vyplýva, ľe podmienka $\mathbf{S} \bullet \mathbf{X} = 0$ je ekvivalentná podmienke $\mathbf{XS} = \mathbf{SX} = \mathbf{0}$.

Dôsledok 1.1 *Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ je optimálnym riešením $(P), (D)$ práve vtedy, keď splňa systém*

$$\left.\begin{array}{rr} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i & i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} & \mathbf{S} \succeq 0 \\ \mathbf{XS} = \mathbf{0} & \mathbf{X} \succeq 0 \end{array}\right\}. \tag{1}$$

Definícia 1.1 *Ostro komplementárne riešenie.*
Riešenie $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ dvojice úloh $(P), (D)$ sa nazýva ostro komplementárne, ak platí

$$\mathbf{X}^* + \mathbf{S}^* \succ 0.$$

Poznámka. Zatiaľ čo v lineárnom programovaní z existencie optimálneho riešenia vyplýva existencia ostro komplementárneho riešenia, v semidefinitnom programovaní (rovnako ako v kvadratickom konvexnom programovaní a v úlohách lineárnej komplementarity) táto vlastnosť nemusí byť splnená.

Pre skrátenie zápisu budeme v ďalšom niekedy používať nasledovné označenia: nech $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \in S^n$, potom

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} : S^n \to R^m, & \mathcal{A}(\mathbf{X}) = (\mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{X}, \ldots, \mathbf{A}_m \bullet \mathbf{X}), \\ \tilde{\mathcal{A}} : R^m \to S^n, & \tilde{\mathcal{A}}(y) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i. \end{array} \tag{2}$$

Pomocou operátora *svec* definovaného v Kapitole 6.3 utvorme maticu

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} svec(\mathbf{A}_1)^T \\ \vdots \\ svec(\mathbf{A}_m)^T \end{pmatrix} \in R^m \times R^{\bar{n}}. \tag{3}$$

Potom zrejme

$$\begin{array}{r} \mathcal{A}(\mathbf{X}) = \mathbb{A} svec(\mathbf{X}), \\ svec(\tilde{\mathcal{A}}(y)) = \mathbb{A}^T y. \end{array} \tag{4}$$

Teda systém (1) môžme alternatívne zapísať ako

$$\begin{array}{rl} \mathcal{A}(\mathbf{X}) = b, & \mathbf{X} \succeq 0, \\ \tilde{\mathcal{A}}(y) + \mathbf{S} = \mathbf{C}, & \mathbf{S} \succeq 0, \\ \mathbf{XS} = \mathbf{0}, & \end{array}$$

alebo

$$\begin{array}{rl} \mathbb{A} svec(\mathbf{X}) = b, & \mathbf{X} \succeq 0, \\ \mathbb{A}^T y + svec(\mathbf{S}) = svec(\mathbf{C}), & \mathbf{S} \succeq 0, \\ \mathbf{XS} = \mathbf{0}. & \end{array}$$

2 Centrálna trajektória v SDP

V tejto kapitole ukáľeme, ľe je za určitých predpokladov moľné dobre definovať centrálnu trajektóriu v semidefinitnom programovaní ako mnoľinu optimálnych riešení perturbovaných úloh, resp. ekvivalentne ako mnoľinu riešení perturbovaného systému. Uvidíme, ľe centrálna trajektória konverguje k optimálnym riešeniam úloh (P) a (D) a je analytickou funkciou parametra $\mu > 0$.
V ďalšom budeme uvaľovať platnosť nasledujúcich predpokladov.
Predpoklad 1: Matice $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ sú lineárne nezávislé.
Predpoklad 2: Existuje vnútorný bod primárnej úlohy aj vnútorný bod duálnej úlohy, t.j. $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.
Predpoklad 1 zaručuje jednoznačnú korešpondenciu medzi y a $\mathbf{S}$ na mnoľine $\mathcal{D}$. Predpoklad 2 je dôleľitý pre aplikovanie metód vnútorného bodu. Podľa Vety 1.2 tieľ zaručuje existenciu riešení úloh $(P), (D)$ a to, ľe duálna medzera je nulová. V skutočnosti Predpoklad 2 je dokonca ekvivalentný tvrdeniu, ľe existujú optimálne riešenia úloh $(P), (D)$ a mnoľiny optimálnych riešení $\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^*$ sú ohraničené (viď. [41]).

2.1 Existencia centrálnej trajektórie

Zvoľme pevné $\mu > 0$ a definujme bariérové funkcie a k nim prislúchajúce úlohy:

$$\Phi_\mu(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - \mu \ln \det(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \succ 0,$$

$$\left.\begin{array}{c} \min \Phi_\mu(\mathbf{X}) \\ \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ \mathbf{X} \succ 0 \end{array}\right\} \qquad (P)_\mu$$

a

$$\Psi_\mu(y, \mathbf{S}) = b^T y + \mu \ln \det(\mathbf{S}), \qquad \mathbf{S} \succ 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} \min \Psi_\mu(y, \mathbf{S}) \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} \\ \mathbf{Z} \succ 0. \end{array}\right\} \qquad (D)_\mu$$

Tvrdenie 2.1 *Úlohy $(P)_\mu, (D)_\mu$ majú najviac jedno riešenie.*

Dôkaz. Z Lemy 6.2 vyplýva, ľe Φ_μ je rýdzo konvexná funkcia a tieľ (s vyuľitím Predpokladu 1), ľe Ψ_μ je rýdzo konkávna funkcia na $\mathcal{D}^0$.
□

Veta 2.1 *Pre kaľdé $\mu > 0$ má úloha $(P)_\mu$ jediné optimálne riešenie.*

Dôkaz. Z predchádzajúceho tvrdenia vyplýva, ľe stačí ukázať existenciu riešenia úlohy $(P)_\mu$. Pretoľe $\mathcal{P}^0 \neq 0$, existuje

$$\mathbf{X}^0 \succ 0 : \quad \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^0 = b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

V tomto bode nadobúda funkcia Φ_μ hodnotu $\Phi_\mu(\mathbf{X}^0)$. Definujme mnoľinu

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}^0) = \{\mathbf{X} \in \mathcal{P}^0 \mid \Phi_\mu(\mathbf{X}) \leq \Phi_\mu(\mathbf{X}^0)\}.$$

Zrejme

$$argmin\{\Phi_\mu(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^0)\} = argmin\{\Phi_\mu(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathcal{P}^0\}.$$

Teda stačí nám ukázať, ľe existuje riešenie úlohy

$$\min\{\Phi_\mu(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^0)\}.$$

Pretoľe funkcia Φ_μ je spojitá a mnoľina $\mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$ neprázdna ($\mathbf{X}^0 \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$), podľa Weierstrassovej vety stačí ukázať, ľe mnoľina $\mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$ je kompaktná.
Dokáľeme uzavretosť mnoľiny $\mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$. Nech $\{\mathbf{X}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$ a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}^n = \mathbf{X} \in S^n$. Zrejme platí

$$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^n = b_i \quad \forall i = 1,\ldots,m,\ \forall n = 1,2,\ldots \ \Rightarrow \quad \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

$$\mathbf{X}^n \succ 0 \quad \forall n = 1,2,\ldots \ \Rightarrow \quad \mathbf{X} \succeq 0.$$

Pretoľe Φ_μ je spojitá funkcia, je

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_\mu(\mathbf{X}^n) = \Phi_\mu(\mathbf{X})$$

a

$$\Phi_\mu(\mathbf{X}^n) \leq \Phi_\mu(\mathbf{X}^0) \ \Rightarrow \ \Phi_\mu(\mathbf{X}) \leq \Phi_\mu(\mathbf{X}^0). \tag{5}$$

Zostáva ukázať, ľe $\mathbf{X} \succ 0$. Ak by $\mathbf{X}$ bola singulárna, tak $det\mathbf{X} = 0$ a $ln\ det\mathbf{X} = -\infty$, teda Φ_μ by bola neohraničená, čo je spor s (5).
Dokáľeme ohraničenosť mnoľiny $\mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$. Predpokladajme sporom, ľe by $\mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$ bola neohraničená. $\mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$ je zrejme konvexná mnoľina, pretoľe je úrovňovou mnoľinou konvexnej funkcie. Z Lemy 6.3 dostávame, ľe

$$\exists\ \mathbf{X}_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^0),\ \mathbf{X}_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^0),\ \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \succeq 0,\ \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \neq 0:$$

$$\{\mathbf{X}^t \mid \mathbf{X}^t = \mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2),\ t \geq 0\} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X}^0)$$

a teda

$$\Phi_\mu(\mathbf{X}^t) \leq \Phi_\mu(\mathbf{X}^0) \quad \forall t \geq 0. \tag{6}$$

Počítajme limitu

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_\mu(\mathbf{X}^t) = \lim_{t\to\infty} \Phi_\mu(\mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\mathbf{C} \bullet (\mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)) - \mu \ln\det(\mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\mathbf{C} \bullet \mathbf{X}_1 + t\left(\mathbf{C} \bullet (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) - \frac{\mu \ln\det(\mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))}{t}\right)\right]$$

Označme

$$V(t) = \mathbf{C} \bullet (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) - \frac{\mu \ln\det(\mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))}{t}.$$

Teraz ukážeme, že platí

$$0 < \lim_{t\to\infty} V(t) < \infty. \tag{7}$$

Označme $p_k(t) = \det(\mathbf{X}_1 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))$, čo je plynóm stupňa k. Pomocou L'Hospitalovho pravidla spočítame

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu \ln p_k(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \mu \frac{p_k'(t)}{p_k(t)} = 0.$$

Pretože $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, existuje $(y^0, \mathbf{S}^0) \in \mathcal{D}^0$. Matice $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ sú prípustné a teda platí

$$\mathbf{C} \bullet (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \left(\sum A_i y_i^0 + \mathbf{S}^0\right) \bullet (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \mathbf{S}^0 \bullet (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) > 0$$

pričom nerovnosť vyplýva z Lemy 6.8. a teda je splnená nerovnosť (7). Dostávame, že za daných predpokladov je

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_\mu(\mathbf{X}^t) = \infty,$$

čo je spor s (6).
□
Pretože platí Predpoklad 1, podobným spôsobom sa dá ukázať platnosť nasledujúceho tvrdenia.

Veta 2.2 *Pre každé $\mu > 0$ má úloha $(D)_\mu$ jediné optimálne riešenie.*

Označme $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$ riešenie dvojice úloh $(P)_\mu, (D)_\mu$. Pretože pre každé $\mu > 0$ je toto riešenie jediné, môžme dobre definovať centrálnu trajektóriu.

Definícia 2.1 *Centrálnou trajektóriou nazývame množinu*

$$\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid \mu > 0\}$$

riešení preturbovaných úloh $(P)_\mu, (D)_\mu$.

Poznámka. V teórii metód vnútorného bodu sa chápe centrálna trajektória ako množina bodov, ale alternatívne aj ako zobrazenie

$$f : R_{++} \to S_{++}^n \times R^m \times S_{++}^n, \quad f(\mu) = (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)),$$

pričom z kontextu je zvyčajne zrejmé, o ktorý význam ide.

Veta 2.3 *Nech $\mu > 0$. Potom $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ je optimálne riešenie $(P)_\mu, (D)_\mu$ práve vtedy, keď spĺňa systém*

$$\left.\begin{array}{rr} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, & \mathbf{S} \succ 0, \\ \mathbf{X}\mathbf{S} = \mu \mathbf{I}, & \mathbf{X} \succ 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Dôkaz. Nech $\bar{\mathbf{X}}$ je optimálne riešenie $(P)_\mu$. Zostrojme Lagrangeovu funkciu úlohy $(P)_\mu$:

$$L(\mathbf{X}, y) = \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - \mu \ln \det \mathbf{X} - \sum_{i=1}^{m} y_i(\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} - b_i),$$

pričom $\mathbf{X} \in S^n_{++}, y \in R^m$. Pretože $(P)_\mu$ je konvexná úloha, $\bar{\mathbf{X}}$ je jej optimálnym riešením práve vtedy, keď existuje $\bar{y} \in R^m$ tak, že

$$\nabla_{\mathbf{X}} L(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}) = 0, \qquad \nabla_y L(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}) = 0,$$

t.j. (s použitím Lemy 6.4)

$$\mathbf{C} - \mu\bar{\mathbf{X}}^{-1} - \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i \mathbf{A}_i = 0, \qquad \mathbf{A}_i \bullet \bar{\mathbf{X}} - b_i = 0.$$

Označme $\bar{\mathbf{S}} = \mu\bar{\mathbf{X}}^{-1} \succ 0$. Zrejme trojica $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ spĺňa systém (8).
Teraz nech $(\bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ je riešením úlohy $(D)_\mu$. Lagrangeova funkcia úlohy $(D)_\mu$ je definovaná ako

$$L(y, \mathbf{S}, \mathbf{X}) = b^T y + \mu \ln \det \mathbf{S} - \mathbf{X} \bullet (\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} - \mathbf{C}),$$

kde $y \in R^m, \mathbf{S} \in S^n_{++}, \mathbf{X} \in S^n$. Pretože $(D)_\mu$ je konvexná úloha, $(\bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ je jej optimálnym riešením práve vtedy, keď existuje $\bar{\mathbf{X}} \in S^n$ tak, že

$$\nabla_{y_i} L(\bar{y}, \bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{X}}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \nabla_{\mathbf{S}} L(\bar{y}, \bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{X}}) = 0, \qquad \nabla_{\mathbf{X}} L(y, \mathbf{S}, \mathbf{X}) = 0$$

t.j. (s použitím Lemy 6.4)

$$b_i - \bar{\mathbf{X}} \bullet \mathbf{A}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \mu\bar{\mathbf{S}}^{-1} - \bar{\mathbf{X}} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i \bar{y}_i + \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{C} = 0.$$

Teda trojica $(\bar{y}, \bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{X}})$ spĺňa systém (8).
□

Dôsledok 2.1 *Nech $\mu > 0$. Potom bod $(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$ je bodom centrálnej trajektórie práve vtedy, keď spĺňa systém (8).*

Dôsledok 2.2 *Duálna medzera pozdĺž centrálnej trajektórie je rovná*

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X}(\mu) - b^T y(\mu) = \mathbf{X}(\mu) \bullet \mathbf{S}(\mu) = tr(\mathbf{X}(\mu)\mathbf{S}(\mu)) = tr(\mu\mathbf{I}) = n\mu.$$

2.2 Ďalšie vlastnosti

Nech

$$\mathcal{N} = \left\{ (\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) \in S^n \times R^m \times S^n \;\middle|\; \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = 0 \; \forall i = 1, 2, \ldots, m \; \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = 0 \right\},$$

$$\mathcal{R} = \left\{ (\mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{X}, \ldots, \mathbf{A}_m \bullet \mathbf{X}, \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S}) \in R^m \times S^n \;\middle|\; \mathbf{X} \in S^n, y \in R^m, \mathbf{S} \in S^n \right\}$$

Lema 2.1 $\mathbf{X} \bullet \mathbf{S} = 0 \quad \forall(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) \in \mathcal{N}$.

Dôkaz. Nech $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) \in \mathcal{N}$. Potom

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{S} = \mathbf{X} \bullet (-\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i) = -\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}) y_i = 0.$$

□

Dôsledok 2.3 *Nech $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ sú prípustné pre (P) a $(y_1, \mathbf{S}_1), (y_2, \mathbf{S}_2)$ sú prípustné pre (D). Potom*

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \bullet (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) = 0.$$

Lema 2.2 $\mathcal{R} = R^m \times S^n$.

Dôkaz. Z lineárnej nezávislosti matíc $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ vyplýva, že ak $z \in R^m$ je ľubovolný vektor, tak existuje $\mathbf{X} \in S^n$ tak, že $\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = z_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, m$ (pozri maticový zápis $(3), (4)$, zrejme $h(\mathbb{A}) = m$). Nech $\mathbf{Z}$ je ľubovolná symetrická matica. Matice $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ môžme doplniť na bázu S^n maticami $\mathbf{A}_{m+1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bar{n}}$. Potom

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \sum_{j=m+1}^{\bar{n}} \mathbf{A}_j y_j = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S}.$$

□

2.3 Ohraničenosť a konvergencia k optimálnemu riešeniu

Veta 2.4 *Nech $\bar{\mu} > 0$. Potom je množina*

$$\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid 0 < \mu \leq \bar{\mu}\}$$

ohraničená.

Dôkaz. Nech $\mathbf{X}^0 \in \mathcal{P}^0, (y^0, \mathbf{S}^0) \in \mathcal{D}^0)$. Potom podľa Dôsledku 2.3 $\forall \mu \in (0, \bar{\mu}\rangle$:

$$(\mathbf{X}^0 - \mathbf{X}(\mu)) \bullet (\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}(\mu)) = 0.$$

Z toho

$$\mathbf{X}(\mu) \bullet \mathbf{S}^0 + \mathbf{S}(\mu) \bullet \mathbf{X}^0 = \mathbf{X}^0 \bullet \mathbf{S}^0 + \mathbf{X}(\mu) \bullet \mathbf{S}(\mu) \leq \mathbf{X}^0 \bullet \mathbf{S}^0 + n\bar{\mu} := \gamma.$$

Teda množina

$$\{(\mathbf{X}(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid 0 < \mu \leq \bar{\mu}\}$$

je podmnožinou množiny

$$\{(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \mid \mathbf{X} \succeq 0, \mathbf{S} \succeq 0, \mathbf{X} \bullet \mathbf{S}^0 + \mathbf{S} \bullet \mathbf{X}^0 \leq \gamma\},$$

ktorá je podľa Dôsledku 6.2 ohraničená. Predpoklad 1 nám však zabezpečuje jednoznačnú korešpondenciu medzi $\mathbf{S}(\mu))$ a $y(\mu)$ a teda aj množina $\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid 0 < \mu \leq \bar{\mu}\}$ je ohraničená.

Veta 2.5 *Nech* $\mu_k > 0,\ \forall k = 1, 2, \ldots,\ \lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$. *Potom existuje postupnosť* $\{\mu_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ *vybraná z* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *taká, že postupnosti*

$$\{\mathbf{X}(\mu_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}, \qquad \{y(\mu_{k_i}), \mathbf{S}(\mu_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$$

konvergujú k optimálnemu riešeniu, teda

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{i\to\infty} \mathbf{X}(\mu_{k_i}) = \mathbf{X}^*, \\ \lim_{i\to\infty} y(\mu_{k_i}) = y^*, \\ \lim_{i\to\infty} \mathbf{S}(\mu_{k_i}) = \mathbf{S}^*, \end{array}\right\} \tag{9}$$

kde $\mathbf{X}^* \in \mathcal{P}^*,\ (y^*, \mathbf{S}^*) \in \mathcal{D}^*$.

Dôkaz. Z Vety 2.4 máme, že existuje ohraničená postupnosť $\{(\mathbf{X}(\mu_k), y(\mu_k), \mathbf{S}(\mu_k))\}_{k=1}^{\infty}$, t.j. vieme vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{(\mathbf{X}(\mu_{k_i}), y(\mu_{k_i}), \mathbf{S}(\mu_{k_i}))\}_{i=1}^{\infty}$ takú, že platí (9). Pretože $(\mathbf{X}(\mu_{k_i}), y(\mu_{k_i}), \mathbf{S}(\mu_{k_i}))$ vyhovujú systému (8), limitným prechodom v prvých dvoch podmienkach dostávame, že $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ je prípustné riešenie. Z tretej podmienky vyplýva

$$\mathbf{X}^*\mathbf{S}^* = \lim_{i\to\infty} \mathbf{X}(\mu_{k_i})\mathbf{S}(\mu_{k_i}) = \lim_{i\to\infty} \mu_{k_i}\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

čo znamená, že trojica $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ optimálnym riešením úloh $(P), (D)$.
□

2.4 Symetrizácia podmienky komplementarity $\mathbf{XS} = 0$

Metódy vnútorného bodu pre riešenie úloh semidefinitného programovania súvisia s hľadaním riešenia systému (1) resp. (8). Problém spôsobuje fakt, že matica $\mathbf{XS}$ vo všeobecnosti nemusí byť symetrická, hoci $\mathbf{X} \in S^n, \mathbf{S} \in S^n$. Preto sa podmienka $\mathbf{XS} = 0$ zvykne nahradzovať "symetrizovanou" podmienkou, ktorá je s ňou ekvivalentná. Jednou z nich je tzv. AHO-symetrizácia (podľa [3]):

$$\frac{\mathbf{XS} + \mathbf{SX}}{2} = 0 \tag{10}$$

Existuje však množstvo ďalších symetrizácii matice $\mathbf{XS}$, ako napr.

$$\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}}{2}$$

a iné, ktoré využívajú rôzne numerické rozklady matíc $\mathbf{X}, \mathbf{S}$ (pozri [30], [31]).

2.5 Centrálna trajektória ako analytická funckcia $\mu > 0$

Nahraďme podmienku komplementarity v systéme 8 symetrizovanou podmienkou:

$$\left.\begin{array}{rr} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C}, & \mathbf{S} \succ 0, \\ \dfrac{\mathbf{XS} + \mathbf{SX}}{2} = \mu\mathbf{I}, & \mathbf{X} \succ 0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Ako sme spomenuli, centrálnu trajektóriu môžme chápať ako zobrazenie premennej μ. Ukážeme, že centrálna trajektória je analytická krivka na množine $\mathcal{P}^0 \times \mathcal{D}^0$. Ako uvidíme ďalej, táto vlastnosť vyplynie z Vety o implicitnej funkcii ([23], str. 46).

Veta 2.6 *Veta o implicitnej funkcii.*
Nech $g : R^{r+s} \to R^s$ je analytická funkcia premenných $w \in R^r$ a $z \in R^s$ taká, že

1. *existuje $(\bar{w}, \bar{z}) \in R^{r+s}$ také, že $g(\bar{w}, \bar{z}) = 0$,*

2. *Jacobiho matica zobrazenia g vzhľadom na premennú z je regulárna v bode $(\bar{w}, \bar{z})$.*

Potom existuje otvorená množina $\mathcal{O}(\bar{w}) \in R^r$ obsahujúca $\bar{w}$, otvorená množina $\mathcal{O}(\bar{z}) \in R^s$ obsahujúca $\bar{z}$ a analytická funkcia

$$f : \mathcal{O}(\bar{w}) \to \mathcal{O}(\bar{z})$$

taká, že $f(\bar{w}) = \bar{z}$ a

$$g(w, f(w)) = 0 \quad \forall\ w \in \mathcal{O}(\bar{w}).$$

Uvažujme maticu $\mathbb{A}$ definovanú v Kapitole 1 (pozri (3), (4)). Poznamenávame, že vďaka Predpokladu 1 platí $h(\mathbb{A}) = m$. Potom systém (11) môžme napísať aj v tvare

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{A} svec(\mathbf{X}) &= b, \\ \mathbb{A}^T y + svec(\mathbf{S}) &= svec(\mathbf{C}), \\ \tfrac{1}{2}(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) &= \mu \mathbf{I}. \end{aligned}\right\}$$

Zrejme platí (pozri Kapitola 6.3)

$$\frac{1}{2} svec(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = \frac{1}{2} svec(\mathbf{IXS} + \mathbf{SXI}) = (\mathbf{S} \star \mathbf{I}) svec(\mathbf{X}),$$

resp.

$$\frac{1}{2} svec(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = \frac{1}{2} svec(\mathbf{XSI} + \mathbf{ISX}) = (\mathbf{X} \star \mathbf{I}) svec(\mathbf{S}).$$

Teda podľa (27) Jacobiho matica systému (11) je

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^T & \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \star \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \star \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 2.2 *Nech* $\mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0$. *Potom Jacobiho matica systému* (11) *je regulárna.*

Dôkaz. Úpravami Jacobiho matice dostávame

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^T & \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \star \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \star \mathbf{I} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^T & \mathbf{I} \\ (\mathbf{X} \star \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{S} \star \mathbf{I}) & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -(\mathbf{X} \star \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{S} \star \mathbf{I}) & \mathbb{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbb{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

a teda $\mathbf{J}$ je regulárna práve vtedy, keď

$$\begin{pmatrix} -(\mathbf{X} \star \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{S} \star \mathbf{I}) & \mathbb{A}^T \\ \mathbb{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{12}$$

je regulárna. Pretože podľa Lemy 6.9 sú matice $\mathbf{X} \star \mathbf{I}, \mathbf{S} \star \mathbf{I}$ kladne definitné a teda regulárne, je matica $(\mathbf{X} \star \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{S} \star \mathbf{I})$ regulárna. Utvorme Schurov doplnok tejto matice v matici (12):

$$\mathbb{A}(\mathbf{X} \star \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{S} \star \mathbf{I})\mathbb{A}^T.$$

Pretože $\mathbb{A}$ má maximálnu hodnosť, je to regulárna matica a teda podľa Vety 6.2 je aj $\mathbf{J}$ regulárna.

□

Uvažujme teraz zobrazenia $\mathcal{A}$, resp. $\tilde{\mathcal{A}}$ definované v (2) a funkciu

$$F : S^n \times R^m \times S^n \times R \to R^m \times S^n \times S^n$$

premenných $\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu$, definovanú

$$F(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\mathbf{X}) - b \\ \tilde{\mathcal{A}}(y) + \mathbf{S} - \mathbf{C} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) - \mu\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Zrejme funkcia F je analytickou funkciou.

Veta 2.7 *Centrálna trajektória*

$$f : \mu \mapsto (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu))$$

je analytická pre $\mu > 0$.

Dôkaz. Nech $\mu_0 > 0$ je ľubovolné. Uvažujme funkciu F definovanú vyššie. Z Viet 2.1, 2.2, 2.3 vyplýva, že existuje riešenie

$$(\mathbf{X}(\mu_0), y(\mu_0), \mathbf{S}(\mu_0)), \ \mathbf{X}(\mu_0) \succ 0, \ \mathbf{S}(\mu_0) \succ 0$$

systému

$$F(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu_0) = 0$$

a Jacobiho matica v tomto bode je podľa Tvrdenia 2.2 regulárna. Môžeme použiť Vetu o implicitnej funkcii a dostávame, že existuje otvorená množina $\mathcal{O}(\mathbf{X}(\mu_0), y(\mu_0), \mathbf{S}(\mu_0))$, otvorený interval $\mathcal{I}(\mu_0) \subset R_{++}$ a analytická funkcia

$$f : \mathcal{I}(\mu_0) \to \mathcal{O}(\mathbf{X}(\mu_0), y(\mu_0), \mathbf{S}(\mu_0))$$

taká, že

$$f(\mu_0) = (\mathbf{X}(\mu_0), y(\mu_0), \mathbf{S}(\mu_0))$$

a

$$F(f(\mu), \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{I}(\mu_0).$$

Zrejme bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\mathcal{O}(\mathbf{X}(\mu_0), y(\mu_0), \mathbf{S}(\mu_0)) \subset S^n_{++} \times R^m \times S^n_{++}$. Keby totiž pre nejaké $\mu > 0$ bola matica $\mathbf{X}(\mu)$ alebo $\mathbf{S}(\mu)$ kladne semidefinitná a singulárna, tak by aj matica $\mathbf{X}(\mu)\mathbf{S}(\mu) + \mathbf{S}(\mu)\mathbf{X}(\mu)$ bola singulárna, ale to je spor. preto musí byť

$$\mathbf{X}(\mu) \succ 0, \qquad \mathbf{S}(\mu) \succ 0.$$

Z jednoznačnosti riešenia systému (11) teda vyplýva, že

$$f(\mu) = (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \quad \forall \mu \in \mathcal{I}(\mu_0).$$

□

3 Váľená centrálna trajektória v LP

Centrálna trajektória bola najskôr skúmaná v lineárnom programovaní a jej vlastnosti sú tu veľmi dobre popísané a analyzované ([1], [10], [12], [16], [43]). Tieto výsledky sa stali motiváciou pre definovanie centrálnej trajektórie a overenie jej vlastností v semidefinitnom programovaní, ktoré sme uviedli v predchádzajúcej kapitole. Definícia centrálnej trajektórie v semidefinitnom programovaní, tvrdenia týkajúce sa jej existencie, jednoznačnosti a súvisu s centrujúcim systémom a ich dôkazy sú analógiou príslušných tvrdení v lineárnom programovaní. V LP však boli dokázané i mnohé ďalšie tvrdenia o centrálnej trajektórii a pojem centrálnej trajektórie bol zovšeobecnený na tzv. váľenú centrálnu trajektóriu, ktorá má veľký význam pri analýze konvergenčných vlastností algoritmov. Tu uľ zovšeobecnenie z lineárneho programovania na semidefinitné nie je zrejmé a priamočiare a v literatúre sa vyskytli rôzne prístupy.
Aby sme mohli byť konkrétnejší, popíšeme najskôr centrálnu trajektóriu a jej vlastnosti v lineárnom programovaní a ukáľeme jej zovšeobecnenie na váľenú centrálnu trajektóriu. Majme danú dvojicu úloh lineárneho programovania:

$$\left.\begin{aligned} \min\nolimits_{x\in R^n} c^T x \\ \mathbf{A}x = b \\ x \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (LP),$$

$$\left.\begin{aligned} \max\nolimits_{y\in R^m} b^T y \\ \mathbf{A}^T y + s = c \\ s \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (LD),$$

kde $c \in R^n, \mathbf{A} \in R^{m\times n}, b \in R^m, m \leq n$. Označme

$$\mathcal{P}_L^0 = \{x \in R^n \mid \mathbf{A}x = b, x > 0\}$$

mnoľinu ostro prípustných riešení primárnej úlohy a

$$\mathcal{D}_L^0 = \{(y, s) \in R^m \times R^n \mid \mathbf{A}^T y + s = c, s > 0\}$$

mnoľinu ostro prípustných riešení duálnej úlohy. Predpokladajme, ľe platí
Predpoklad 1: $h(\mathbf{A}) = m$.
Predpoklad 2: $\mathcal{P}_L^0 \neq \emptyset, \mathcal{D}_L^0 \neq \emptyset$.
Predpoklad 1 zabezpečuje jednoznačnú korešpondenciu medzi premennými y a s na mnoľine prípustných riešení duálnej úlohy. Predpoklad 2 je dôleľitý pre budovanie teórie metód vnútorného bodu a je ekvivalentný tvrdeniu, ľe existuje riešenie úloh $(LP), (LD)$ a mnoľiny optimálnych riešení úloh $(LP), (LD)$ sú ohraničené.

Definícia 3.1 *Riešenie* (x^*, y^*, s^*) *dvojice úloh* $(LP), (LD)$ *sa nazýva ostro komplementárne ak platí* $x^* + s^* > 0$.

Definujme bariérové funkcie a k nim prislúchajúce úlohy:

$$f_\mu : R^n_{++} \to R \qquad f_\mu(x) = c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\left.\begin{array}{r} \min_{x\in R^n} f_\mu(x) \\ \mathbf{A}x = b \\ x > 0 \end{array}\right\} \qquad\qquad (LP)_\mu$$

a

$$g_\mu : R^m \times R^n_{++} \to R \qquad g_\mu(y,s) = b^T y + \mu \sum_{i=1}^{n} \ln s_i,$$

$$\left.\begin{array}{r} \max_{y\in R^m, s\in R^n} g_\mu(x,s) \\ \mathbf{A}^T y + s = c \\ s > 0 \end{array}\right\} \qquad\qquad (LD)_\mu.$$

Veta 3.1 *Pre každé $\mu > 0$ majú úlohy $(LP)_\mu$ a $(LD)_\mu$ jediné optimálne riešenie.*

Označme $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ riešenie dvojice úloh $(LP)_\mu$, $(LD)_\mu$. Teda môžme dobre definovať centrálnu trajektóriu nasledovným spôsobom.

Definícia 3.2 *Centrálnou trajektóriou v lineárnom programovaní nazývame množinu*

$$\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid \mu > 0\}$$

riešení perturbovaných úloh $(LP)_\mu$, $(LD)_\mu$, resp. zobrazenie

$$\phi : R \to R^n \times R^m \times R^n, \quad \phi(\mu) = (x(\mu), y(\mu), s(\mu)).$$

Veta 3.2 *Pre každé $\mu > 0$ je (x, y, s) riešením úloh $(LP)_\mu$, $(LD)_\mu$ práve vtedy, keď spĺňa systém*

$$\left.\begin{array}{rl} \mathbf{A}x = b, & x > 0, \\ \mathbf{A}^T y + s = c, & s > 0, \\ \mathbf{X}s = \mu e, & \end{array}\right\}$$

kde $\mathbf{X} = diag(x)$ a $e = (1, 1, \ldots, 1)$.

Veta 3.3 *Centrálna trajektória je analytickou funkciou $\mu > 0$.*

Veta 3.4 *Nech $\bar{\mu} > 0$. Potom je množina*

$$\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid 0 < \mu \leq \bar{\mu}\}$$

je ohraničená.

Veta 3.5 *Centrálna trajektória má limitné body pre $\mu \to 0$ a každý jej limitný bod je ostro komplementárnym riešením.*

Pojem centrálnej trajektórie možno ľahko zovšeobecniť na pojem váženej centrálnej trajektórie a to nasledovným spôsobom. Nech $w \in R^n, w > 0$. Definujme opäť bariérové funkcie a k nim prislúchajúce bariérové úlohy.

$$f^w_\mu : R^n_{++} \to R \qquad f^w_\mu(x) = c^T x = \mu \sum_{i=1}^{n} w_i \ln x_i$$

$$\left.\begin{array}{r}\min_{x\in R^n} f_\mu^w(x)\\ \mathbf{A}x=b\\ x>0\end{array}\right\} \qquad\qquad (LP)_\mu^w$$

a

$$g_\mu^w : R^m \times R^n_{++} \to R \qquad g_\mu^w(y,s) = b^Ty + \mu\sum_{i=1}^n w_i \ln s_i,$$

$$\left.\begin{array}{r}\max_{y\in R^m, s\in R^n} g_\mu^w(x,s)\\ \mathbf{A}^Ty+s=c\\ s>0\end{array}\right\} \qquad\qquad (LD)_\mu^w.$$

Potom ak platí Predpoklad 1 a 2, tak pre kaľdé $\mu > 0$ a $w \in R^n_{++}$ existuje jediné riešenie úloh $(LP)_\mu^w, (LD)_\mu^w$ a teda môľme dobre definovať váľenú centrálnu trajektóriu. Označme $(x_w(\mu), y_w(\mu), s_w(\mu))$ riešenie dvojice úloh $(LP)_\mu^w, (LD)_\mu^w$.

Definícia 3.3 *Nech $w \in R^n_{++}$. Mnoľina*

$$\{(x_w(\mu), y_w(\mu), s_w(\mu)) \mid \mu > 0\}$$

sa nazýva w-váľenou centrálnou trajektóriou.

Bod (x,y,s) je bodom centrálnej trajektórie práve vtedy, keď spĺňa systém

$$\left.\begin{array}{rl}\mathbf{A}x=b, & x>0,\\ \mathbf{A}^Ty+s=c, & s>0,\\ \mathbf{X}s=\mu w. & \end{array}\right\}$$

Vlastnosti centrálnej trajektórie v lineárnom programovaní, kroré sme spomenuli vyššie prechádzajú aj na váľenú centrálnu trajektóriu a ich dôkazy sú jednoduchou analógiou príslušných dôkazov pre klasickú trajektóriu. Ďalšie vlastnosti moľno nájsť v [10].

4 Váľená centrálna trajektória v SDP

4.1 Rôzne prístupy skúmania váľených trajektórii v SDP

Ako sme videli v Kapitole 3, v lineárnom programovaní môľme pojem centrálnej trajektórie ľahko rozšíriť na pojem váľenej centrálnej trajektórie. Mohli sme totiľ zostrojiť váhové bariérové funkcie a k nim prislúchajúce úlohy. Pouľitie tohto postupu v semidefinitnom programovaní sa ukazuje ako veľmi komplikované. Preto sa začali skúmať rôzne iné moľnosti definovania váľenej centrálnej trajektórie v SDP. Jedna z moľností, ako postupovať, vyplýva z faktu, ľe centrálnu trajektóriu (v lineárnom programovaní) môľme definovať ako mnoľinu riešení perturbovaných úloh s bariérovými účelovými funkciami ale aj ako mnoľinu riešení perturbovaných systémov pre $\mu > 0$.
Centrálna trajektória sa skúma častejšie pre úlohy lineárnej komplementarity. Riešiť úlohu lineárnej komplementarity znamená riešiť systém, ktorý môľe byť chápaný aj ako systém Kuhn-Tuckerovych podmienok nejakej konvexnej úlohy. Za dodatočných predpokladov, nájsť riešenie primárno-duálnej dvojice optimalizačných úloh znamená nájsť riešenie Kuhn-Tuckerovych podmienok.
Jeden z prvých prístupov skúmania váľenej centrálnej trajektórie (v semidefinitných úlohách lineárnej komplementarity) bol zaloľený na teórii maximálnych monotónnych zobrazení (pozri [37], [38], [24]). Autori tu predstavili úlohu komplementarity na symetrických maticiach, skúmali jej vlastnosti a navrhli metódy vnútorného bodu na jej riešenie.
Nový prístup, zaloľený na teórii lokálne homeomorfných zobrazení v nelineárnej analýze, zvolili autori Monteiro, Pang, ktorí rozšírili svoju prácu o zmiešaných úlohách komplementarity [29] na úlohy komplementarity na symetrických maticiach a aplikovali výsledky na úlohu semidefinitného programovania [30]. Na túto prácu nadväzuje [31], kde sa študujú vlastnosti zobrazení, ktoré sú uľitočné na charakterizovanie centrálnej trajektórie úloh komplementarity nad kuľeľom kladne semidefinitných matíc a súvisia so symetrizáciou rovnice komplementarity spomenutou vyššie. Centrálna trajektória je tu chápaná ako mnoľina $\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid \mu > 0\}$ riešení systému

$$\left.\begin{array}{rr} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu\triangle b_i, & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}, & \mathbf{S} \succ 0, \\ H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mu\mathbf{W}, & \mathbf{X} \succ 0. \end{array}\right\}, \tag{13}$$

kde $\triangle b \in R^m, \triangle\mathbf{C} \in S^n$ sú pevne zvolené, $\mu \in R_{++}$ je parameter a $\mathbf{W} \succ 0$ je váhová matica. Podmienka $H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mu\mathbf{W}$ nahrádza podmienku $\mathbf{XS} = \mu\mathbf{I}$ v systéme (8). Autori uvaľujú okrem štandardnej AHO-symetrizácie, t.j. zobrazenia $H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \mathbf{XS} + \mathbf{SX}/2$ napríklad aj funkcie

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}} \\ H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= (\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}})/2 \\ H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \mathbf{L}_{\mathbf{X}}^T\mathbf{S}\mathbf{L}_{\mathbf{X}} \\ H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= (\mathbf{U}_{\mathbf{S}}^T\mathbf{L}_{\mathbf{X}} + \mathbf{L}_{\mathbf{X}}^T\mathbf{U}_{\mathbf{S}})/2 \\ H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) &= \mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{XSY}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

kde $\mathbf{L_X}$ je dolný Choleského faktor matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{U_S}$ je horný Choleského faktor matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{Y}$ je jediná kladne definitná matica taká, ľe $\mathbf{YXY} = \mathbf{S}$ (pozri Dôsledok 6.1). Neskôr v článkoch [26], [27] autori Lu a Monteiro hovoria o limitných vlastnostiach váľených centrálnych trajektórii asociovaných so zobrazeniami $\mathbf{XS} + \mathbf{SX}$, resp. $\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$.
Na práce [30] a [31] nadväzujú autori Preiss a Stoer v článku [34] a zaoberajú sa váľenými centrálnymi trajektóriami súvisiacimi so zobrazením $\mathbf{XS} + \mathbf{SX}$ (AHO-symetrizácia). Nezávisle od [26], [27] sú dokázané tvrdenia súvisiace s analytickými vlastnosťami váľených trajektórii, pričom v porovnaní uvedenými prácami je pouľitý podstatne jednoduchší matematický aparát (napr. veta o implicitnej funkcii).
Napokon uvádzame prístup, ktorý uviedli autori Sturm a Zhang v práci [39]. Váľená centrálna trajektória je tu najskôr definovaná, ako mnľina riešení systému (13), pričom váhova matica $\mathbf{W}$ je uvaľovaná ako ľubovolná kladná diagonálna matica a $H(\mathbf{X}, \mathbf{S}) = \Lambda_{\mathbf{XS}}$, pričom $\Lambda_{\mathbf{XS}}$ je diagonálna matica, s vlastnými čislami matice $\mathbf{XS}$ na diagonále. Autori navyše ukázali, ľe je moľné dobre definovať váľenú centrálnu trajektóriu pre ľubovolnú kladne definitnú maticu $\mathbf{W}$.

4.2 Váľený centrujúci systém.

V ďalšom sa budeme zaoberať váľenými centrálnymi trajektóriami, súvisiacimi so zobrazením $\mathbf{XS} + \mathbf{SX}$. Inšpirovaní prácou [33] sa budeme snaľiť podať čo najjednohuchší dôkaz jej existencie. Ako sme uľ spomenuli, metódy vnútorného bodu pre riešenie systému (1) zvyčajne súvisia s trajektóriou riešení systému (11). Takáto trajektória sa zvykne nazývať prípustná, pretoľe riešenia systému (11) sa nachádzajú vo vnútri mnoľín prípustných riešení, t.j. v $\mathcal{P}^0, \mathcal{D}^0$. V ďalšom budeme skúmať situáciu, keď ostro prípustné riešenia (1) neexistujú (alebo sú neznáme). Pritom budeme uvaľovať, ľe sú splnené nasledovné predpoklady:
Predpoklad 1: Matice $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ sú lineárne nezávislé.
Predpoklad 2: Existuje riešenie systému (1).
Pripomenieme, ľe Predpoklad 1 zabezpečuje jednoznačnú korešpondenciu medzi premennými y a $\mathbf{S}$ na $\mathcal{D}^0$. Predpoklad 2 hovorí, ľe existuje také riešenie dvojice úloh $(P), (D)$, ktoré spĺňa vlastnosť silnej duality.
Namiesto systému (11) sa teraz budeme zaoberať systémom

$$\left.\begin{array}{rlr} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = & b_i + \mu\triangle b_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = & \mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}, & \mathbf{S} \succ 0, \\ \dfrac{\mathbf{XS} + \mathbf{SX}}{2} = & \mu\mathbf{W}, & \mathbf{X} \succ 0, \end{array}\right\} \tag{14}$$

kde $\triangle b \in R^m, \triangle\mathbf{C} \in S^n$ a $\mathbf{W}$ je váhová matica. Najskôr definujeme mnoľiny vhodných perturbačných vektorov $\triangle b$ a perturbačných matíc $\triangle\mathbf{C}$. Potom, pri pevne zvolenom $\triangle b, \triangle\mathbf{C}$ sa budeme zaoberať riešiteľnosťou systému (14) vzhľadom na voľbu parametra $\mu > 0$ a matice $\mathbf{W}$.
Všimnime si, ľe ak poloľíme

$$\triangle b_i = \frac{\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^0 - b_i}{\mu_0},$$

$$\triangle\mathbf{C} = \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i^0 + \mathbf{S}^0 - \mathbf{C}}{\mu_0}.$$

pre nejaké pevne zvolené $\mathbf{X}^0 \succ 0, y^0, \mathbf{S}^0 \succ 0$ také, ľe $\mathbf{X}^0\mathbf{S}^0 + \mathbf{S}^0\mathbf{X}^0 \succ 0$ a $\mu_0 > 0$, tak systém (14) má riešenie minimálne pre $\mu = \mu_0$ a $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0$, kde

$$\mathbf{W}^0 = \frac{\mathbf{X}^0\mathbf{S}^0 + \mathbf{X}^0\mathbf{S}^0}{2\mu_0}$$

a to trojicu $(\mathbf{X}^0, y^0, \mathbf{S}^0)$.
Pre ľubovolné $\mu > 0$ definujme mnoľinu

$$\mathcal{M}(\mu) = \left\{ \frac{1}{\mu}(\mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{X} - b_i, \dots, \mathbf{A}_m \bullet \mathbf{X} - b_m, \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} - \mathbf{C}) \in R^m \times S^n \;\middle|\; \mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0, \mathbf{XS} + \mathbf{SX} \succ 0, y \in R^m \right\}$$

Tvrdenie 4.1 *Nech $\mu > 0$. Potom $\mathcal{M}(\mu)$ je neprázdna konvexná mnoľina a platí $\mathcal{M}(\mu) = \tilde{\mathcal{M}}(\mu)$, kde*

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mu) = \left\{ \frac{1}{\mu}(\mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{X} - b_i, \dots, \mathbf{A}_m \bullet \mathbf{X} - b_m, \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} - \mathbf{C}) \in R^m \times S^n \;\middle|\; \mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0, y \in R^m \right\}$$

Dôkaz. Zrejme mnoľina $\tilde{\mathcal{M}}(\mu)$ je neprázdna a konvexná a platí $\mathcal{M}(\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}(\mu)$. Ukáľeme, ľe $\tilde{\mathcal{M}}(\mu) \subseteq \mathcal{M}(\mu)$. Nech $(\triangle b, \triangle\mathbf{C}) \in \tilde{\mathcal{M}}(\mu)$, t.j. existuje $\mathbf{X} \in S^n, y \in R^m, \mathbf{S} \in S^n$ tak, ľe

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu\triangle b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}, \\ \mathbf{X} \succ 0, \ \mathbf{S} \succ 0. \end{array}\right\} \tag{15}$$

To znamená, ľe existuje vnútorný bod dvojice úloh

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \min\{(\mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}) \bullet \mathbf{X} \;\big|\; \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu\triangle b_i, \ i = 1, \dots, m; \ \mathbf{X} \succeq 0\}$$

$$(\tilde{\mathcal{D}}) \quad \max\{(b + \mu\triangle b)^T y \;\Big|\; \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}; \ \mathbf{S} \succeq 0\}$$

a teda aj trajektória riešení perturbovaného systému

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu\triangle b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}, \\ \mathbf{XS} = \nu\mathbf{I}, \\ \mathbf{X} \succ 0, \ \mathbf{S} \succ 0. \end{array}\right\}$$

Z toho vyplýva, ľe existujú aj matice spĺňajúce (15) také, ľe $\mathbf{XS} + \mathbf{SX} \succ 0$.
□

Tvrdenie 4.2 *Nech* $\mu_0 > 0$. *Potom ak* $(\triangle b, \triangle \mathbf{C}) \in \mathcal{M}(\mu_0)$, *tak* $(\triangle b, \triangle \mathbf{C}) \in \mathcal{M}(\mu)\ \forall \mu \in (0, \mu_0\rangle$.

Dôkaz. Nech $\mu \in (0, \mu_0\rangle$ a nech $(\triangle b, \triangle \mathbf{C}) \in \mathcal{M}(\mu_0)$. To znamená, že existuje $(\mathbf{X}^0, y^0, \mathbf{S}^0)$ tak, že

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^0 = b_i + \mu_0 \triangle b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i^0 + \mathbf{S}^0 = \mathbf{C} + \mu_0 \triangle \mathbf{C}, \\ \mathbf{X}^0 \succ 0,\ \mathbf{S}^0 \succ 0. \end{array}\right\}$$

Z Predpokladu 2 vyplýva, že existuje prípustný bod $(\mathbf{X}^p, y^p, \mathbf{S}^p)$ úloh $(P), (D)$, t.j.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^p = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i^p + \mathbf{S}^p = \mathbf{C}, \\ \mathbf{X}^p \succeq 0,\ \mathbf{S}^p \succeq 0. \end{array}\right\}$$

Položme

$$\mathbf{X} = \frac{\mu}{\mu_0}\mathbf{X}^0 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)\mathbf{X}^p, \quad y = \frac{\mu}{\mu_0}y^0 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)y^p, \quad \mathbf{S} = \frac{\mu}{\mu_0}\mathbf{S}^0 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)\mathbf{S}^p$$

Zrejme $\mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0$ a $\forall i = 1, \ldots, m$ platí

$$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = \frac{\mu}{\mu_0}\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^0 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^p = \frac{\mu}{\mu_0}(b_i + \mu_0 \triangle b_i) + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) b_i = b_i + \mu \triangle b_i$$

a

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \frac{\mu}{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i^0 + \mathbf{S}^0\right) + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i^p + \mathbf{S}^p\right) =$$

$$= \frac{\mu}{\mu_0}(\mathbf{C} + \mu_0 \triangle \mathbf{C}) + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)\mathbf{C} = \mathbf{C} + \mu \triangle \mathbf{C}$$

□

Označme

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i + \mu \triangle b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} = \mathbf{C} + \mu \triangle \mathbf{C}, \\ \mathbf{X} \succ 0,\ \mathbf{S} \succ 0,\ \mathbf{XS} + \mathbf{SX} \succ 0. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Posledné tvrdenie nám hovorí, že ak máme dané parametre $\triangle b, \triangle \mathbf{C}$ a vieme, že existuje riešenie $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$ systému (16) pre nejaké $\mu = \mu_0 > 0$, tak tak existuje aj riešenie tohto systému pre každé $\mu \in (0, \mu_0\rangle$.

Uvažujme opäť zobrazenia $\mathcal{A}$, resp. $\tilde{\mathcal{A}}$ definované v (2). Nech $\mu, \mathbf{W}, \triangle b, \triangle \mathbf{C}$ sú dané parametre a nech zobrazenie

$$F : S^n \times R^m \times S^n \to R^m \times S^n \times S^n$$

je dané predpisom

$$F(\mu, \mathbf{W}, \triangle b, \triangle \mathbf{C})(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\mathbf{X}) - b - \mu \triangle b \\ \tilde{\mathcal{A}}(y) + \mathbf{S} - \mathbf{C} - \mu \triangle \mathbf{C} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) - \mu \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

V ďalšom budeme skúmať existenciu kladne definitných riešení systému

$$F(\mu, \mathbf{W}, \triangle b, \triangle \mathbf{C})(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) = 0. \tag{17}$$

Podobne ako v prípade prípustnej centrálnej trajektórie (pozri (3), (4), Kap.6.3 a Kap. 2.5) Jacobiho matica zobrazenia F je

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^T & \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \star \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \star \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 4.3 *Nech* $\mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0$. *Potom Jacobiho* J_F *matica zobrazenia* F *je regulárna a teda homogénny systém*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A}^T & \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \star \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \star \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} svec\Delta\mathbf{X} \\ \Delta y \\ svec\Delta\mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

má jediné riešenie $(\Delta\mathbf{X}, \Delta y, \Delta\mathbf{S}) = (0, 0, 0)$.

Poznámka. Systém (18) je zrejme ekvivalentný systému

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}(\Delta\mathbf{X}) = 0, \\ \tilde{\mathcal{A}}(\Delta y) + \Delta\mathbf{S} = 0, \\ \tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{X}\mathbf{S} + \mathbf{S}\Delta\mathbf{X}) + \tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{X}\Delta\mathbf{S}) = 0. \end{aligned} \right\}.$$

Dôkaz je rovnaký ako dôkaz Tvrdenia 2.4.
□
V nasledujúcej vete ukáľeme, ľe regularita Jakobiánu nám zabezpečuje jednoznačnosť riešenia systému (14).

Veta 4.1 *Ak existuje riešenie systému* (14)*, tak toto riešenie je jediné.*

Dôkaz. Predpokladajme, ľe existujú dve rôzne riešenia (14) a označme ich $(\mathbf{X}_1, y_1, \mathbf{S}_1)$, $(\mathbf{X}_2, y_2, \mathbf{S}_2)$. Poloľme

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \qquad \Delta y = y_1 - y_2, \qquad \Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2.$$

Zrejme platí

$$\mathcal{A}(\Delta\mathbf{X}) = 0, \qquad \tilde{\mathcal{A}}(\Delta y) + \Delta\mathbf{S} = 0 \tag{19}$$

a

$$\mathbf{X}_1\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_2\mathbf{X}_2 = 0. \tag{20}$$

Počítajme

$$\Delta\mathbf{X}\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{S}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\Delta\mathbf{S} = 2(\mathbf{X}_1\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{X}_1) - (\mathbf{X}_2\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{X}_1), \tag{21}$$

$$\Delta\mathbf{X}\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{S}\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2\Delta\mathbf{S} = -2(\mathbf{X}_2\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{X}_2) + (\mathbf{X}_2\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{X}_1). \tag{22}$$

Zo vzťahov $(20),(21),(22)$ dostávame, že

$$0 = [\Delta\mathbf{X}\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{S}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\Delta\mathbf{S}] + [\Delta\mathbf{X}\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{S}\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2\Delta\mathbf{S}] =$$

$$= \Delta\mathbf{X}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) + (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{S}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) + (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)\Delta\mathbf{S}. \tag{23}$$

Zrejme $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \succ 0$ a $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \succ 0$. Z Tvrdenia 4.3 a vzťahov (19) a (23) dostávame, že musí byť $\Delta\mathbf{X} = 0, \Delta y = 0, \Delta\mathbf{S} = 0$.
□
Majme dané $\mu_0 > 0$. Potom ak $(\triangle b, \triangle c) \in \mathcal{M}(\mu_0)$, vieme zvoliť $\mathbf{W}$ tak, aby existovalo riešenie systému (14) pre $\mu = \mu_0$. Zafixujme dvojicu $(\triangle b, \triangle c) \in \mathcal{M}(\mu_0)$. Pre $\mu > 0$ a $\mathbf{W} \succ 0$ označme

$$(\mathbf{X}(\mu, \mathbf{W}), y(\mu, \mathbf{W}), \mathbf{S}(\mu, \mathbf{W}))$$

riešenie systému (14), ak existuje.

Tvrdenie 4.4 *Nech $\mu_0 > 0$ a $\mathbf{W}_0 \succ 0$. Označme $\mathcal{O}(\mathbf{W}_0)$ nejaké ohraničené okolie $\mathbf{W}_0$. Potom je množina*

$$\big\{(\mathbf{X}(\mu, \mathbf{W}), y(\mu, \mathbf{W}), \mathbf{S}(\mu, \mathbf{W})) \;\big|\; \mu \in (0, \mu_0\rangle, \mathbf{W} \in \mathcal{O}(\mathbf{W}_0)\big\}$$

ohraničená.

Dôkaz. Majme dané $(\triangle b, \triangle c)$. Nech $\mu \in (0, \mu_0\rangle$ a $\mathbf{W} \in \mathcal{O}(\mathbf{W}_0)$ sú ľubovolné také, pre ktoré existuje riešenie systému (14). Toto riešenie označme $(\mathbf{X}, y, \mathbf{S})$. Z Predpokladu 2 máme, že existuje $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$:

$$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^* = b_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i^* + \mathbf{S}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{X}^* \succeq 0, \quad \mathbf{S}^* \succeq 0, \quad \mathbf{X}^*\mathbf{S}^* = 0.$$

Nech ďalej $(\mathbf{X}^0, y^0, \mathbf{S}^0)$ je riešenie systému (14) pre parametre $\mu = \mu_0, \mathbf{W} = \mathbf{W}_0$. Teda platí

$$\mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^0 = b_i + \mu_0 \triangle b_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i^0 + \mathbf{S}^0 = \mathbf{C} + \mu_0 \triangle \mathbf{C}, \quad \mathbf{X}^0\mathbf{S}^0 + \mathbf{S}^0\mathbf{X}^0 = 2\mu_0\mathbf{W}_0$$

Definujme

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{y} \\ \hat{\mathbf{S}} \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\mu_0} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^0 \\ y^0 \\ \mathbf{S}^0 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}^* \\ y^* \\ \mathbf{S}^* \end{pmatrix}.$$

Zrejme

$$\mathbf{A}_i \bullet \hat{\mathbf{X}} = \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^0 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^* = b_i + \mu \triangle b_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i \hat{y}_i + \hat{\mathbf{S}} = \frac{\mu}{\mu_0} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i^0 + \mathbf{S}^0\right) + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i y_i^0 + \mathbf{S}^0\right) = \mathbf{C} + \mu \triangle \mathbf{C}$$

a teda

$$\mathbf{A}_i \bullet (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = 0 \quad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i(\hat{y}_i - y_i) + (\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) = 0.$$

Preto $(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}, \hat{y}_i - y_i, \hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) \in \mathcal{N}$, a podľa Lemy 2.1 platí

$$(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) \bullet (\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) = 0.$$

Z toho

$$\hat{\mathbf{X}} \bullet \mathbf{S} + \mathbf{X} \bullet \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{X}} \bullet \hat{\mathbf{S}} + \mathbf{X} \bullet \mathbf{S} \leq \gamma,$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z toho, že

$$\hat{\mathbf{X}} \bullet \hat{\mathbf{S}} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \mathbf{X}^0 \bullet \mathbf{S}^0 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \mathbf{X}^* \bullet \mathbf{S}^* + \frac{\mu}{\mu_0}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)(\mathbf{X}^0 \bullet \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^0 \bullet \mathbf{X}^*) =$$

$$= \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \mu_0 tr(\mathbf{W}_0) + \frac{\mu}{\mu_0}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)(\mathbf{X}^0 \bullet \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^0 \bullet \mathbf{X}^*) \leq \mu_0\, tr(\mathbf{W}_0) + (\mathbf{X}^0 \bullet \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^0 \bullet \mathbf{X}^*)$$

a

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{S} = \mu\, tr(\mathbf{W}) \leq \beta,$$

lebo $0 < \mu < \mu_0$ a $\mathbf{W}$ patrí ohraničenému okoliu $\mathbf{W}_0$. Teda pre každé $\mu \in (0, \mu_0\rangle$ a $\mathbf{W} \in \mathcal{O}(\mathbf{W}_0)$ je množina bodov

$$\left\{(\mathbf{X}(\mu, \mathbf{W}), \mathbf{S}(\mu, \mathbf{W})) \;\middle|\; \mu \in (0, \mu_0\rangle,\ \mathbf{W} \in \mathcal{O}(\mathbf{M}_0)\right\}$$

podmnožinou množiny

$$\left\{(\mathbf{X}, \mathbf{S}) \mid \mathbf{X} \succeq 0,\ \mathbf{S} \succeq 0,\ \hat{\mathbf{X}} \bullet \mathbf{S} + \mathbf{X} \bullet \hat{\mathbf{S}} \leq \gamma\right\}$$

ktorá je podľa Dôsledku 6.1 ohraničená. Predpoklad 1 nám zabezpečuje jednoznačnú korešpondenciu medzi $y(\mu, \mathbf{W})$ a $\mathbf{S}(\mu, \mathbf{W})$ a teda aj množina

$$\left\{(\mathbf{X}(\mu, \mathbf{W}), y(\mu, \mathbf{W}), \mathbf{S}(\mu, \mathbf{W})) \;\middle|\; \mu \in (0, \mu_0\rangle,\ \mathbf{W} \in \mathcal{O}(\mathbf{W}_0)\right\}$$

je ohraničená.
□
Teraz ukážeme existenciu riešenia systému (14). V ďalšom budeme opäť uvažovať $(\triangle b, \triangle \mathbf{C})$ fixné. Uvažujme zobrazenie

$$G : S^n \times R^m \times S^n \times R \times S^n \to R^m \times S^n \times S^n$$

také, že

$$G(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu, \mathbf{W}) = F(\mu, \mathbf{W}, \triangle b, \triangle \mathbf{C})(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}).$$

Teda parametre $\mu, \mathbf{W}$ zobrazenia budeme považovať za premenné zobrazenia G.

Veta 4.2 *Nech*

$$\phi : \langle 0, 1\rangle \to (0, \bar{\mu}\rangle \times S^n_{++}, \qquad \phi(t) = (\mu(t), \mathbf{W}(t))$$

je spojitá cesta z $\phi(0) = (\mu(0), \mathbf{W}(0))$ *do* $\phi(1) = (\mu(1), \mathbf{W}(1))$ *a predpokladajme, že systém*

$$G(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu(0), \mathbf{W}(0)) = 0$$

má riešenie $(\mathbf{X}_0, y_0, \mathbf{S}_0)$*, kde* $\mathbf{X}_0 \succ 0, \mathbf{S}_0 \succ 0$*. Potom* $\forall t \in \langle 0, 1\rangle$ *má systém*

$$G(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \mu(t), \mathbf{W}(t)) = 0$$

jediné riešenie $\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t$*, kde* $\mathbf{X}_t \succ 0, \mathbf{S}_t \succ 0$*. Navyše existuje funkcia*

$$g : R_{++} \times S^n_{++} \to S^n_{++} \times R^m \times S^n_{++},$$

ktorá je analytická na nejakom okolí $\phi(t)$ *a* $g(\phi(t)) = (\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t)$*.*

Dôkaz. Uvažujme pre $t \in \langle 0, 1\rangle$ nelineárny systém

$$G(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}, \phi(t)) = 0 \qquad \mathbf{X} \succ 0, \mathbf{S} \succ 0. \tag{24}$$

Pretože $(\mathbf{X}_0, y_0, \mathbf{S}_0)$ je riešením tohto systému pre $t = 0$ a platí $\mathbf{X}_0 \succ 0, \mathbf{S}_0 \succ 0$, z Tvrdenia 5.5 dostávame, že Jacobiho matica tohto systému vzhľadom na premenné $\mathbf{X}, y, \mathbf{S}$ je v bode $(\mathbf{X}_0, y_0, \mathbf{S}_0, \varphi(0))$ regulárna. Podľa vety o implicitnej funkcii existuje analytická funkcia

$$g : R_{++} \times S^n_{++} \to S^n \times R^m \times S^n$$

taká, že

$$g(\phi(0)) = g(\mu(0), \mathbf{W}(0)) = (\mathbf{X}_0, y_0, \mathbf{S}_0)$$

a

$$G(g(\phi(t)), \phi(t)) = G(g(\mu(t), \mathbf{W}(t)), \mu(t), \mathbf{W}(t)) = 0$$

na nejakom okolí bodu $t = 0$. Nech

$$g(\mu(t), \mathbf{W}(t)) = (\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t)$$

a nech $\bar{t} \in \langle 0, 1\rangle$ je maximálne také, že

$$G(\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t, \mu(t), \mathbf{W}(t)) = 0 \quad \forall t \in \langle 0, \bar{t}).$$

Potom podľa Vety 4.1 je $(\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t)$ jediné riešenie systému

$$F(\mu(t), \mathbf{W}(t), \triangle b, \triangle \mathbf{C})(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) = 0$$

pre $t \in \langle 0, \bar{t})$. Keby pre nejaké t bola niektorá z matíc $\mathbf{X}_t, \mathbf{S}_t$ kladne semidefinitná, singulárna, tak aj matica

$$\mathbf{X}_t\mathbf{S}_t + \mathbf{S}_t\mathbf{X}_t = 2\mu(t)\mathbf{M}(t)$$

by musela byť singulárna, ale to je v spore s našimi predpokladmi. Teda musí platiť

$$\mathbf{X}_t \succ 0, \mathbf{S}_t \succ 0 \qquad \forall\ 0 \leq t < \bar{t}$$

Teraz ukážeme, že existuje aj $g(\phi(\bar{t}))$ a platí $\mathbf{X}_{\bar{t}} \succ 0, \mathbf{S}_{\bar{t}} \succ 0$. Pretože $\langle 0, 1\rangle$ je kompaktný interval a ϕ je spojitá cesta, tak aj $\phi(\langle 0, 1\rangle)$ je kompaktná podmnožina $(0, \bar{\mu}\rangle \times S^n_{++}$. Teda

$$\{g(\phi(t)) = (\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t) \mid 0 \leq t < \bar{t}\} \subset \{(\mathbf{X}_t, y_t, \mathbf{S}_t) \mid (\mu(t), \mathbf{W}(t)) \in \phi(\langle 0, 1\rangle)\}$$

čo je podľa Tvrdenia 5.6 ohraničená množina. Nech $t_k \in \langle 0, \bar{t}), k = 1, 2, ...$ a $\lim_{k\to\infty} t_k = \bar{t}$. Potom existuje postupnosť $\{t_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ vybraná z $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{j\to\infty} g(\phi(t_{k_j})) = (\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{S}}).$$

Pretože platí

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}_{t_{k_j}} = b_i + \mu(t_{k_j})\triangle b_i & i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y^i_{t_{k_j}} + \mathbf{S}_{t_{k_j}} = \mathbf{C} + \mu(t_{k_j})\triangle \mathbf{C} & \mathbf{S}_{t_{k_j}} \succ 0 \\ \mathbf{X}_{t_{k_j}} \mathbf{X}_{t_{k_j}} + \mathbf{X}_{t_{k_j}} \mathbf{X}_{t_{k_j}} = 2\mu(t_{k_j})\mathbf{M}(t_{k_j}) & \mathbf{X}_{t_{k_j}} \succ 0 \end{array}$$

tak limitným prechodom $j \to \infty$ dostávame

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_i \bullet \bar{\mathbf{X}} = b_i + \mu(\bar{t})\triangle b_i & i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \bar{y}^i + \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} + \mu(\bar{t})\triangle \mathbf{C} & \bar{\mathbf{S}} \succeq 0 \\ \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{X}} = 2\mu(\bar{t})\mathbf{M}(\bar{t}) & \bar{\mathbf{X}} \succeq 0 \end{array}$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že matice $\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{S}}$ musia byť kladne definitné. Teda $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ je riešenie systému (24) pre $t = \bar{t}$. Jacobiho matica tohto systému v bode $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ je regulárna a z Vety 4.1 dostávame, že $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{y}, \bar{\mathbf{S}})$ je jediné riešenie systému

$$F(\mu(t), \mathbf{W}(t), \triangle b, \triangle \mathbf{C})(\mathbf{X}, y, \mathbf{S}) = 0.$$

Z vety o implicitnej funkcii vyplýva, že existuje nejaké otvorené okolie bodu $\bar{t} \in \langle 0, 1\rangle$, v ktorom pre každé t existuje riešenie systému (24). Z toho a zmaximality $\bar{t}$ vyplýva, že $\bar{t} = 1$.
□

4.3 Vážená centrálna trajektória a konvergencia k optimálnemu riešeniu

Z Viet 4.1, 4.2 vyplýva, že môžme dobre definovať váženú centrálnu trajektóriu nasledovným spôsobom.

Definícia 4.1 *Vážená centrálna trajektória.*
Majme dané $\triangle b \in R^m, \triangle \mathbf{C} \in S^n, \mathbf{W} \in S^n_{++}$. Váženou centrálnou trajektóriou nazývame množinu

$$\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid \mu > 0\}$$

riešení systému

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} &= b_i + \mu\triangle b_i, & i &= 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i + \mathbf{S} &= \mathbf{C} + \mu\triangle\mathbf{C}, & \mathbf{S} &\succ 0, \\ \frac{\mathbf{XS}+\mathbf{SX}}{2} &= \mu\mathbf{W}, & \mathbf{X} &\succ 0. \end{aligned}\right\}$$

Poznámka. Podobne ako v prípade klasickej centrálnej trajektórie v SDP môľme chápať váľenú centrálnu trajektóriu ako zobrazenie

$$f : R_{++} \to S^n_{++} \times R^m \times S^n_{++}, \quad f(\mu) = (\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)),$$

Veta 4.3 *Existuje postupnosť* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *taká, ľe* $\lim_{k\to\infty}\mu_k = 0$ *a limita*

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{X}(\mu_k), y(\mu_k), \mathbf{S}(\mu_k)) = (\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*),$$

kde $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ *je riešenie systému* (1).

Dôkaz. Z Tvrdenia 4.4 vyplýva, ľe mnoľina

$$\{(\mathbf{X}(\mu), y(\mu), \mathbf{S}(\mu)) \mid 0 < \mu \le \bar{\mu}\}$$

je ohraničená pre $\bar{\mu} > 0$. To znamená, ľe vieme vybrať postupnosť $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ takú, ľe

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k = 0$$

a $\{(\mathbf{X}(\mu_k), y(\mu_k), \mathbf{S}(\mu_k))\}_{k=1}^\infty$ konverguje k nejakému bodu $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$. Zrejme $\forall k = 1, 2, \dots$ platí

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}(\mu_k) &= b_i + \mu_k\triangle b_i, & i &= 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i(\mu_k) + \mathbf{S}(\mu_k) &= \mathbf{C} + \mu_k\triangle\mathbf{C}, & \mathbf{S}(\mu_k) &\succ 0, \\ \frac{\mathbf{X}(\mu_k)\mathbf{S}(\mu_k)+\mathbf{S}(\mu_k)\mathbf{X}(\mu_k)}{2} &= \mu_k\mathbf{W}, & \mathbf{X}(\mu_k) &\succ 0, \end{aligned}\right\}$$

a limitným prechodom $k \to \infty$ dostávame

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X}^* &= b_i, & i &= 1,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i^* + \mathbf{S}^* &= \mathbf{C}, & \mathbf{S}^* &\succeq 0, \\ \frac{\mathbf{XS}+\mathbf{SX}}{2} &= \mathbf{0}, & \mathbf{X}^* &\succeq 0. \end{aligned}\right\}$$

Teda $(\mathbf{X}^*, y^*, \mathbf{S}^*)$ je riešenie systému (1).

5 Prehľad súčasného stavu problematiky a ciele dizertačnej práce

5.1 Prehľad súčasného stavu problematiky

Ako sme uľ spomenuli, centrálna trajektória je najdôleľitejším pojmom pri študovaní metód vnútorného bodu. Je analytickou krivkou bariérového parametra μ, leľí v mnoľine $\mathcal{P}^0 \times \mathcal{D}^0$ a vedie k optimálnemu riešeniu úloh (P) a (D). Jej vlastnosti boli a stále sú zoširoka študované pre jej významné postavenie pri analýze algoritmov vnútorného bodu. Pojem centrálnej trajektórie sa neskôr zovšeobecnil na pojem váľenej centrálnej trajektórie. Zatiaľ čo váľená centrálna trajektória v lineárnom programovaní sa dá jednoducho odvodiť pomocou úloh s váhovou bariérovou účelovou funkciou, koncepcia váľenej trajektórie v semidefinitnom programovaní nie je jednoznačná. Definovanie tejto trajektórie pomocou váhových bariérových funkcii sa javí ako zloľité a preto vzniklo mnoľstvo rôznych prístupov jej definovania (pozri Kapitola 4.1). Váľené trajektórie či uľ v lineárnom alebo semidefinitnom programovaní tvoria zvláštnu triedu funkcií, ktorých špeciálnym prípadom je klasická centrálna trajektória. Tieľ konvergujú k optimálnemu riešeniu úlohy a navyše kaľdým vnútorným bodom mnoľiny prípustných riešenií moľno "viesť" nejakú váľenú trajektóriu, čo je veľmi dôleľitá vlastnosť pri analýze niektorých algoritmov vnútorného bodu.

Centrálna trajektória sa spočiatku skúmala v lineárnom programovaní. V Kapitole 3 sme sformulovali niektoré jej vlastnosti, ako aj vlastnosti váľenej centrálnej trajektórie. Významnými sú aj limitné vlastnosti centrálnej trajektórie v LP, ktoré sú popísané napr. v prácach [11], [35]. Je tu uvedené, ľe kaľdý hromadný bod centrálnej trajektórie pre $\mu \to 0$ je ostro komplementárnym riešením a navyše je aj tzv. analytickým stredom mnoľiny optimálnych riešení. Pretoľe analytický stred je definovaný jednoznačne, táto vlastnosť implikuje konvergenciu centrálnej trajektórie k analytickému stredu mnoľiny optimálnych riešení. V mnohých ďalších prácach boli skúmané limitné vlastnosti derivácii centrálnej trajektórie pre $\mu \to 0$. V práci [1] bola ukázaná existencia konečných prvých derivácii a následne v [10] existencia konečných derivácii ľubovolného rádu centrálnej trajektórie v bode $\mu = 0$. Autori článkov [12] (pozri aj [16]) a [43] nezávisle na sebe ukázali, ľe centrálna trajektória je nie len analytickou funkciou bariérového parametra $\mu > 0$, ale dá sa analyticky rozšíriť aj na $\mu = 0$. Vlastnosťami centrálnej trajektórie v úlohách lineárnej komplementarity sa okrem iných zaoberala aj práca [29]. Výsledky týchto prác v sebe zahŕňali nie len klasickú, ale aj váľenú trajektóriu v lineárnom programovaní.

V semidefinitnom programovaní bola spočiatku snaha charakterizovať vlastnosti centrálnej trajektórie pomocou postupov pouľitých v lineárnom programovaní. Autorom [9] sa podarilo ukázať, ľe kaľdý hromadný bod centrálnej trajektórie musí byť maximálne komplementárne riešenie. V práci [18] však bolo ukázané, ľe ak neexistuje ostro komplementárne riešenie, tak centrálna trajektória nemusí konvergovať k analytickému stredu mnoľiny optimálnych riešení. Teda aplikovať postupy z lineárneho programovania nebolo moľné a autori uviedli dôkaz konvergencie centrálnej trajektórie v SDP, zaloľený na výsledkoch z algebraickej geometrie. Ukázalo sa tieľ, ľe postupy pouľité pre úlohy lineárnej komplementarity moľno pouľiť aj pre úlohy komplementarity nad symetrickými maticami a ľe trajektória takýchto úloh konverguje k optimálnemu riešeniu (pozri [28]). Pretoľe úlohy semidefinitného programovania sú podtriedou takýchto úloh, môľme tu hovoriť o alternatívnom dôkaze konvergencie centrálnej trajektórie v SDP.

Limitné vlastnosti centrálnej trajektórie v SDP sa študujú zvlášť za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia a zvlášť bez neho. Autori [28] ukázali, ľe za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia primárno-duálna centrálna trajektória konverguje k analytickému stredu primárno-duálnej mnoľiny optimálnych riešení a vzdialenosť z ľubovolného bodu centrálnej trajektórie do tohto analytického stredu je ohraničená duálnou medzerou. V práci [17] sú odvodené nutné a postačujúce podmienky existencie ostro komplementárneho riešenia. Tieľ je ukázané, ľe vo všeobecnosti centrálna trajektória konverguje k analytickému stredu nejakej podmnoľiny mnoľiny optimálnych riešení a tieľ sú odvodené postačujúce podmienky na to aby táto podmnoľina koincidovala s mnoľinou optimálnych riešení. V práci [13] bolo pomocou prístupu zaloľenom na vete o implicitnej funkcii ukázané, ľe za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia sa dá centrálna trajektória analyticky rozšíriť aj na $\mu = 0$. Ako dôsledok je uvedené, ľe derivácie ľubovolného rádu centrálnej trajektórie majú konečné limity pre $\mu \to 0$. Autori práce [5] študujú asymptotické vlastnosti centrálnej trajektórie degenerovaných úloh SDP, teda takých, pre ktoré neexistuje ostro komplementárne riešenie.

Ako sme uľ spomenuli, pri skúmaní váľenej centrálnej trajektórie sa objavilo niekoľko rôznych prístupov, a výsledkom príslušných prác bol dôkaz existencie a niektorých asymptotických vlastností váľenej trajektórie v SDP. Existencia váľenej centrálnej trajektórie pre úlohu semidefinitného programovania bola študovaná v [30], [31] a práci [39]. V prácach [26], [27] a [34] sa skúmali asymptotické vlastnosti váľených trajektórii za predpokladu existencie ostro komplementárneho riešenia.

5.2 Prehľad doktorandom dosiahnutých výsledkov

Predkladaná písomná práca k dizertačnej skúške obsahuje prehľad doterajších poznatkov týkajúcich sa prevaľne centrálych trajektórii v semidefinitnom programovaní, ako aj niekoľko nových, jednoduchších dôkazov tvrdení, pôvodne sformulovaných v [30], [31], [33], [23].

Vlastnosti klasickej centrálnej trajektórie v semidefinitnom programovaní uvedené v Kapitole 2 sú spracované prevaľne podľa prednášok [15], pričom v spolupráci so školiteľom je podaný nový, zjednodušený dôkaz ohraničenosti centrálnej trajektórie (Veta 2.4, Časť 2.3). Časť 2.5 je spracovaná podľa [23], aľ na dôkaz regularity Jacobiánu (t.j. dôkaz Tvrdenia 2.2), ktorý je originálny.

V Časti 5.2 je podobne ako v článku [33], ktorý sa zaoberá váľenou centrálnou trajektóriou pre semidefinitné úlohy lineárnej komplelentarity, dokázaná existencia centrálnej trajektórie, ale pre úlohu semidefinitného programovania. Základná myšlienka dôkazu je síce prebratá z práce [33] a aplikovaná na SDP, ale niektoré kroky a dôkazy sú omnoho jednoduchšie, ako by boli iba priamym prepisom dôkazu z [33] na SDP. Napr. v predkladanej práci vyuľívame dôkaz regularity Jacobiánu pre klasickú trajektóriu v SDP spomenutý vyššie, nový dôkaz jednoznačnosti riešenia (Veta 4.1), zjednodušený dôkaz

ohraničenosti mnoľiny riešení perturbovaného systému (Tvrdenie 4.4), ktorý vyuľíva myšlienku dôkazu Vety 2.4. Dôkaz Vety 4.2 je voľným spracovaním dôkazu príslušného tvrdenia z [33].
Kapitola 6 je spracovaná pomocou [7], [15], [19], [36], pričom dôkaz Dôsledku 6.1, Lemy 6.5, Lemy 6.7 a Lemy 6.8 sú robené samostatne.

5.3 Ciele dizertačnej práce

Na predcházdajúcich riadkoch sme zhrnuli doterajšie výsledky týkajúce sa centrálnej trajektórie v semidefinitnom programovaní. Inšpirovaní týmito prácami teraz uvedieme budúce ciele našej dizertačnej práce.

- Motivovaní článkom [5] budeme skúmať triedu tzv. degenerovaných úloh semidefinitného programovania, t.j. takých, pre ktoré neexistuje ostro komplementárne riešenie a zvlášť asymptotické vlastnosti centrálnej trajektórie pre túto špeciálnu triedu úloh.

- Podobne ako v Kapitole 4 (časť 4.2, 4.3) sa pokúsime podať jednoduchší dôkaz existencie rôznych typov váľených centrálnych trajektórii, špeciálne pre váľenú trajektóriu asociovanú so zobrazením $\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$.

- V nadväznosti na článok [34] a budeme skúmať limitné vlastnosti centrálnej trajektórie asociovanej so zobrazením $\mathbf{XS} + \mathbf{SX}$. Pokúsime sa tieľ analyzovať situáciu pri rôznych prístupoch definovania centrálnej trajektórie.

6 Dodatok

6.1 Pomocné tvrdenia o symetrických maticiach

Lema 6.1 *Nech* $\mathbf{V} \succ 0, \mathbf{W} \succ 0$. *Potom existuje matica* $\mathbf{P} \in R^{n \times n}$ *a* $\mathbf{\Lambda} \succ 0$ *tak, ľe*

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T \quad \mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T.$$

Dôkaz. Môľme napísať $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$, pričom $\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \succ 0, \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \succ 0$. Matica $\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}$ je kladne definitná a moľno ju diagonalizovať':

$$\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}},$$

kde $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}, \mathbf{\Lambda}$ je kladná diagonálna. Definujme $\mathbf{P} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}$. Potom

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{\mathbf{T}} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.$$

□

Dôsledok 6.1 *Nech* $\mathbf{V} \succ 0, \mathbf{W} \succ 0$. *Potom existuje jediná matica* $\mathbf{U} \succ 0$ *taká, ľe*

$$\mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{W}.$$

Dôkaz. Podľa predchádzajúcej lemy existuje regulárna matica $\mathbf{P}$ taká, ľe $\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$ a $\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T$. Definujme $\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T$. Potom zrejme

$$\mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T = \mathbf{W}.$$

Dokáľme teraz jednoznačnosť. Predpokladajme, ľe existujú dve rôzne kladne definitné matice $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$ také, ľe

$$\mathbf{U}_1\mathbf{V}\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2\mathbf{V}\mathbf{U}_2 = \mathbf{W}.$$

Potom zrejme $(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2)\mathbf{V}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) = 0$. Z toho, ľe $\mathbf{V} \succ 0$ a teda je regulárna, vyplýva $h(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) = 0$ a preto $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

Lema 6.2 *Funkcia* $\ln\det(\mathbf{X})$ *je rýdzo konkávna na* S^n_{++}.

Dôkaz. Nech $\mathbf{X} \succ 0, \mathbf{Y} \succ 0, \mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$ a nech $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Potom z Lemy 6.1 a konkávnosti funkcie $\ln x$ dostávame:

$$\ln\det(\alpha\mathbf{X} + (1-\alpha)\mathbf{Y}) = \ln\det(\alpha\mathbf{P}\mathbf{P}^T + (1-\alpha)\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T) =$$

$$= \ln\det(\mathbf{P}(\alpha\mathbf{I} + (1-\alpha)\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^T) = \ln\det\mathbf{P}\mathbf{P}^T + \ln\prod_{i=1}^{n}(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) =$$

$$= \ln\det\mathbf{P}\mathbf{P}^T + \sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) > \ln\det\mathbf{P}\mathbf{P}^T + \sum_{i=1}^{n}(\alpha\ln 1 + (1-\alpha)\ln\lambda_i) =$$

$$= \ln\det\mathbf{P}\mathbf{P}^T + (1-\alpha)\ln\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \alpha\ln\det\mathbf{P}\mathbf{P}^T + (1-\alpha)(\ln\det\mathbf{P}\mathbf{P}^T + \ln\det\mathbf{\Lambda}) =$$

$$= \alpha\ln\det\mathbf{X} + (1-\alpha)\ln\det\mathbf{Y},$$

□

Lema 6.3 *Nech $K \subset S^n_{++}, K \neq \emptyset$ je konvexná, uzavretá a neohraničená. Potom*

$$\forall \mathbf{V} \in K \; \exists \mathbf{W} \in K : \; \mathbf{W} - \mathbf{V} \succeq 0, \; \mathbf{W} - \mathbf{V} \neq 0,$$

a

$$\{\mathbf{V}_t \mid \mathbf{V}_t = \mathbf{V} + t(\mathbf{W} - \mathbf{V}), \; t \geq 0\} \subset K.$$

Dôkaz. Zo známej vety z konvexnej analýzy dostávame, ľe za daných predpokladov z kaľdého bodu mnoľiny K moľno viesť polpriamku, ktorá leľí v K. Teda

$$\forall \mathbf{V} \in K \; \exists \mathbf{A} \in S^n, \; \mathbf{A} \neq 0 : \quad \mathbf{V} + t\mathbf{A} \in K \; \forall t \geq 0. \tag{25}$$

Poloľme $\mathbf{W} = \mathbf{V} + \mathbf{A}$. Treba ešte ukázať, ľe $\mathbf{A} \succeq 0$. Nech $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$, kde $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{I}$ a $\mathbf{D}$ je matica s vlastnými číslami $\mathbf{A}$ na diagonále. Ak $\mathbf{A} \not\succeq 0$, tak aspoň jedno vlastné číslo je záporné. Z (25) vyplýva, ľe

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} + t\mathbf{D} \succ 0 \; \forall t \geq 0.$$

Pre dosť veľké t bude ma matica $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} + t\mathbf{D}$ na diagonále záporné číslo, čo je spor.
□

Lema 6.4 *Nech $f : S^n_{++} \to R, \; f(\mathbf{X}) = \ln \det \mathbf{X}$. Potom*

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1}.$$

Dôkaz. Označme $\mathbf{X}_{kj}$ prvok k-teho riadku a j-teho stĺpca matice $\mathbf{X}$. Laplaceov rozvoj $\det \mathbf{X}$ podľa j-teho riadku je

$$\det \mathbf{X} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \mathbf{X}_{kj} \det X_{kj},$$

kde $X_{kj} \in R^{n-1 \times n-1}$ je algebraický doplnok prvku x_{kj}. Platí

$$\frac{\partial \ln \det \mathbf{X}}{\partial x_{kj}} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} (-1)^{k+j} \det X_{kj} = (\mathbf{X}^T)^{-1}_{kj} = (\mathbf{X})^{-1}_{kj},$$

kde $(\mathbf{X})^{-1}_{kj}$ je prvok k-teho riadku a j-teho stĺpca matice $\mathbf{X}^{-1}$. □

Lema 6.5 *Nech $\mathbf{U} \succ 0$. Mnoľina $\{\mathbf{V} \succeq 0; \; \mathbf{U} \bullet \mathbf{V} \leq \beta\}$ je ohraničená pre kaľdé $\beta \geq 0$.*

Dôkaz. Označme

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{V} \succeq 0; \; \mathbf{U} \bullet \mathbf{V} \leq \beta\}.$$

Zrejme mnoľina $\mathcal{B}$ je konvexná a uzavretá. Predpokladajme, ľe je neohraničená. Potom

$$\exists \mathbf{A} \succeq 0, \; \mathbf{A} \neq 0 : \quad \mathbf{V} + t\mathbf{A} \in \mathcal{B} \; \forall t \geq 0.$$

Teda

$$\mathbf{U} \bullet (\mathbf{V} + t\mathbf{A}) = \mathbf{U} \bullet \mathbf{V} + t\mathbf{U} \bullet \mathbf{A} \leq \beta \quad \forall t \geq 0.$$

Avšak podľa Lemy 6.8 je $\mathbf{U} \bullet \mathbf{A} > 0$ a teda dostávame spor.
□

Dôsledok 6.2 *Nech* $\mathbf{U}^0 \succ 0, \mathbf{V}^0 \succ 0$. *Potom*

$$\{(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \mid \mathbf{U} \succeq 0, \mathbf{V} \succeq 0, \mathbf{U} \bullet \mathbf{U}^0 + \mathbf{V} \bullet \mathbf{V}^0 \leq \gamma\}$$

je ohraničená mnoľina.

Lema 6.6 *Ak* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je kladne semidefinitná, tak platí*

$$|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}. \tag{26}$$

Pre kladne definitnú maticu a $i \neq j$ *platí ostrá nerovnosť.*

Dôkaz. Označme $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in R^n$ s jednotkou na k-tom mieste. Teraz pre $\forall \alpha \in R$ a $i \neq j$ utvorme vektor $0 \neq x = e_i + \alpha e_j \in R^n$. Potom

$$0 \leq x^T \mathbf{A} x = a_{ii} + 2\alpha a_{ij} + \alpha^2 a_{jj}$$

Teda pre diskriminant musí platiť $4(a_{ij}^2 - a_{ii}a_{jj}) \leq 0 \Leftrightarrow a_{ij}^2 \leq a_{ii}a_{jj}$.
□

Dôsledok 6.3 *Ak má kladne (záporne) semidefinitná matica nulový prvok na diagonále, tak príslušný riadok a stĺpec sú nulové.*

Lema 6.7 $\mathbf{X} \succeq 0,\ tr(\mathbf{X}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Dôkaz. Stopu môľme definovať ako súčet vlastných čísel matice. Ale vlastné čísla kladne semidefinitnej matice sú nezáporné, teda v našom prípade musia byť nutne nulové. Potom zrejme aj matica $\mathbf{X}$ je nulová.
□

Dôsledok 6.4 *Nech* $\mathbf{X} \succeq 0, \mathbf{Y} \succeq 0$. *Potom*

$$\mathbf{XY} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = 0.$$

Dôkaz.

$$0 = \mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = tr(\mathbf{XY}) = tr(\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}})$$

Matica $\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}$ je kladne semidefinitná a teda podľa predchádzajúcej lemy $\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{0}$. Platí

$$\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}})^T$$

a teda $\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{0}$. Preto $\mathbf{XY} = 0$.
□

Lema 6.8 *Nech* $\mathbf{X} \succ 0, \mathbf{Y} \succeq 0$. *Potom*

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{0}.$$

Dôkaz. Platí

$$\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = tr(\mathbf{XY}) = tr(\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}) = 0$$

a teda podľa predchádzajúcej lemy je $\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{0}$. Pretoľe $\mathbf{X} \succ 0$ a teda je regulárna, platí

$$h(\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}) = h(\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Preto $\mathbf{Y}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Y} = 0$.
□

6.2 Schurov doplnok

Definícia 6.1 *Nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$$

je bloková matica (nie vo všeobecnosti štvorcová) s regulárnym blokom $\mathbf{A_{11}}$ *Potom Schurov doplnok podmatice* $\mathbf{A_{11}}$ *v* $\mathbf{A}$ *(ozn.* $[\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$*) je matica*

$$[\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}] = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}}\mathbf{A_{11}^{-1}}\mathbf{A_{12}}.$$

Veta 6.1 *Nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$$

a podmatica $\mathbf{A_{11}}$ *je regulárna. Potom existuje jediná dolná blokovo trojuholníková matica* $\mathbf{B}$ *a jediná horná blokovo trojuholníková matica* $\mathbf{C}$*, obe s jednotkovými blokmi na diagonále, a jediná blokovo diagonálna matica* $\mathbf{D}$ *tak že platí*

$$\mathbf{A} = \mathbf{BDC} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D_1} = \mathbf{A_{11}} \quad \mathbf{D_2} = [\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}].$$

Dôkaz. Najskôr dokážeme jednoznačnosť. Zrejme matice $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ sú regulárne. Nech by existoval iný rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{B_1D_1C_1}$. Potom platí

$$\mathbf{B_1^{-1}AC^{-1}} = \mathbf{B_1^{-1}BD} = \mathbf{D_1C_1C^{-1}},$$

pričom $\mathbf{B_1^{-1}BD}$ je dolná blokovo trojuholníková matica a $\mathbf{D_1C_1C^{-1}}$ je horná blokovo trojuholníková matica a teda sú blokovo diagonálne. Matice $\mathbf{B_1^{-1}B}$, $\mathbf{C_1C^{-1}}$ majú na diagonále jednotkové bloky, platí navyše

$$\mathbf{D} = \mathbf{B_1^{-1}BD} = \mathbf{D_1C_1C^{-1}} = \mathbf{D_1}.$$

Nech

$$\mathbf{B_1^{-1}B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C_1C^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \bar{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

potom

$$\mathbf{B_1^{-1}BD} = \begin{pmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}\mathbf{D_1} & \mathbf{D_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D_1C_1C^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{D_1}\bar{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_2} \end{pmatrix}.$$

Teda $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{D_1} = \mathbf{O}, \mathbf{D_1}\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$, ale $\mathbf{D_1}$ je regulárna a teda $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{B_1^{-1}B} = \mathbf{C_1C^{-1}} = \mathbf{I}$. Dokážeme teraz existenciu rozkladu. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix} = \mathbf{BDC} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B_1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{D_1C_1} \\ \mathbf{B_1D_1} & \mathbf{B_1D_1C_1} + \mathbf{D_2} \end{pmatrix},$$

potom $\mathbf{A_{11}} = \mathbf{D_1}, \mathbf{A_{12}} = \mathbf{D_1C_1}, \mathbf{A_{21}} = \mathbf{B_1D_1}$. Matica $\mathbf{D_1}$ je regulárna a teda existujú riešenia posledných dvoch systémov: $\mathbf{C_1} = \mathbf{D_1^{-1}A_{12}}, \mathbf{B_1} = \mathbf{A_{21}D_1^{-1}}$. Napokon $\mathbf{D_2} = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{B_1D_1C_1} = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} = [\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$.

□

Veta 6.2 *Nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$$

je štvorcová matica a $\mathbf{A_{11}}$ *je regulárna. Potom platí*

$$det[\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}] = \frac{det\mathbf{A}}{det\mathbf{A_{11}}}.$$

Teda $\mathbf{A}$ *je regulárna práve vtedy, keď Schrov doplnok podmatice* $\mathbf{A_{11}}$ *je regulárny. Potom navyše pre*

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \end{pmatrix}$$

platí $\mathbf{B_{22}^{-1}} = [\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$.

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety máme $\mathbf{A} = \mathbf{BDC}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_2} \end{pmatrix}$ $\mathbf{D_1} = \mathbf{A_{11}}$ $\mathbf{D_2} = [\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$. Platí $det\mathbf{A} = det\mathbf{B}det\mathbf{D}det\mathbf{C}$. Ale $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ majú na diagonále jednotkové bloky a teda $det\mathbf{B} = det\mathbf{C} = 1$ a $det\mathbf{A} = det\mathbf{D} = det\mathbf{D_1}det\mathbf{D_2} = det\mathbf{A_{11}}det[\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$ Ak $[\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$ je regulárna, tak zrejme aj $\mathbf{A}$ je regulárna a teda invertovateľná. Ak

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} \end{pmatrix} = \mathbf{C^{-1}D^{-1}B^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\bar{C}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D_1^{-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D_2^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\bar{B}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{D_1^{-1}} + \mathbf{\bar{C}D_2^{-1}\bar{B}} & \mathbf{\bar{C}D_2^{-1}} \\ \mathbf{D_2^{-1}\bar{B}} & \mathbf{D_2^{-1}} \end{pmatrix}$$

tak zrejme $\mathbf{B_{22}^{-1}} = \mathbf{D_2} = [\mathbf{A}/\mathbf{A_{11}}]$.
□

6.3 Symetrický Kroneckerov súčin matíc

Nech

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \in S^n.$$

Definujme

$$svec(\mathbf{U}) = (u_{11}, \sqrt{2}u_{12}, \dots, \sqrt{2}u_{1n}, u_{22}, \sqrt{2}u_{23}, \dots, \sqrt{2}u_{2n}, \dots, u_{nn})^T \in R^{\bar{n}}.$$

Zobrazenie $\mathbf{U} \mapsto svec(\mathbf{U})$ je izomorfizmom $S^n \mapsto R^{\bar{n}}$ a navyše pre $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in S^n$ platí $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = svec(\mathbf{U})^T svec(\mathbf{V})$.

Definícia 6.2 *Nech* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *sú ľubovolné (nie nutne symetrické) štvorcové matice z* $R^{n\times n}$. *Potom lineárne zobrazenie* $S^n \to S^n$ *také, že*

$$\mathbf{U} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{NUM}^T + \mathbf{MUN}^T)$$

sa nazýva symetrický Kroneckerov súčin matíc (ozn. $\mathbf{M} \star \mathbf{N}$*), pričom* $\mathbf{M} \star \mathbf{N} \in R^{\bar{n}\times\bar{n}}$ *a platí*

$$(\mathbf{M} \star \mathbf{N})svec(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}svec(\mathbf{NUM}^T + \mathbf{MUN}^T). \tag{27}$$

Vlastnosti symetrického Kroneckerovho súčinu.

Lema 6.9 $\mathbf{M} \star \mathbf{N}$ *má vlastnosti:*

1. $\mathbf{M} \star \mathbf{N} = \mathbf{N} \star \mathbf{M}$
2. $(\alpha\mathbf{M}) \star \mathbf{N} = \mathbf{M} \star (\alpha\mathbf{N}) = \alpha(\mathbf{M} \star \mathbf{N})$
3. $\mathbf{M} \succ 0, \mathbf{N} \succ 0 \Rightarrow \mathbf{M} \star \mathbf{N} \succ 0.$

Dôkaz. Dokážeme poslednú vlastnosť. Nech $\mathbf{M} \succ 0, \mathbf{N} \succ 0$. Nech $\mathbf{U} \in S^n, \mathbf{U} \neq \mathbf{0}$.

$$svec(\mathbf{U})^T(\mathbf{M} \star \mathbf{N})svec(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}svec(\mathbf{U})^T svec(\mathbf{NUM} + \mathbf{MUN}) =$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{U} \bullet \mathbf{NUM} + \mathbf{U} \bullet \mathbf{MUN}] = \mathbf{UMU} \bullet \mathbf{N} > 0$$

Posledná nerovnosť vyplýva z Lemy 6.8 (zrejme $\mathbf{UMU} \succeq 0, \mathbf{UMU} \neq \mathbf{0}$). □

Literatúra

[1] Adler, I.–Monteiro, R.D.C. (1991): Limiting behavior of the affine scaling continuous trajectories for linear programming problems, Mathematical Programming 50, 29-51.

[2] Alizadeh, F. (1995): Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization, SIAM J. on Optimization 5, No 1, 13-51 http://rutcor.rutgers.edu/ alizadeh/Sdppage/papers.html

[3] Alizadeh, F.– Haeberly,J.-P.– Overton, M. (1998): Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: Convergence rates, stability and numerical results, SIAM J.on Optimization 8, 746-768.

[4] Boyd, S.– Vandenberghe, L. (2004): Convex optimization, Cambridge University Press.
http://www.stanford.edu/˜boyd/bv_cvxbook.pdf

[5] da Cruz Neto, J.X.– Ferreira, O.P.– Monteiro, R.D.C. (2003): Asymptotic behavior of the central path for a special class of degenerate SDP problems, Manuscript, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta.
http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2003/07/682.html

[6] Fiacco, A.– McCormick, G. (1968): Nonlinear Programming: Sequential unconstrained minimization techniques, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[7] Fiedler, M. (1981) Speciální matice a ich použití v numerické matematice, STNL, Praha.

[8] Gill, P.– Murray, W.– Saunders, M.– Tomlin, J.– Wright, M. (1986): On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method, Mathematical Programming 36, 183-209.

[9] Goldfarb, D.– Scheinberg, K. (1998): Interior point trajectories in semidefinite programming, SIAM J. on Optimization 8, 871-886.

[10] Güler, O. (1994): Limiting behavior of weighted central paths in linear programming, Mathematical Programming 65, 347-363.

[11] Güler, O.– Roos, C.– Vial, J-Ph.– Terlaky, T. (1995): A survey of the implications of the central path for the duality theory for linear programming, Management Science 41, 1922-1934.

[12] Halická, M. (1999): Analytical properties of the central path at boundary point in linear programming, Mathematical Programming 84, 335-355.

[13] Halická, M. (2002): Analyticity of the central path at the boundary point in semidefinite programming, European Journal of Operational Research 143, 311-324.

[14] Halická, M. (2004): Dvadsať rokov moderných metód vnútorného bodu, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 49, č.3, 234-244.

[15] Halická, M.(2003): Semidefinitné programovanie, prednášky.

[16] Halická, M. (2001): Two simple proofs of analicity of the central path in linear programming, Operations Research Letters 28, 9-19.

[17] Halická, M.– de Klerk, E. – Roos, C. (2002): Limiting behavior of the central path in semidefinite optimization, preprint, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, TU Delft.
http://sherry.ifi.unizh.ch/halicka02limiting.html

[18] Halická, M.– de Klerk, E. – Roos, C. (2002): On the convergence of the central path in semidefinite optimization, SIAM J. on Optimization 12, 1090-1099.

[19] Horn, R.–Johnson, C. (1985): Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

[20] Karmarkar, N. (1984): A new polynomialtime algorithm for linear programming, Combinatorica 4, 373-395.

[21] Khachian, L.G. (1979): A polynomial algorithm for linear programming, Doklady AN SSSR 244, 1093-1096.

[22] Klee, V.– Minty, G. (1972): How good is the simplex algorithm?, In: O.Shisha, ed., "Inequalities-III", Academic Press, New York.

[23] de Klerk, E. (2002): Aspects of semidefinite programming: Interior point algorithms and selected applications, Kluwer Academic Publishers.

[24] Kojima, M.–Shindoh, S.– Hara, S. (1997): Interior point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices, SIAM J. on Optimization 7, 86-125.

[25] Lovász, L.– Schrijver, A. (1991): Cones of Matrices and Setfunctions, and 0-1 Optimization, SIAM J. on Optimization 1, No 2, 166-190.

[26] Lu, Z. – Monteiro, R.D.C. (2003): Limiting behavior of the Alizadeh-Haeberly-Overton weighted paths in semidefinite programming, Manuscript, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta
http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2003/07/692.html

[27] Lu, Z. – Monteiro, R.D.C. (2004): Error bounds and limiting behavior of weighted paths associated with the SDP map $X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}}$, SIAM J. on Optimization 15, 348-374
http://epubs.siam.org/sam-bin/getfile/SIOPT/articles/43082.pdf

[28] Luo, Z-Q. – Sturm, J.F.– Zhang, S. (1998): Superlinear convergence of a symmetric primal-dual path-following algorithm for semidefinite programming, SIAM J. on Optimization 8, 59-81.

[29] Monteiro, R.D.C.–Pang, J.-S. (1996): Properties of an interior-point mapping for mixed complementarity problems, Math. Oper. Res. 21, 629-654

[30] Monteiro, R.D.C.–Pang, J.-S. (1998): On two interior-point mappings for nonlinear semidefinite complementarity problems, Math. Oper. Res. 23, 39-60.

[31] Monteiro, R.D.C.—Zanjacomo, P. (2000): General interior-point maps and existence of weighted paths for nonlinear semidefinite complementarity problems, Math Oper. Res. 25, 381-399.

[32] Nesterov, Y.E.– Nemirovsky, A.S. (1994): Interior point polynomial algorithms in convex programming, SIAM Publications, Philadelphia.

[33] Preiss,M.– Stoer, J. (2003): Analisis of infeasible-interior-point paths arising with semidefinite linear complementarity problems, working paper, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, Universität Würzburg.

[34] Preiss,M.– Stoer, J. (2003): Analisis of infeasible-interior-point paths arising with semidefinite linear complementarity problems, Mathematical Programming, 499-520.

[35] Roos, C.,– Terlaky, T.– Vial, J.-Ph. (1997): Theory and algorithms for linear optimization: An interior point approach, John Wiley and Sons, New York.

[36] Shäcke, K.: On the Kronecker product.
http://orion.math.uwaterloo.ca/ hwolkowi/henry/reports/kronessaykatrin.ps

[37] Shida, M.–Shindoh, S. (1996): Monotone semidefinite complementarity problems, Research Report B-312, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Tokyo
http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/InteriorPoint/abstracts/Shida-Shindoh-1.html

[38] Shida, M.– Shindoh, S.–Kojima, M (1995): Centers of monotone generalized complementarity problems, Research Report B-312, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Tokyo
http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/InteriorPoint/abstracts/Shida-Shindoh-Kojima.html

[39] Sturm, J.F.–Zhang, S. (2000): On Weighted Centers for Semidefinite Programming, European Journal of Operations Research. Vol 126, 391-407.

[40] Todd, M.J. (2001): Semidefinite optimization, Acta Numerica 10.
http://www.orie.cornell.edu/~miketodd/soa5.ps

[41] Trnovská, M. (2005): Vety o alternatívach a ich dôsledky v semidefinitnom programovaní, Rigorózna práca, FMFI UK Bratislava.

[42] Vandenberghe, L. – Boyd, S. (1996): Semidefinite programming, SIAM Review 38 http://sherry.ifi.unizh.ch/vandenberghe95semidefinite.html

[43] Wechs, M. (1998) The analyticity of interior-point-paths and strictly complementary solutions of linear programs, Optimization Methods and Software 9, 209-243.

[44] Wright, M.H. (2004): The interior-point revolution in optimization: history, recent developments and lasting consequences, Bulletin of the Americ. Mathem. Society, Vol 42, No 1, 39-56
http://www.ams.org/bull/2005-42-01/S0273-0979-04-01040-7/S0273-0979-04-01040-7.ps