Zbierka riešených úloh z optimálneho riadenia II

Spracované na základe diplomovej práce Anny Kériovej
(školiteľka: Margaréta Halická)

Záverečné editovanie a úpravy: Pavol Jurča

Bratislava, 2014

Úvod

Motto:

"Education is what remains
after one has forgotten everything
he learned in school."
(Albert Einstein)

Jedným z hlavných cieľov predmetu Optimálne riadenie II je naučiť študentov riešiť spojité úlohy optimálneho riadenia. Podobne ako v iných oblastiach matematiky, aj tu je potrebné nadobudnúť istú "zručnosť", ktorú však nemožno získať inak ako samostatným riešením dostatočného počtu úloh. Hoci osvojenie si tejto zručnosti stojí istú námahu, umožňuje získať nový nástroj na riešenie optimalizačných úloh z oblasti ekonomického modelovania, najmä z makroekonómie. Dobré ovládanie metód riešenia úloh v oblasti optimálneho riadenia je dnes nevyhnutné napr. aj pre štúdium a aplikáciu kvantitatívnych modelov v takých oblastiach ako je oblasť modernej menovej politiky.

Cieľom tejto zbierky je preto poskytnúť študentom dostatočný počet riešených príkladov z oblasti spojitej teórie optimálneho riadenia. Tieto príklady sú určené predovšetkým na individuálne štúdium. Študentom predmetu Optimálne riadenie II vysoko odporúčame, aby si väčšinu týchto príkladov samostatne prepočítali.

Príklady uvedené v tejto zbierke nepokrývajú celý semester. Naopak, sú zamerané najmä na učivo približne druhej tretiny semestra, kedy sa študenti zoznamujú s viacerými základnými druhmi úloh optimálneho riadenia a potrebujú čo najrýchlejšie získať v ich riešení prax. Ak to bolo možné, pri výbere boli preferované relatívne jednoduchšie úlohy pred úlohami vyžadujúcimi zbytočne rozsiahle a komplikované riešenie. Aj z tohto dôvodu ide zväčša iba o čisto matematické úlohy, bez priamej interpretácie v ekonomických alebo iných vedách.

Vzhľadom na charakter zbierky odporúčame študentom, aby s ňou pracovali priebežne počas semestra. Pre uľahčenie orientácie uvádzame väzbu jednotlivých úloh ku kapitolám aktuálnej verzie učebného textu:

Kap. 5.	Štandardná úloha.	Odp. príklady: 1 až 4
Kap. 6.	Neautonómna úloha a úloha s pevným časom.	Odp. príklady: 5 až 20
Kap. 10.	Bolzova a Mayerova úloha.	Odp. príklady: 21 až 25
Kap. 12.	Úlohy s ohraničeniami typu nerovnosti na koncový stav.	Odp. príklady: 26 až 29

Na druhej strane, ak študenti už majú prebratý väčší rozsah učiva, odporúčame začať príkladmi 5 až 11, ktoré sú najjednoduchšie.

Podkladom pre túto zbierku bola diplomová práca Anny Kériovej, ktorá bola obhájená na študijnom odbore ekonomicko-finančná matematika v roku 2005[1]. Školiteľkou práce bola doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. Pre účely tejto zbierky bola táto diplomová práca upravená po grafickej aj obsahovej stránke. Formulácie, riešenie aj poradie úloh bolo upravené tak, aby v čo najväčšej možnej miere zodpovedalo najaktuálnejšej verzii učebného textu z predmetu Optimálne riadenie II.

Veľká vďaka patrí študentom 4. ročníka EFM v r. 2012/2013, ktorí prispeli k odhaleniu viacerých chýb a nepresností. Akékoľvek ďalšie pripomienky, námety alebo identifikované chyby sú veľmi vítané.

Bratislava, máj 2013

Pavol Jurča

[1] Pôvodný text práce možno nájsť na adrese: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/zbierka.pdf

Príklad 1.

Štandardná úloha optimálneho riadenia

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\min\ T, \quad T \text{ je voľné} \\ &\dot{x}(t) = 2u(t) \\ &x(0) = 8 \\ &x(T) = 0 \\ &u(t) \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Aby sme úlohu previedli do štandardného tvaru formulácie úlohy optimálneho riadenia, preformulujeme účelovú funkciu do ekvivalentného tvaru

$$\min \int_0^T 1\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ je voľné.}$$

V tejto formulácii ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s voľným časom, s pevným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže ide o úlohu na minimum, môžeme položiť $\psi^0 = -1$ alebo $\psi^0 = 0$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 + 2u\psi$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = 0$$

(PS) $$\psi^0 + 2\hat{u}(t)\psi(t) = 0$$

(PM) $$\psi^0 + 2u\psi(t) \longrightarrow \max_{u \in [-1,1]}$$

(PT) $$\psi(T) = \chi$$

Riešenie: Riešením (PM) je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0, \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0, \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) spolu s (PT) je

$$\psi(t) \equiv \chi,$$

kde χ je konštanta. Riešenie (PM) preto môžeme písať v tvare

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \chi < 0, \\ 1 & \text{ak } \chi > 0, \\ [-1, 1] & \text{ak } \chi = 0. \end{cases}$$

Dosadíme $\psi(T) = \chi$ do (PS) a dostaneme

(*) $$\psi^0 + 2u(T)\chi = 0.$$

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ V tomto prípade dostaneme, že $\psi(t) \equiv \chi \neq 0$, aby nenastal spor s $(\psi^0, \chi) \neq (0, 0)$. Z (PM) však potom vyplýva, že $\hat{u}(t) = \pm 1$. Vidíme teda, že pre tento prípad podmienka (*) nie je splnená, teda v prípade $\psi^0 = 0$ nedostaneme žiadneho kandidáta na optimálne riešenie.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = -1}$ V tomto prípade môžeme rozlíšiť tri možnosti v závislosti od znamienka konštanty χ.

(i) Ak $\chi < 0$, pre riadenie platí $\hat{u}(t) \equiv -1$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme $\dot{x}(t) = -2$. Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$x(t) = -2t + B,$$

kde B je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 8$ dostaneme

$$x(t) = -2t + 8.$$

Využitím koncovej podmienky $x(T) = 0$ určíme $\hat{T}$. Riešime rovnicu

$$-2\hat{T} + 8 = 0.$$

Z toho dostaneme, že $\hat{T} = 4$.

(ii) Ak $\chi > 0$, pre riadenie platí $\bar{u}(t) \equiv 1$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme $\dot{x}(t) = 2$. Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\bar{x}(t) = 2t + C,$$

kde C je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 8$ dostaneme

$$\bar{x}(t) = 2t + 8.$$

Využitím koncovej podmienky $x(T) = 0$ určíme $\bar{T}$. Riešime rovnicu

$$2\bar{T} + 8 = 0.$$

Z toho dostaneme, že $\bar{T} = -4$, teda $\bar{u}(t) \equiv 1$ je neprípustné riadenie, lebo $\bar{T} < 0$.

(iii) Ak $\chi = 0$, dostaneme spor s (*), keďže $\psi^0 = -1$.

Výsledok:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= 4 \\ \hat{u}(t) &\equiv -1 \\ \hat{x}(t) &= -2t + 8 \end{aligned}$$

Poznámka: Všimnite si, že (PM) zostáva byť podmienkou na maximum aj v prípade minimalizačnej úlohy. Minimalizačná účelová funkcia sa prejaví iba v podmienke $\psi^0 \leq 0$.

Príklad 2.

Úloha s voľným časom a s ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T -\frac{1}{2}\left(1+u(t)^2\right) \mathrm{d}t, \quad T \text{ je voľné} \\ &\dot{x}(t) = u(t) \\ &x(0) = 5 \\ &x(T) = 0 \\ &u(t) \in [-2, 2] \end{aligned}$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s voľným časom, s pevným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže ide o úlohu na maximum, môžeme položiť $\psi^0 = 1$ alebo $\psi^0 = 0$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = -\frac{1}{2}\psi^0(u^2+1) + \psi u$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = 0$$

(PS) $$-\frac{1}{2}\psi^0(\hat{u}(t)^2+1) + \psi(t)\hat{u}(t) = 0$$

(PM) $$-\frac{1}{2}\psi^0(u^2+1) + \psi(t)u \longrightarrow \max_{u\in[-2,2]}$$

(PT) $$\psi(\hat{T}) = \chi$$

Riešenie: $\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ Riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -2 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 2 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ \text{neurč.} & \text{ak } \psi(t) = 0\ . \end{cases}$$

Pozrime sa teraz na (PS) v bode $t = T$, ktorá má tvar $\psi(T)u(T) = 0$. Z troch možností uvedených v predchádzajúcej rovnosti teda môže nastať len tretia z nich. Tá však kvôli (PT) implikuje $\chi = 0$, čo je v spore s podmienkou $(\psi^0, \chi) \neq (0, 0)$. Prípad $\psi^0 = 0$ preto nedáva žiadneho kandidáta na optimálne riešenie.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 1}$ Riešením (PM) v tomto prípade je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -2 & \text{ak } \psi(t) \leq -2 \\ 2 & \text{ak } \psi(t) \geq 2 \\ \psi(t) & \text{ak } \psi(t) \in [-2, 2]\ . \end{cases}$$

Riešením (AR) spolu s (PT) dostávame

$$\psi(t) \equiv \chi,$$

kde χ je konštanta. (PM) preto možno prepísať do tvaru

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -2 & \text{ak } \chi \leq -2 \\ 2 & \text{ak } \chi \geq 2 \\ \chi & \text{ak } \chi \in [-2, 2]\ . \end{cases}$$

Teraz vyšetríme jednotlivé prípady:

(i) Ak $\chi \leq -2$ a $\hat{u}(t) \equiv -2$, potom je (PS) v tvare

$$-\frac{5}{2} - 2\chi = 0.$$

Z toho $\chi = -5/4$, ale $-5/4 \not\leq -2$. Teda tento prípad nevyhovuje predpokladom.

(ii) Ak $\chi \geq 2$ a $\hat{u}(t) \equiv 2$, potom je (PS) v tvare

$$-\frac{5}{2} + 2\chi = 0.$$

Z toho $\chi = 5/4$, ale $5/4 \not\geq 2$. Teda tento prípad teda tiež nevyhovuje predpokladom.

(iii) Napokon nech $\hat{u}(t) \equiv \chi$, kde $\chi \in [-2, 2]$. Podmienka (PS) má tvar

$$-\frac{1}{2}(\chi^2+1) + \chi^2 = 0.$$

Z toho $\chi = -1$, alebo $\chi = 1$. Teraz tieto hodnoty dosadíme do stavovej rovnice.

a) Ak $\chi = 1$, riešime rovnicu

$$\dot{x}(t) = 1.$$

Riešením tejto rovnice spolu s počiatočnou podmienkou $x(0) = 5$ je

$$\hat{x}(t) = t + 5.$$

Využitím koncovej podmienky $x(T) = 0$ dostaneme, že $\hat{T} = -5$, čo nie je prípustné.

b) Ak $\chi = -1$, riešime rovnicu

$$\dot{x}(t) = -1.$$

Riešením tejto rovnice spolu s počiatočnou podmienkou $x(0) = 5$ je

$$\hat{x}(t) = -t + 5.$$

Z koncovej podmienky $x(T) = 0$ vyplýva, že $\hat{T} = 5$, čo je prípustné riešenie.

Výsledok:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= 5 \\ \hat{u}(t) &\equiv -1 \\ \hat{x}(t) &= 5 - t \end{aligned}$$

Príklad 3.

Úloha s voľným časom a s ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T -1 - u(t)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ je voľné} \\ &\dot{x}(t) = u(t) \\ &x(0) = x_0 \\ &x(T) = 0 \\ &u(t) \in [-q, q] \end{aligned}$$

kde $x_0 > 0$ a $q > 0$ sú dané konštanty.

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s voľným časom, s pevným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže ide o úlohu na maximum, môžeme položiť $\psi^0 = 1$ alebo $\psi^0 = 0$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(-1 - u) + \psi u$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = 0$$

(PM) $$\psi^0(-1 - u) + \psi(t)u \longrightarrow \max_{u \in [-q,q]}$$

(PS) $$\psi^0(-1 - \hat{u}(t)) + \psi(t)\hat{u}(t) \equiv 0$$

(PT) $$\psi(T) = \chi$$

Riešenie: $\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ Riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -q & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ q & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ \text{neurč.} & \text{ak } \psi(t) = 0\ . \end{cases}$$

Pozrime sa teraz na (PS) v bode $t = T$, ktorá má tvar $\psi(T)u(T) = 0$. Z troch možností uvedených v predchádzajúcej rovnosti teda môže nastať len tretia z nich. Tá však kvôli (PT) implikuje $\chi = 0$, čo je v spore s podmienkou $(\psi^0, \chi) \neq (0, 0)$. Prípad $\psi^0 = 0$ preto nedáva žiadneho kandidáta na optimálne riešenie.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 1}$ Riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -q & \text{ak } \psi(t) < 1 \\ q & \text{ak } \psi(t) > 1 \\ [-q, q] & \text{ak } \psi(t) = 1\ . \end{cases}$$

Riešením (AR) spolu s podmienkou (PT) je

$$\psi(t) \equiv \chi.$$

Riešenie (PM) preto možno písať v tvare

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -q & \text{ak } \chi < 1 \\ q & \text{ak } \chi > 1 \\ [-q, q] & \text{ak } \chi = 1\ . \end{cases}$$

Rozoberme teraz postupne všetky tri vyššie uvedené prípady:

(i) Ak $\chi = 1$, tak (PS) sa redukuje na rovnosť $-1 = 0$, čo je spor.

(ii) Ak $\chi > 1$, tak $\hat{u}(t) \equiv q$. Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice $\dot{x}(t) = q$. Všeobecným riešením je

$$x(t) = qt + A,$$

kde A je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = x_0$ dostaneme

$$x(t) = qt + x_0.$$

Využitím koncovej podmienky $x(T) = 0$ určíme koncový čas T. Z rovnice

$$0 = qT + x_0$$

dostaneme, že $T = -\frac{x_0}{q} < 0$, čo nie je prípustné.

(iii) Ak $\chi < 1$, tak $\hat{u}(t) \equiv -q$. Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice $\dot{x}(t) = -q$. Všeobecným riešením je

$$x(t) = -qt + B,$$

kde B je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = x_0$ dostaneme

$$x(t) = -qt + x_0.$$

Využitím koncovej podmienky $x(T) = 0$ určíme koncový čas T. Z rovnice

$$0 = -qT + x_0$$

dostaneme, že $T = \frac{x_0}{q} > 0$. Napokon ešte overíme splnenie (PS). Tá má v tomto prípade tvar

$$-1 + q - \chi q \equiv 0.$$

Jej riešením je

$$\chi = 1 - \frac{1}{q},$$

takže podmienka $\chi < 1$ je splnená.

Výsledok:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{x_0}{q} \\ \hat{u}(t) &\equiv -q \\ \hat{x}(t) &= -qt + x_0 \end{aligned}$$

Príklad 4.

Dvojrozmerná štandardná úloha optimálneho riadenia

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T \frac{1}{2}(1+u(t)^2)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ je voľné} \\ &\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = u(t) \\ &x_1(0) = a \\ &x_2(0) = 0 \\ &x_1(T) = 0 \\ &x_2(T) = 0 \end{aligned}$$

kde $a > 0$ je daná konštanta.

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s voľným časom, s pevným koncom a bez ohraničenia na riadenie. Keďže ide o úlohu na minimum, môžeme položiť $\psi^0 = -1$ alebo $\psi^0 = 0$. Úloha je dvojrozmerná, preto budeme mať dvojrozmerné $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x_1, x_2, u, \psi^0, \psi_1, \psi_2) = \psi^0 \frac{1+u^2}{2} + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$$

$$\dot{\psi}_1(t) = 0$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t)$$

(PS) $$\psi^0 \frac{1+\hat{u}(t)^2}{2} + \psi_1(t)\hat{x}_2(t) + \psi_2(t)\hat{u}(t) \equiv 0$$

(PM) $$\psi^0 \frac{1+u^2}{2} + \psi_1(t)\hat{x}_2(t) + \psi_2(t)u \longrightarrow \max_{u \in R}$$

$$\psi_1(\hat{T}) = \chi_1$$

$$\psi_2(\hat{T}) = \chi_2$$

Riešenie:

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ V tomto prípade dostaneme v (PM) lineárnu funkciu v u. Takáto funkcia však môže na $\mathbb{R}$ nadobúdať extrém v premennej u, iba ak je koeficient pri u nulový, t.j. ak $\psi_2(t) \equiv \chi_2 = 0$. Z druhej (AR) potom zároveň dostaneme, že $\psi_1(t) \equiv 0$, t.j. podľa druhej (PT) aj $\chi_1 = 0$. To je však spor s podmienkou $(\psi^0, \chi_1, \chi_2) \neq (0,0,0)$.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = -1}$ Keďže Hamiltonova funkcia je konkávna v u, na riešenie (PM) môžeme využiť podmienku prvého rádu v tvare $\hat{u}(t) = \psi_2(t)$. Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi_1(t) = A, \quad \text{a} \quad \psi_2(t) = -At + B,$$

kde A a B sú konštanty. Po dosadení do riešenia (PM) máme

$$\hat{u}(t) = \psi_2(t) = -At + B.$$

Dosadením do druhej stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}_2(t) = u(t) = -At + B.$$

Všeobecným riešením je

$$\hat{x}_2(t) = \frac{-At^2}{2} + Bt + C,$$

kde C je konštanta. Dosadíme $\hat{x}_2(t)$ do prvej stavovej rovnice

$$\dot{x}_1(t) = \hat{x}_2(t) = \frac{-At^2}{2} + Bt + C.$$

Všeobecným riešením je

$$x_1(t) = \frac{-At^3}{6} + \frac{Bt^2}{2} + Ct + D,$$

kde D je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x_2(0) = 0$, $x_1(0) = a$ a koncovej podmienky $x_2(T) = 0$, $x_1(T) = 0$ dostaneme

$$A = \frac{-12a}{T^3}, \quad B = \frac{-6a}{T^2}, \quad C = 0, \quad D = a.$$

Po dosadení konštánt a úprave stavovej rovnice dostaneme

$$\hat{x}_1(t) = \frac{2at^3}{T^3} - \frac{3at^2}{T^2} + a,$$

$$\hat{x}_2(t) = \frac{6at^2}{T^3} - \frac{6at}{T^2}.$$

Riadenie $\hat{u}(t)$ je v tvare

$$\hat{u}(t) = \frac{12at}{T^3} - \frac{6a}{T^2}.$$

Využitím (PS) a podmienky $x_2(T) = 0$ určíme čas $\hat{T}$ z rovnice

$$-\frac{1 + \left(\frac{6a}{T^2}\right)^2}{2} + \left(\frac{6a}{T^2}\right)^2 = 0,$$

z ktorej dostaneme

$$\hat{T} = \sqrt{6a}.$$

Výsledok:

$$T = \sqrt{6a}, \qquad \hat{x}_1(t) = \frac{2at^3}{T^3} - \frac{3at^2}{T^2} + a$$

$$\hat{u}(t) = \frac{12at}{T^3} - \frac{6a}{T^2}, \qquad \hat{x}_2(t) = \frac{6at^2}{T^3} - \frac{6at}{T^2}$$

Príklad 5.

Úloha s pevným časom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\min \int_0^1 u(t)^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 1$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže sa jedná o minimalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 u^2 + \psi(x + u)$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)$$

(PT) $$\psi(1) = 0$$

(PM) $$-u^2 + \psi(t)(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max_{u \in R}$$

(PS) $$-\hat{u}(t)^2 + \psi(t)(\hat{x}(t) + \hat{u}(t)) \equiv \text{konšt.}$$

Riešenie: (PM) je ekvivalentná podmienke

$$-u^2 + \psi(t)u \longrightarrow \max_{u \in R},$$

ktorej riešením je

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t},$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme, že

$$\psi(t) = 0.$$

Dosadením do riešenia (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) \equiv 0.$$

Riadenie $\hat{u}(t)$ dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) = x(t).$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = Be^t,$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = e^t.$$

(PS) nám v tomto prípade nedáva dodatočnú informáciu a ľahko ju možno overiť dosadením.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv 0$$

$$\hat{x}(t) = e^t$$

Poznámka: V jednorozmerných úlohách s voľným koncom nemôže prípad $\psi^0 = 0$ nastať. Dôvodom je, že v týchto úlohách je $\chi = 0$, a teda z podmienky $(\psi^0, \chi) \neq (0, 0)$ vyplýva, že $\psi^0 \neq 0$.

Príklad 6.

Úloha s pevným časom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^1 x(t) + u(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = 1 - u(t)^2$$
$$x(0) = 1$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom ($T = 1$) s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(x + u) + \psi(1 - u^2)$

(AR) $\dot{\psi}(t) = -1$

(PT) $\psi(1) = 0$

(PM) $u + \hat{x}(t) + \psi(t)(1 - u^2) \longrightarrow \max_{u \in R}$

(PS) $\hat{u}(t) + \hat{x}(t) + \psi(t)(1 - \hat{u}(t)^2) \equiv$ konšt.

Riešenie: (PM) je ekvivalentná podmienke

$$u - \psi(t)u^2 \longrightarrow \max_{u \in R},$$

ktorej riešením pre $\psi(t) \neq 0$ je

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2\psi(t)},$$

pričom pre $\psi(t) = 0$ nemá riešenie.
Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = -t + A,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme, že

$$\psi(t) = 1 - t.$$

Dosadením do riešenia (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2(1 - t)}.$$

Riadenie $\hat{u}(t)$ dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = 1 - u(t)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2(1 - t)}\right)^2.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = t - \frac{1}{4(1 - t)} + B,$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = t - \frac{1}{4(1 - t)} + \frac{5}{4}.$$

(PS) nám ani v tomto prípade nedáva dodatočnú informáciu a ľahko ju možno overiť dosadením.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2(1 - t)}$$

$$\hat{x}(t) = t - \frac{1}{4(1 - t)} + \frac{5}{4}$$

Poznámka: V úlohách s pevným časom nám podmienka stacionarity nedáva dodatočnú informáciu. Pokiaľ nájdeme riešenie ostatných podmienok, toto riešenie vždy spĺňa aj podmienku stacionarity. Preto ju v nasledujúcich úlohách s pevným časom budeme vynechávať. Poznamenajme však, že občas ju možno využiť na zjednodušenie riešenia – ak už máme nájdené $\hat{u}(t)$ a $\psi(t)$, môžeme nájsť odozvu $\hat{x}(t)$ priamo z podmienky stacionarity, ktorá na rozdiel od stavovej rovnice nevyžaduje riešenie diferenciálnej rovnice.

Príklad 7.

Úloha s pevným časom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^T -\sqrt{1+u(t)^2}\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ je dané}$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = A$$

kde A je daná konštanta.

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x,u,\psi^0,\psi) = -\psi^0(1+u^2)^{1/2} + \psi u$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = 0$

(PT) $\quad \psi(T) = 0$

(PM) $\quad -(1+u^2)^{1/2} + \psi(t)u \longrightarrow \max_{u \in R}$

Riešenie: Riešením (PM) je také $\hat{u}(t)$, ktoré spĺňa nutnú podmienku prvého rádu v tvare

$$-(1+\hat{u}^2(t))^{-\frac{1}{2}}\hat{u}(t) + \psi(t) = 0.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) \equiv B,$$

kde B je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) \equiv 0.$$

Po dosadení do nutnej podmienky pre riešenie (PM) máme

$$-(1+\hat{u}(t)^2)^{-1/2}\,\hat{u}(t) = 0,$$

odkiaľ dostaneme

$$\hat{u}(t) \equiv 0.$$

Riadenie $\hat{u}(t)$ dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) \equiv 0.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) \equiv C,$$

kde C je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = A$ dostaneme

$$\hat{x}(t) \equiv A \quad \forall t \in [0,T].$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0,T]$$
$$\hat{x}(t) \equiv A \quad \forall t \in [0,T]$$

Príklad 8.

Úloha s pevným časom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^2 x(t) - u(t)^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 0$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(x - u^2) + \psi u$

(AR) $\dot{\psi}(t) = -1$

(PT) $\psi(2) = 0$

(PM) $\hat{x}(t) - u^2 + \psi(t)u \longrightarrow \max_{u \in R}$

Riešenie: Pretože Hamiltonova funkcia v (PM) je konkávna v u, riešením (PM) dostávame

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = -t + A,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = 2 - t.$$

Dosadením do riešenia (PM) máme

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{2-t}{2}.$$

Riadenie $\hat{u}(t)$ dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = \frac{2-t}{2}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = t - \frac{t^2}{4} + C,$$

kde C je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 0$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = t - \frac{t^2}{4}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \frac{2-t}{2}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{4t - t^2}{4}$$

Príklad 9.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\min \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$u(t) \in [-1, 1]$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o minimalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 x + \psi u$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = 1$$

(PT) $$\psi(1) = 0$$

(PM) $$-\hat{x}(t) + \psi(t)u \longrightarrow \max_{u\in[-1,1]}$$

Riešenie: (PM) môžeme zapísať v tvare

$$u(t)\,\psi(t) \longrightarrow \max_{u\in[-1,1]},$$

ktorej riešením je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = t + A,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = t - 1.$$

Riešenie (PM) preto možno prepísať do tvaru

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } t < 1 \\ 1 & \text{ak } t > 1 \\ [-1, 1] & \text{ak } t = 1. \end{cases}$$

Pretože ide o úlohu s pevným časom, kde $t \in [0, 1]$, tak dostávame, že jediné prípustné riadenie (PM) je $\hat{u}(t) \equiv -1$.
Po dosadení $\hat{u}(t)$ do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = -1.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = -t + B,$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 1 - t.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv -1$$

$$\hat{x}(t) = 1 - t$$

Príklad 10.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}&\min \int_0^1 \frac{1}{2}x(t)^2\,\mathrm{d}t\\ &\dot{x}(t) = u(t)\\ &x(0) = 1\\ &u(t) \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o minimalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = \frac{1}{2}\psi^0 x^2 + \psi u$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = \hat{x}(t)$

(PT) $\quad \psi(1) = 0$

(PM) $\quad -\frac{1}{2}\hat{x}(t)^2 + \psi(t)u \longrightarrow \max\limits_{u\in[-1,1]}$

Riešenie: Riešením (PM) je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Všimnime si ďalej, že vzhľadom na ohraničenie na riadenie, ako aj vzhľadom na stavovú rovnicu platí $\dot{x}(t) \geq -1$, a teda $x(t) \geq 1 - t > 0$ pre každé $t \in [0, 1)$.
Z (AR) potom dostaneme, že $\dot{\psi}(t) > 0$ na $[0, 1)$, a teda adjungovaná premenná je rastúca. Vhľadom na koncovú podmienku (PT) z toho vyplýva

$$\psi(t) < 0 \quad \forall\, t \in [0, 1).$$

Podmienka (PM) preto implikuje

$$\hat{u}(t) \equiv -1,$$

a teda zo stavovej rovnice a počiatočnej podmienky dostaneme

$$\hat{x}(t) = 1 - t.$$

Kvôli overeniu zápornosti adjungovanej premennej dosaďme ešte toto $\hat{x}(t)$ do (AR). Všeobecným riešením rovnice je

$$\psi(t) = t - \frac{t^2}{2} + C,$$

kde C je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$C = -\frac{1}{2},$$

a teda

$$\psi(t) = t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2.$$

Teda naozaj platí predpoklad, že $\psi(t) < 0$ pre každé $t \in [0, 1)$.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv -1$$

$$\hat{x}(t) = 1 - t$$

Príklad 11.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^4 3x(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 5$$
$$u(t) \in [0, 2]$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = 3\psi^0 x + \psi(x + u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -3 - \psi(t)$

(PT) $\quad \psi(4) = 0$

(PM) $\quad 3\hat{x}(t) + \psi(t)(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max\limits_{u \in [0,2]}$

Riešenie: Riešením (PM) je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 2 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ [0, 2] & \text{ak } \psi(t) = 0\ . \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t} - 3,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = 3(e^{4-t} - 1).$$

Keďže $\psi(t) > 0$ pre každé $t \in [0, 4)$, z (PM) dostaneme, že $\hat{u} \equiv 2$. Po dosadení riadenia do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = Be^t - 2,$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 5$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 7e^t - 2.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv 2$$

$$\hat{x}(t) = 7e^t - 2$$

Príklad 12.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^2 2x(t) - 3u(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 5$$
$$u(t) \in [0,2]$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x,u,\psi^0,\psi) = \psi^0(2x - 3u) + \psi(x+u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -2 - \psi(t)$

(PT) $\quad \psi(2) = 0$

(PM) $\quad 2\hat{x}(t) - 3u + \psi(t)(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max\limits_{u\in[0,2]}$

Riešenie: Riešením (PM) je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi(t) - 3 < 0 \\ 2 & \text{ak } \psi(t) - 3 > 0 \\ [0,2] & \text{ak } \psi(t) - 3 = 0\,. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t} - 2,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = 2(e^{2-t} - 1).$$

Teraz vyšetríme priebeh funkcie $\psi(t) - 3$, ktorá vystupuje v riešení (PM). Je zrejmé, že

$$\psi(t) - 3 = 2(e^{2-t} - 1) - 3 < 0$$

vtedy a len vtedy, ak

$$t > 2 - \ln\frac{5}{2} =: \tau.$$

Z toho dostávame

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2 & \text{ak } t \in [0,\tau) \\ 0 & \text{ak } t \in [\tau, 2]\,. \end{cases}$$

Teraz rozlíšime dve možnosti:

(i) Ak $t \in [0,\tau)$, tak $\hat{u}(t) \equiv 2$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = ce^t - 2,$$

kde c je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 5$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 7e^t - 2.$$

(ii) Ak $t \in [\tau, 2]$, tak $\hat{u}(t) \equiv 0$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t).$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = de^t,$$

kde d je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(\tau) = 7e^\tau - 2$ dostaneme

$$d = 7 - 5e^{-2},$$

a teda

$$\hat{x}(t) = 7e^t - 5e^{t-2}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2 & \text{ak } t \in \left[0, 2 - \ln\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \text{ak } t \in \left[2 - \ln\frac{5}{2}, 2\right] \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} 7e^t - 2 & \text{ak } t \in \left[0, 2 - \ln\frac{5}{2}\right) \\ 7e^t - 5e^{t-2} & \text{ak } t \in \left[2 - \ln\frac{5}{2}, 2\right] \end{cases}$$

Poznámka: Pripomeňme, že v každom bode nespojitosti prisudzujeme riadeniu ako hodnotu jeho limitu sprava.

Príklad 13.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^2 2x(t) - 3u(t) - u(t)^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 5$$
$$u(t) \in [0, 2]$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(2x - 3u - u^2) + \psi\,(x + u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -2 - \psi(t)$

(PT) $\quad \psi(2) = 0$

(PM) $\quad 2\hat{x}(t) - 3u - u^2 + \psi(t)\,(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max\limits_{u\in[0,2]}$

Riešenie: V (PM) hľadáme maximum konkávnej funkcie na uzavretom intervale $[0, 2]$. Riešením je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } 1/2\,(\psi(t) - 3) < 0, \\ 2 & \text{ak } 1/2\,(\psi(t) - 3) > 2, \\ 1/2(\psi(t) - 3) & \text{ak } 1/2\,(\psi(t) - 3) \in [0, 2]. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) spolu s okrajovou podmienkou (PT) je

$$\psi(t) = 2(e^{2-t} - 1).$$

Teraz vyšetríme priebeh funkcie $1/2\,(\psi(t) - 3)$, ktorá vystupuje vo funkcii (PM). Platí

$$\frac{1}{2}\,(\psi - 3) = \frac{1}{2}[2(e^{2-t} - 1) - 3] > 2 \quad \Leftrightarrow \quad t < 2 - \ln\frac{9}{2} =: \tau_1.$$

Podobne

$$\frac{1}{2}\,(\psi(t) - 3) = \frac{1}{2}[2(e^{2-t} - 1) - 3] < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > 2 - \ln\frac{5}{2} =: \tau_2.$$

Z toho dostávame, že

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2 & \text{ak } t \in [0, \tau_1) \\ e^{2-t} - \frac{5}{2} & \text{ak } t \in [\tau_1, \tau_2) \\ 0 & \text{ak } t \in [\tau_2, 2]\ . \end{cases}$$

Teraz rozlíšime tri možnosti:

(i) Ak $t \in [0, \tau_1)$, tak $\hat{u}(t) \equiv 2$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t) + 2.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = Ae^t - 2,$$

kde A je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 5$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 7e^t - 2.$$

(ii) Ak $t \in [\tau_1, \tau_2)$, tak $\hat{u}(t) = e^{2-t} - \frac{5}{2}$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t) + e^{2-t} - \frac{5}{2}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = Be^t - \frac{1}{2}e^{2-t} + \frac{5}{2},$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(\tau_1) = 7e^{\tau_1} - 2$ dostaneme

$$(*) \qquad \hat{x}(t) = 7e^t - \frac{81}{8}e^{t-2} - \frac{1}{2}e^{2-t} + \frac{5}{2}.$$

(iii) Ak $t \in [\tau_2, 2]$, tak $\hat{u}(t) \equiv 0$. Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme $\dot{x}(t) = x(t)$. Všeobecným riešením je

$$\hat{x}(t) = Ce^t,$$

kde C je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(\tau_2) = \frac{14}{5}(e^2 - 1)$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 7e^t - 7e^{t-2}.$$

(Hodnotu $\frac{14}{5}(e^2 - 1)$ získame vyčíslením (*) v bode τ_2.)

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2 & \text{ak } t \in [0, \tau_1) \\ e^{2-t} - \dfrac{5}{2} & \text{ak } t \in [\tau_1, \tau_2) \\ 0 & \text{ak } t \in [\tau_2, 2] \end{cases} \quad \text{a} \quad \hat{x}(t) = \begin{cases} 7e^t - 2 & \text{ak } t \in [0, \tau_1) \\ 7e^t - \dfrac{81}{8}e^{t-2} - \dfrac{1}{2}e^{2-t} + \dfrac{5}{2} & \text{ak } t \in [\tau_1, \tau_2) \\ 7e^t - 7e^{t-2} & \text{ak } t \in [\tau_2, 2] \end{cases}$$

kde $\tau_1 = 2 - \ln\dfrac{9}{2}$ a $\tau_2 = 2 - \ln\dfrac{5}{2}$.

Príklad 14.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^{100} x(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 10$$
$$u(t) \in [0,3]$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x,u,\psi^0,\psi) = \psi^0 x + \psi\,(-x+u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -1 + \psi(t)$

(PT) $\quad \psi(100) = 0$

(PM) $\quad \hat{x}(t) + \psi(t)\,(-\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max\limits_{u\in[0,3]}$

Riešenie: Riešenie (PM) je v tvare

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi(t) < 0, \\ 3 & \text{ak } \psi(t) > 0, \\ [0,3] & \text{ak } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^t + 1,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme, že

$$\psi(t) = 1 - e^{t-100}.$$

Keďže $\psi(t) > 0$ pre každé $t \in [0,100)$, z riešenia (PM) dostávame $\hat{u}(t) \equiv 3$.
Po dosadení do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 3.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = Be^{-t} + 3,$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 10$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 7e^{-t} + 3,$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv 3$$

$$\hat{x}(t) = 7e^{-t} + 3$$

Príklad 15.

Úloha s pevným časom a ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^{100} x(t) - \frac{1}{2}u(t)\,\mathrm{d}t\\
&\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\\
&x(0) = 10\\
&u(t) \in [0,3]
\end{aligned}$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x,u,\psi^0,\psi) = \psi^0\left(x - \frac{1}{2}u\right) + \psi\left(-x + u\right)$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = -1 + \psi(t)$$

(PT) $$\psi(100) = 0$$

(PM) $$\left(\hat{x}(t) - \frac{1}{2}u\right) + \psi(t)\left(-\hat{x}(t) + u\right) \longrightarrow \max_{u\in[0,3]}$$

Riešenie: Riešením (PM) je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi(t) - \frac{1}{2} < 0,\\ 3 & \text{ak } \psi(t) - \frac{1}{2} > 0,\\ [0,3] & \text{ak } \psi(t) - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Riešením (AR) spolu s okrajovou podmienkou (PT) je

$$\psi(t) = 1 - e^{t-100}.$$

Pred analyzovaním jednotlivých prípadov zistíme, pre aké τ platí rovnosť

$$\psi(\tau) - \frac{1}{2} = 0.$$

Po dosadení dostaneme

$$1 - e^{\tau-100} - \frac{1}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \tau = 100 + \ln\frac{1}{2} = 100 - \ln 2.$$

Pretože $\tau \in (0,100)$, tak v tomto prípade riadenie nebude konštantné, ale bude to nasledovná po čiastkach konštantná funkcia:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 3 & \text{ak } t \in [0, 100-\ln 2),\\ 0 & \text{ak } t \in [100-\ln 2, 100]. \end{cases}$$

Teraz hľadáme odozvu pre takto definované riadenie:

(i) Na intervale $[0, 100-\ln 2)$ je $\hat{u}(t) \equiv 3$, čo dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 3.$$

Všeobecným riešením je

$$\hat{x}(t) = Ae^{-t} + 3,$$

kde A je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 10$ dostaneme, že

$$\hat{x}(t) = 7e^{-t} + 3.$$

Dosadením $t = 100 - \ln 2$ dostaneme

$$\hat{x}(100-\ln 2) = 3 + 14e^{-100}.$$

(ii) Na intervale $[100-\ln 2, 100]$ máme $\hat{u}(t) \equiv 0$. Tu riešime stavovú rovnicu

$$\dot{x}(t) = -x(t).$$

Všeobecným riešením rovnice je

$$\hat{x}(t) = Be^{-t},$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnéj podmienky $x(100 - \ln 2) = 3 + 14e^{-100}$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 7e^{-t} + \frac{3}{2}e^{100-t}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 3 & \text{ak } t \in [0, 100-\ln 2)\\ 0 & \text{ak } t \in [100-\ln 2, 100] \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 7e^{-t} + 3 & \text{ak } t \in [0, 100-\ln 2)\\ 7e^{-t} + \frac{3}{2}e^{100-t} & \text{ak } t \in [100-\ln 2, 100] \end{cases}$$

Príklad 16.

Úloha s pevným koncom a s ohraničením na riadenie

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\min \int_0^T c_1 u(t)^2 + c_2 x(t)\,\mathrm{d}t, \quad T \text{ je dané}$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$x(T) = B$$
$$u(t) \geq 0$$

kde $B > 0$, $c_1 > 0$ a $c_2 > 0$ sú dané konštanty.

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s pevným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže ide o úlohu na minimum, môžeme položiť $\psi^0 = -1$ alebo $\psi^0 = 0$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(c_1 u^2 + c_2 x) + \psi u$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 c_2$$

(PM) $$\psi^0(c_1 u(t)^2 + c_2 \hat{x}(t)) + \psi(t) u(t) \longrightarrow \max_{u \geq 0}$$

(PT) $$\psi(T) = \chi$$

Riešenie: $\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ V tomto prípade z (AR) a (PT) vyplýva, že $\psi(t) \equiv \chi$. Zrejme $\chi \neq 0$, lebo $(\psi^0, \chi) \neq (0, 0)$. Ďalej misí platiť $\chi < 0$, inak by (PM) nemala riešenie. V tomto prípade z (PM) vyplýva, že $\hat{u}(t) \equiv 0$ pre každé $t \in [0, T]$. Odozva na takéto riadenie by však bola vzhľadom na stavovú rovnicu konštantná funkcia, čo je spor s počiatočnou a koncovou podmienkou, keďže $x(0) \neq x(T)$.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = -1}$ V tomto prípade je Hamiltonova funkcia konkávnou funkciou premennej u. Pre jej maximum na intervale $[0, \infty)$ platí

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \dfrac{\psi(t)}{2c_1} < 0\,, \\ \dfrac{\psi(t)}{2c_1} & \text{ak } \dfrac{\psi(t)}{2c_1} \geq 0. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je $\psi(t) = c_2 t + A$, kde A je konštanta. Keďže ide o rastúcu funkciu, $\hat{u}(t)$ bude mať tvar

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t \in [0, \tau), \\ \dfrac{c_2 t + A}{2c_1} & \text{ak } t \in [\tau, T], \end{cases}$$

kde $\tau \in [0, T]$. Konkrétnu hodnotu τ určíme na základe bodu $\bar{t}$, ktorý je definovaný ako $\psi(\bar{t}) = 0$, a to nasledovne:

(i) Ak $\bar{t} < 0$, potom $\tau = 0$.

(ii) Ak $\bar{t} \in [0, T]$, potom $\tau = \bar{t}$.

(iii) Ak $\bar{t} > T$, potom $\tau = T$. (Tento prípad však vedie k nulovému riadeniu všade, ktoré je neprípustné.)

Zo stavovej rovnice a počiatočnej podmienky vyplýva, že na intervale $[0, \tau)$ má odozva tvar $\hat{x}(t) \equiv 0$.
Vypočítajme teraz odozvu na intervale $[\tau, T]$: Po dosadení $\hat{u}(t)$ do stavovej rovnice dostaneme

$$\dot{x}(t) = \frac{c_2 t + A}{2c_1}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{At}{2c_1} + C,$$

kde C je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(\tau) = 0$ dostaneme, že

$$\hat{x}(t) = \frac{c_2(t^2 - \tau^2)}{4c_1} + \frac{A(t - \tau)}{2c_1}.$$

Využitím koncovej podmienky $\hat{x}(T) = B$ určíme hodnotu konštanty A:

$$A = \frac{4c_1 B - c_2(T^2 - \tau^2)}{2(T - \tau)}.$$

Ešte zostáva určiť τ. Na tento účel potrebujeme riešiť rovnicu $\psi(\bar{t}) = 0$, t.j.

$$c_2 \bar{t} + \frac{4c_1 B - c_2(T^2 - \bar{t}^2)}{2(T - \bar{t})} = 0.$$

Jej riešením dostaneme

$$\bar{t} = T \pm 2\sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}}.$$

Znamená to, že ak $T > 2\sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}}$, potom $\tau = T - 2\sqrt{\frac{c_1 B}{c_2}}$, inak $\tau = 0$. Napokon dosadíme A do $\hat{u}(t)$ a do $\hat{x}(t)$ a po úprave dostaneme výsledok.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t \in [0, \tau), \\ \dfrac{c_2}{2c_1} t + \dfrac{4c_1 B - c_2(T^2 - \tau^2)}{4c_1(T - \tau)} & \text{ak } t \in [\tau, T], \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t \in [0, \tau), \\ \dfrac{c_2(t^2 - \tau^2)}{4c_1} + \dfrac{4c_1 B - c_2(T^2 - \tau^2)}{4c_1(T - \tau)}(t - \tau) & \text{ak } t \in [\tau, T], \end{cases}$$

kde $\tau = \max\left(0, T - 2\sqrt{\dfrac{c_1 B}{c_2}}\right)$.

Príklad 17.

Úloha s pevným časom a s pevným koncom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^1 -u(t)^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$x(1) = 0$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom a s pevným koncom. Keďže ide o maximalizačnú úlohu, stavová rovnica je lineárna v u a úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie, môžeme položiť $\psi^0 = 1$ (pozri poznámku nižšie).

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = -\psi^0 u^2 + \psi\,(x + u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -\psi(t)$

(PM) $\quad -u^2 + \psi(t)\,(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max\limits_{u \in R}$

Riešenie: Keďže Hamiltonova funkcia je konkávna v premennej u a úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie, môžeme na riešenie (PM) využiť podmienku prvého rádu, ktorá je v tvare

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}\psi(t).$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t},$$

kde A je konštanta.

Po dosadení do riešenia (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}\psi(t) = \frac{1}{2}Ae^{-t}.$$

Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = x(t) + \frac{1}{2}Ae^{-t}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice spolu s počiatočnou podmienkou je

$$\hat{x}(t) = x(0)e^t + \int_0^t e^{t-s}\,\frac{1}{2}Ae^{-s}\,\mathrm{d}s = e^t\left(1 + \frac{A}{4}\right) - \frac{A}{4}e^{-t}.$$

Využitím koncovej podmienky $x(1) = 0$ dostaneme

$$A = \frac{4e^2}{1 - e^2}.$$

Po dosadení A a úprave dostaneme

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t - e^{2-t}}{1 - e^2}.$$

Ešte A musíme dosadiť do $\hat{u}$, teda

$$\hat{u}(t) = \frac{2e^{2-t}}{1 - e^2}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \frac{2e^{2-t}}{1 - e^2}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t - e^{2-t}}{1 - e^2}$$

Poznámka: V jednorozmernej úlohe, pre ktorú sú splnené obe nasledujúce podmienky:

(i) stavová rovnica je lineárna v u,

(ii) úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie,

môžeme vždy predpokladať, že $\psi^0 \neq 0$. V prípade $\psi^0 = 0$ by totiž neexistovalo riešenie podmienky maxima, takže týmto prípadom sa netreba vôbec zaoberať.

Príklad 18.

Úloha s pevným časom a s pevným koncom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{4}\int_0^1 u(t)^4\,\mathrm{d}t \\ &\dot{x}(t) = x(t) + u(t) \\ &x(0) = 1 \\ &x(1) = 0 \end{aligned}$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom a s pevným koncom. Keďže ide o minimalizačnú úlohu, stavová rovnica je lineárna v u a úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = \frac{1}{4}\psi^0 u^4 + \psi\,(x + u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -\psi(t)$

(PM) $\quad -\frac{1}{4}u^4 + \psi(t)\,(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max\limits_{u\in R}$

Riešenie: Keďže Hamiltonova funkcia je konkávna v premennej u a úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie, môžeme na riešenie (PM) využiť podmienku prvého rádu, ktorá je v tvare

$$\hat{u}(t) = \sqrt[3]{\psi(t)}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t},$$

kde A je konštanta.

Po dosadení do riešenia (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \sqrt[3]{\psi(t)} = Be^{-\frac{t}{3}}, \quad \text{kde} \quad B = \sqrt[3]{A}.$$

Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = x(t) + Be^{-\frac{t}{3}}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice a počiatočnej podmienky je

$$\hat{x}(t) = x(0)e^t + \int_0^t e^{t-s}Be^{-\frac{s}{3}}\,\mathrm{d}s = e^t\left(1 + \frac{3B}{4}\right) - \frac{3B}{4}e^{-\frac{t}{3}}.$$

Využitím koncovej podmienky $x(1) = 0$ dostaneme

$$B = \frac{4}{3}\,\frac{e^{\frac{4}{3}}}{1 - e^{\frac{4}{3}}}.$$

Teda po dosadení B a následných úpravách dostaneme

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t - e^{\frac{4-t}{3}}}{1 - e^{\frac{4}{3}}}.$$

Ešte B musíme dosadiť do $\hat{u}$ a po úprave dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{4e^{\frac{4-t}{3}}}{3(1 - e^{\frac{4}{3}})}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \frac{4e^{\frac{4-t}{3}}}{3(1 - e^{\frac{4}{3}})}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t - e^{\frac{4-t}{3}}}{1 - e^{\frac{4}{3}}}$$

Príklad 19.

Úloha s pevným časom a s pevným koncom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^4 x(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$x(4) = 1$$
$$u(t) \in [-1, 1]$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s pevným koncom a s ohraničením na riadenie. Je to úloha na maximum, a preto $\psi^0 = 0$ alebo $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 x + \psi u$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = -\psi^0$$

(PM) $$\psi^0 \hat{x}(t) + \psi(t)\, u \longrightarrow \max_{u\in[-1,1]}$$

(PT) $$\psi(4) = \chi$$

Riešenie: Riešením (PM) dostaneme

(*) $$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0, \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0, \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Riešením (AR) je

$$\psi(t) = -\psi^0 t + A,$$

kde A je konštanta.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ Z (AR) a (PT) vyplýva, že $\psi(t) \equiv \chi$. Zrejme $\chi \neq 0$ (keďže $(\psi^0, \chi) \neq (0, 0)$), a teda z (*) vyplýva, že $\hat{u}(t) \equiv -1$ pre $\forall t \in [0, 4]$ alebo $\hat{u}(t) \equiv 1$ pre $\forall t \in [0, 4]$. Postupne vyšetríme oba prípady.

(i) Ak $\hat{u}(t) \equiv -1$, po dosadení riadenia do stavovej rovnice dostaneme $\dot{x}(t) = -1$. Riešením spĺňajúcim počiatočnú podmienku je

$$x(t) = 1 - t.$$

Toto riešenie však nie je prípustné, lebo nespĺňa koncovú podmienku.

(ii) Ak $\hat{u}(t) \equiv 1$, zo stavovej rovnice a z počiatočnej podmnienky dostaneme

$$x(t) = 1 + t.$$

Ani toto riešenie však nespĺňa koncovú podmienku.

Prípad $\psi^0 = 0$ teda nedáva žiadneho kandidáta na optimálne riešenie.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 1}$ Riešením (AR) dostaneme

$$\psi(t) = -t + A,$$

kde A je konštanta. Funkcia $\psi(t)$ je klesajúca, preto teoreticky môžu nastať tri prípady:

(i) Ak $\psi(t) > 0$ pre $\forall t \in [0, 4]$, potom podľa (*) je $\hat{u}(t) \equiv 1$. Ako sme však ukázali vyššie, toto riadenie nie je prípustné.

(ii) Ak $\psi(t) < 0$ pre $\forall t \in [0, 4]$, potom podľa (*) je $\hat{u}(t) \equiv -1$. Ako sme však ukázali vyššie, ani toto riadenie nie je prípustné.

(iii) Ak $\exists \tau \in (0, 4)$ pre ktoré platí $\psi(t) > 0$ na $[0, \tau)$ a $\psi(t) < 0$ na $(\tau, 4]$, potom podľa (*)

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } t \in [0, \tau), \\ -1 & \text{ak } t \in [\tau, 4]. \end{cases}$$

Spočítajme odozvu na takéto riadenie a určíme bod τ:

Na intervale $[0, \tau)$ je $\hat{u}(t) \equiv 1$, dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme, že $\dot{x}(t) = 1$. Riešením tejto rovnice spolu s počiatočnou podmienkou $x(0) = 1$ je

$$\hat{x}(t) = 1 + t.$$

Na intervale $[\tau, 4]$ je $\hat{u}(t) \equiv -1$, dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme, že $\dot{x}(t) = -1$. Riešením spĺňajúcim počiatočnú podmienku $x(\tau) = 1 + \tau$ je

$$\hat{x}(t) = -t + 2\tau + 1.$$

Z koncovej podmienky v tvare

$$x(4) = -4 + 2\tau + 1 = 1$$

dostaneme $\tau = 2$. Teda na intervale $[\tau, 4]$ je odozva v tvare

$$\hat{x}(t) = -t + 5.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } t \in [0, 2) \\ -1 & \text{ak } t \in [2, 4] \end{cases} \qquad \text{a} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{ak } t \in [0, 2) \\ -t + 5 & \text{ak } t \in [2, 4] \end{cases}$$

Príklad 20.

Neautonómna úloha

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T t^2 + u(t)^2 \,\mathrm{d}t, \quad T \text{ je voľné} \\ &\dot{x}(t) = u(t) \\ &x(0) = 4 \\ &x(T) = 5 \end{aligned}$$

Ide o neautonómnu Lagrangeovu úlohu s voľným časom, s pevným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže ide o minimalizačnú úlohu, ktorej stavová rovnica je lineárna v u a úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(t, x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(t^2 + u^2) + \psi u$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = 0$

(PS) $\quad -\left(T^2 + u(T)^2\right) + \psi(T)\, u(T) = 0$

(PM) $\quad -\left(t^2 + u^2\right) + \psi(t)\, u \longrightarrow \max_{u \in R}$

Riešenie: Keďže Hamiltonova funkcia je konkávna v premennej u a hľadáme voľný extrém, môžeme využiť podmienku prvého rádu v tvare

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = A,$$

kde A je konštanta.
Dosadením do riešenia (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{A}{2}.$$

Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = \frac{A}{2}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = \frac{At}{2} + B,$$

kde B je konštanta.

Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 4$ dostaneme, že

$$\hat{x}(t) = \frac{At}{2} + 4.$$

Využitím koncovej podmienky

$$\hat{x}(\hat{T}) = \frac{A\hat{T}}{2} + 4 = 5$$

dostaneme, že

$$A = \frac{2}{\hat{T}}.$$

Využitím (PS) určíme $\hat{T}$. Známe hodnoty

$$\hat{u}(T) = \frac{A}{2} \quad \text{a} \quad \psi(T) = A$$

dosadíme do (PS)

$$-\left(T^2 + \frac{A^2}{4}\right) + A\left(\frac{A}{2}\right) = 0.$$

Z toho

$$\hat{T} = \pm\frac{A}{2}.$$

Najprv riešme sústavu rovníc

$$A = \frac{2}{\hat{T}} \quad \text{a} \quad \hat{T} = \frac{A}{2}.$$

Jej riešením je $\hat{T} = 1$ a $A = 2$.
Po dosadení A do $\hat{x}(t)$ a $\hat{u}(t)$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = t + 4 \quad \text{a} \quad \hat{u}(t) \equiv 1.$$

Na druhej strane, sústava

$$A = \frac{2}{\hat{T}} \quad \text{a} \quad \hat{T} = -\frac{A}{2}$$

nemá v obore reálnych čísiel riešenie.

Výsledok:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= 1 \\ \hat{u}(t) &\equiv 1 \\ \hat{x}(t) &= t + 4 \end{aligned}$$

Príklad 21.

Bolzova úloha

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\min \int_0^1 u(t)^2 \,\mathrm{d}t + x(1)^2$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 1$$

Ide o autonómnu Bolzovu úlohu, kde $\varphi(x) = x^2$ s pevným časom ($T = 1$), s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže sa jedná o minimalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 u^2 + \psi(x + u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = -\psi(t)$

(PT) $\quad \psi(1) = -2\hat{x}(1)$

(PM) $\quad -u^2 + \psi(t)(u + \hat{x}(t)) \longrightarrow \max_{u \in R}$

Riešenie: Pretože Hamiltonova funkcia v (PM) je konkávna v u, riešením (PM) dostávame

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t},$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = -2\hat{x}(1)e^{1-t}.$$

Po dosadení do riešenia (PM) máme

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2} = -\hat{x}(1)e^{1-t}.$$

Už poznáme riadenie $\hat{u}$, ktoré dosadíme do stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = x(t) - \hat{x}(1)e^{1-t}.$$

Všeobecným riešením stavovej rovnice je

$$\hat{x}(t) = ce^t + \frac{1}{2}\hat{x}(1)e^{1-t},$$

kde c je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky dostaneme

$$\hat{x}(t) = \left[1 - \frac{e}{2}\hat{x}(1)\right] e^t + \frac{1}{2}\hat{x}(1)e^{1-t}.$$

Ešte potrebujeme určiť $\hat{x}(1)$. Ak vyčíslime hodnotu odozvy v čase $t = 1$, dostaneme

$$\hat{x}(1) = \left[1 - \frac{e}{2}\hat{x}(1)\right] e + \frac{1}{2}\hat{x}(1).$$

Z toho dostaneme

$$\hat{x}(1) = \frac{2e}{1 + e^2}.$$

To dosadíme naspäť do $\hat{x}(t)$, potom

$$\hat{x}(t) = \left[1 - \frac{e}{2}\frac{2e}{1 + e^2}\right] e^t + \frac{1}{2}\frac{2e}{1 + e^2}e^{1-t} = \frac{e^t + e^{2-t}}{1 + e^2}.$$

Ešte vypočítame riadenie, pre ktoré platí $\hat{u} = -x(1)e^{1-t}$. Po dosadení za $\hat{x}(1)$ máme

$$\hat{u}(t) = -\frac{2e}{1 + e^2}e^{1-t} = \frac{-2e^{2-t}}{1 + e^2}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \frac{-2e^{2-t}}{1 + e^2}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t + e^{2-t}}{1 + e^2}$$

Poznámka: V Bolzovej úlohe sa zmena formulácie podmienok PPM vzťahuje na podmienku transverzality, ktorá v tomto prípade nadobúda tvar

$$\psi(T) = \psi^0\chi + \psi^0\frac{d\varphi(x(T))}{dx}.$$

Keďže ide o úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\chi = 0$, a teda $\psi^0 \neq 0$.

Príklad 22.

Bolzova úloha (Úloha o obnove stroja)

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T e^{-\rho t}(\pi x(t) - u(t)^2/2)\,\mathrm{d}t + e^{-\rho T} S x(T), \quad T \text{ je dané} \\ &\dot{x}(t) = -dx(t) + u(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

kde $\rho > 0$, $\pi > 0$, $S > 0$, $d > 0$ a $x_0 > 0$ sú dané konštanty.

Interpretácia: Zmena stavu stroja je popísaná rovnicou $\dot{x}(t) = -dx(t) + u(t)$, kde $d > 0$ je miera opotrebovania stroja a u vyjadruje mieru údržby stroja. Úlohou je nájsť optimálnu mieru údržby stroja, ktorá maximalizuje celkový zisk diskontovaný diskontnou mierou ρ vrátane zisku z predaja stroja za zbytkovú hodnotu stroja na konci obdobia. Potom $u^2/2$ sú náklady na údržby. Zisk z využívania stroja je priamo úmerný jeho aktuálnemu stavu a náklady sú kvadratickou funkciou miery údržby. Ukážte, že ako sa mení u v závislosti od výrazu $S - \dfrac{\pi}{\rho+\delta}$. V tejto úlohe nie je potrebné počítať odozvu na optimálne riadenie.

Ide o neautonómnu Bolzovu úlohu s pevným časom, s voľným koncom a bez ohraničení na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $H(t, x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 e^{-\rho t}\left(\pi x - \dfrac{u^2}{2}\right) + \psi(u - dx)$

(AR) $\dot{\psi}(t) = -\pi e^{-\rho t} + \psi(t) d$

(PT) $\psi(T) = S e^{-\rho T}$

(PM) $e^{-\rho t}\left(\pi \hat{x}(t) - \dfrac{u^2}{2}\right) + \psi(t)(u - d\hat{x}(t)) \longrightarrow \max\limits_{u \in R}$

Riešenie: Hamiltonova funkcia je konkávna v u, preto riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \psi(t) e^{\rho t}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = c_1 e^{dt} + \frac{\pi e^{-\rho t}}{\rho + d}.$$

Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = e^{d(t-T) - \rho T}\left[S - \frac{\pi}{\rho + d}\right] + \frac{\pi e^{-\rho t}}{\rho + d}.$$

Teraz dosadíme $\psi(t)$ do $\hat{u}(t)$ a dostaneme

$$\hat{u}(t) = e^{(d+\rho)(t-T)}\left[S - \frac{\pi}{\rho + d}\right] + \frac{\pi}{\rho + d}.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = e^{(d+\rho)(t-T)}\left[S - \frac{\pi}{\rho + d}\right] + \frac{\pi}{\rho + d}$$

Vlastnosti $\hat{u}$:

(i) Ak $S - \dfrac{\pi}{\rho + d} > 0$, tak $\hat{u}(t)$ rastie.

(ii) Ak $S - \dfrac{\pi}{\rho + d} < 0$, tak $\hat{u}(t)$ klesá.

(iii) Ak $S - \dfrac{\pi}{\rho + d} = 0$, tak $\hat{u}(t) \equiv \dfrac{\pi}{\rho + d}$ je konštantná.

Príklad 23.

Mayerova úloha

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}&\max\ 5x(100)\\&\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)\\&x(0) = 10\\&u(t) \in [0,3]\end{aligned}$$

Ide o autonómnu Mayerovu úlohu s voľným koncom s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x,u,\psi^0,\psi) = \psi(-x+u)$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = \psi(t)$$

(PT) $$\psi(100) = 5$$

(PM) $$\psi(t)\,(-\hat{x}(t)+u) \longrightarrow \max_{u\in[0,3]}$$

Riešenie: Riešením (PM) je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi(t) < 0,\\ 3 & \text{ak } \psi(t) > 0,\\ [0,3] & \text{ak } \psi(t) = 0.\end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^t,$$

kde A je konštanta.
Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = 5e^{t-100}.$$

Keďže $\psi(t) > 0$ pre každé $t \in [0,100)$, z (PM) dostávame $\hat{u}(t) \equiv 3$.
Dosadíme toto riadenie do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 3.$$

Všeobecným riešením je

$$\hat{x}(t) = Be^{-t} + 3,$$

kde B je konštanta.
Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 10$ dostaneme, že

$$\hat{x}(t) = 7e^{-t} + 3.$$

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv 3$$

$$\hat{x}(t) = 7e^{-t} + 3$$

Príklad 24.

Dvojrozmerná Mayerova úloha

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\max\ 8x_1(18) + 4x_2(18) \\ &\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ &\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - u(t) \\ &x_1(0) = 15 \\ &x_2(0) = 20 \\ &u(t) \in [0, 1] \end{aligned}$$

V tomto prípade stačí nájsť riadenie, nie je potrebné počítať odozvu.

Ide o dvojrozmenú autonómnu Mayerovu úlohu s voľným koncom s ohraničením na riadenie. Keďže sa jedná o maximalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = 1$. Úloha je dvojrozmerná, preto budeme mať dve adjungované premenné $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF)

$$H(x_1, x_2, u, \psi^0, \psi_1, \psi_2) = \psi_1(x_1 + x_2 + u) + \psi_2(2x_1 - u)$$

(AR) $\qquad \dot{\psi}_1(t) = -\psi_1(t) - 2\psi_2(t)$

(1) $\qquad \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t)$

(PT) $\qquad \psi_1(18) = 8$

(2) $\qquad \psi_2(18) = 4$

(PM)

$$\psi_1(t)\left(\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + u\right) + \psi_2(t)\left(2\hat{x}_1(t) - u\right) \longrightarrow \max_{u\in[0,1]}$$

Riešenie: (PM) je ekvivalentná s podmienkou

$$u(\psi_1(t) - \psi_2(t)) \longrightarrow \max_{u\in[0,1]} .$$

Jej riešením je

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi_1(t) - \psi_2(t) < 0 \\ 1 & \text{ak } \psi_1(t) - \psi_2(t) > 0 \\ [0,1] & \text{ak } \psi_1(t) - \psi_2(t) = 0 \ . \end{cases}$$

Dvojica adjungovaných rovníc predstavuje lineárny systém obyčajných diferenciálnych rovníc v tvare

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \Psi = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie takého systému diferenciálnych rovníc je v tvare

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = cv_1 e^{\lambda_1 t} + dv_2 e^{\lambda_2 t}$$

kde λ_1 a λ_2 sú vlastné čísla matice Ψ a v_1, v_2 sú vlastné vektory prislúchajúce k týmto vlastným číslam. V tomto prípade dostaneme hodnoty λ_1 a λ_2 riešením rovnice

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

odkiaľ $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -2$. Príslušné vlastné vektory sú v tvare

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Adjungované premenné sú preto v tvare

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= ce^t + 2de^{-2t}, \\ \psi_2(t) &= -ce^t + de^{-2t}. \end{aligned}$$

Konštanty c a d určíme pomocou okrajových podmienok (PT), z ktorých dostaneme $c = 0$ a $d = 4e^{36}$. Odtiaľ

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= 8e^{36-2t}, \\ \psi_2(t) &= 4e^{36-2t}. \end{aligned}$$

Všimnime si, že po dosadení za $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$ do výrazu $\psi_1(t) - \psi_2(t)$ vystupujúcom v riešení (PM) dostaneme

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = 8e^{36-2t} - 4e^{36-2t} = 4e^{36-2t} > 0.$$

Riadenie (PM) je preto v tvare $\hat{u}(t) \equiv 1$.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv 1$$

Príklad 25.

Bolzova úloha s voľným časom

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T 2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x(T)^2, \quad T \text{ je voľné} \\ &\dot{x}(t) = -x(t) - u(t) \\ &x(0) = a \\ &u(t) \in [0,1] \end{aligned}$$

kde $a > 0$ je daná konštanta.

Ide o autonómnu Bolzovu úlohu s voľným časom s voľným koncom a s ohraničením na riadenie. Keďže ide o minimalizačnú úlohu s voľným koncom, môžeme položiť $\psi^0 = -1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = 2\psi^0 + \psi(-x - u)$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = \psi(t)$

(PT) $\quad \psi(\hat{T}) = -\hat{x}(\hat{T})$

(PS) $\quad -2 + \psi(t)(-\hat{x}(t) - \hat{u}(t)) \equiv 0$

(PM) $\quad -2 + \psi(t)\,(-\hat{x}(t) - u) \longrightarrow \max\limits_{u \in [0,1]}$

Riešenie: Riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \psi(t) > 0, \\ 1 & \text{ak } \psi(t) < 0, \\ (0,1) & \text{ak } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^t,$$

kde A je konštanta. Využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = -e^{t-T}x(T).$$

Ďalej využitím (PS) dostaneme

$$\hat{x}(\hat{T})(\hat{x}(\hat{T}) + \hat{u}(\hat{T})) = 2.$$

Z toho vyplýva, že $\hat{x}(\hat{T}) \neq 0$.
Môžu teda nastať dva prípady:

(i) Ak $x(T) < 0$, tak $\psi(t) = -e^{t-T}x(T) > 0$, teda $\hat{u}(t) \equiv 0$. Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = -x(t).$$

Riešením tejto rovnice spĺňajúcim počiatočnú podmienku $x(0) = a$ je

$$x(t) = ae^{-t}.$$

Teraz vyšetríme platnosť predpokladu $x(T) < 0$ pre $x(T) = ae^{-T}$. Vieme, že $a > 0$ a $e^{-T} > 0$, teda tento predpoklad nie je splnený. Z toho vyplýva, že riadenie $u(t) \equiv 0$ nespĺňa podmienky PPM.

(ii) Ak $x(T) > 0$, tak $\psi(t) = -e^{t-T}x(T) < 0$, a teda $\hat{u}(t) \equiv 1$. Toto riadenie dosadíme do stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 1.$$

Riešením spĺňajúcim počiatočnú podmienku je

$$x(t) = e^{-t}x(0) + \int_0^t -e^{-(t-s)}\,\mathrm{d}s = e^{-t}(a+1) - 1.$$

Ešte vyšetríme predpoklad $x(T) > 0$ pre $x(T) = e^{-T}(a+1) - 1$. Úpravami dostaneme, že tento predpoklad je splnený práve vtedy, ak

(*) $\quad T < \ln(a+1).$

Zistili sme teda, že jediným prípustným riešením spĺňajúcim podmienky PPM môže byť

$$\hat{u}(t) \equiv 1 \quad \text{a} \quad \hat{x}(t) = e^{-t}(a+1) - 1,$$

a to za predpokladu, že je splnený predpoklad (*). Využitím (PS) určíme teraz $\hat{T}$. Známe hodnoty ako $\hat{u}(T) = 1$ a $\psi(T) = -\hat{x}(T)$ dosadíme do (PS) a dostaneme

$$-2 + \hat{x}(\hat{T})(\hat{x}(\hat{T}) + 1) = 0 \quad \text{t.j.} \quad (\hat{x}(\hat{T}) + 2)(\hat{x}(\hat{T}) - 1) = 0.$$

Riešením je jedine

$$\hat{x}(\hat{T}) = 1,$$

lebo mali sme predpoklad, že $x(T) > 0$. Aby sme zistili $\hat{T}$, treba ešte vyriešiť rovnicu

$$x(\hat{T}) = e^{-\hat{T}}(a+1) - 1 = 1.$$

Z toho dostaneme, že

$$\hat{T} = \ln\frac{a+1}{2},$$

čo spĺňa predpoklad (*).

Výsledok:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &\equiv 1 \\ \hat{x}(t) &= e^{-t}(a+1) - 1 \\ \hat{T} &= \ln\frac{a+1}{2} \end{aligned}$$

Príklad 26.

Úloha s ohraničením v tvare nerovnosti na koncový stav

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\max \int_0^1 -u(t)^2 \,\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$x(1) \geq 3$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, bez ohraničení na riadenie a s ohraničením na koncový stav v tvare nerovnosti. Keďže ide o maximalizačnú úlohu, stavová rovnica je lineárna v u a úloha neobsahuje ohraničenia na riadenie, môžeme položiť $\psi^0 = 1$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $$H(x, u, \psi^0, \psi) = -\psi^0 u^2 + \psi(x + u)$$

(AR) $$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)$$

(PT) $$\psi(1) = \lambda$$

(PK) $$\lambda(\hat{x}(1) - 3) = 0, \quad \lambda \geq 0$$

(PM) $$-u^2 + \psi(t)(\hat{x}(t) + u) \longrightarrow \max_{u \in R}$$

Riešenie: Riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = Ae^{-t},$$

kde A je konštanta. Po dosadení do riešenia (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{Ae^{-t}}{2}.$$

Podmienka komplementarity (PK) je splnená, ak

$$x(1) - 3 = 0 \quad \wedge \quad \lambda \geq 0$$

alebo

$$\lambda = 0 \quad \wedge \quad x(1) - 3 \geq 0.$$

Postupne rozoberieme oba prípady:

(i) Najprv vyšetríme prípad $x(1) - 3 = 0$ a $\lambda \geq 0$. Tu máme úlohu s pevným koncom. Riadenie

$$\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{Ae^{-t}}{2}$$

dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t) + \frac{Ae^{-t}}{2}.$$

Všeobecným riešením je

$$\hat{x}(t) = ce^t - \frac{Ae^{-t}}{4},$$

kde c je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme, že $c = 1 + \frac{A}{4}$. Pomocou koncovej podmienky $x(1) = 3$ a konštanty c určíme konštantu A. Z rovnice

$$3 = x(1) = e^t + \frac{A}{4}(e^t - e^{-t})$$

vieme, že $A = \frac{4e^2 - 12e}{1 - e^2}$. Po dosadení a úprave dostaneme

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t - e^{2-t} - 3e^{1+t} + 3e^{1-t}}{1 - e^2}.$$

Konštantu A dosadíme do riadenia a dostaneme

$$\hat{u}(t) = \frac{2e^{2-t} - 6e^{1-t}}{1 - e^2}.$$

(ii) Teraz vyšetríme prípad $\lambda = 0$ a $x(1) - 3 \geq 0$. V tomto prípade je (PT) v tvare

$$\psi(1) = 0.$$

Z (AR) v tomto prípade dostame, že $\psi(t) \equiv 0$. Po dosadení do $\hat{u}(t) = \frac{\psi(t)}{2}$ dostaneme, že $\hat{u}(t) \equiv 0$. Riadenie dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

$$\dot{x}(t) = x(t).$$

Všeobecným riešením je

$$x(t) = de^t,$$

kde d je konštanta. Využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$x(t) = e^t.$$

Všimnime si však, že v tomto prípade platí $x(1) = e$, a teda nie je splnená podmienka $x(1) \geq 3$. Riadenie $u(t) \equiv 0$ je preto neprípustné.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \frac{2e^{2-t} - 6e^{1-t}}{1 - e^2}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{e^t - e^{2-t} - 3e^{1+t} + 3e^{1-t}}{1 - e^2}$$

Príklad 27.

Úloha s ohraničením v tvare nerovnosti na koncový stav

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}&\max \int_0^2 -x(t)\,\mathrm{d}t\\ &\dot{x}(t) = u(t)\\ &x(0) = 1\\ &x(2) \geq 0\\ &u(t) \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s ohraničením na riadenie a s ohraničením na koncový stav v tvare nerovnosti. Keďže nemáme podmienku na koncový stav v tvare rovnosti, platí $\chi = 0$, a teda podmienka na nenulovosť multiplikátorov sa redukuje na tvar $(\psi^0, \lambda) \neq (0, 0)$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = -\psi^0 x + \psi u$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = \psi^0$

(PT) $\quad \psi(2) = \lambda$

(PK) $\quad \lambda \hat{x}(2) = 0, \quad \lambda \geq 0$

(PM) $\quad -\psi^0 \hat{x}(t) + \psi(t) u \longrightarrow \max\limits_{u \in [-1,1]}$

Riešenie: riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0\ . \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je $\psi(t) = \psi^0 t + A$, kde A je konštanta. $\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ V tomto prípade máme $\psi(t) \equiv A$, a pretože $\psi(2) = \lambda \geq 0$, tak $A \geq 0$. Všimnime si, že ak by $A = 0$, potom $\lambda = 0$, čo je spor s podmienkou $(\psi^0, \lambda) \neq (0, 0)$. Preto $A > 0$. Z toho vyplýva, že $u(t) \equiv 1$. Po dosadení tohto riadenia do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme $x(t) = t + 1$. Všimnime si, že $x(2) = 3 \geq 0$ a teda $u(t) \equiv 1$ je síce prípustné riadenie, ale nespĺňa (PK), lebo $x(2) = 3$ a $\lambda = \psi(2) = A > 0$.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 1}$ V tomto prípade máme $\psi(t) = t + A$, kde A je konštanta.
Teraz analyzujeme podmienku komplementarity (PK). Tá je splnená, ak

$$x(2) = 0 \text{ a } \lambda \geq 0 \qquad \text{alebo} \qquad \lambda = 0 \text{ a } x(2) \geq 0.$$

Postupne rozoberieme oba prípady:

(i) Najprv skúmame prípad $x(2) = 0$ a $\lambda \geq 0$. Pretože $\lambda = \psi(2) = 2 + A \geq 0$, máme dve možnosti:

a) $\psi(t) = t + A \geq 0 \quad \forall t$, t.j. $A \geq 0$ a teda $u(t) \equiv 1$. Tento prípad už sme analyzovali a vieme, že toto riadenie nespĺňa podmienky PPM, lebo $\lambda = \psi(2) \geq 2$ a $x(2) = 3$, čo je spor s (PK).

b) $\exists t_1 \in (0, 2)$, že

$$t + A < 0 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad \text{a} \quad t + A > 0 \quad \forall t \in (t_1, 2].$$

Máme teda

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } t \in [0, t_1) \\ 1 & \text{ak } t \in [t_1, 2]. \end{cases}$$

Spočítajme odozvu na takéto riadenie a určíme bod t_1. Na intervale $[0, t_1)$ je $\hat{u}(t) = -1$. Dosadíme do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 1 - t.$$

Na intervale $[t_1, 2]$ je $\hat{u}(t) = 1$. Opäť dosadíme do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(t_1) = 1 - t_1$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = t - 2t_1 + 1.$$

Z koncovej podmienky $x(2) = 2 - 2t_1 + 1 = 0$ dostaneme, že $t_1 = \frac{3}{2}$. Na intervale $[t_1, 2]$ je odozva $\hat{x}(t) = t - 2$. Teda podmienka PPM je splnená.

(ii) Ostáva preskúmať prípad $\lambda = 0$ a $x(2) \geq 0$. To znamená, že $\psi(2) = \lambda = 0$ a pretože $\psi(t)$ je rastúca, tak dostávame, že $\psi(t) \leq 0 \quad \forall t$, a teda $u(t) \equiv -1$. Dosadením tohto riadenia do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$x(t) = -t + 1.$$

Ak dosadíme čas $T = 2$ dostaneme, že $x(2) = -1$ a to je spor s predpokladom $x(2) \geq 0$. Z toho vyplýva, že toto riadenie je neprípustné.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } t \in \left[0, \frac{3}{2}\right) \\ 1 & \text{ak } t \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{ak } t \in \left[0, \frac{3}{2}\right) \\ t - 2 & \text{ak } t \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

Príklad 28.

Úloha s ohraničením v tvare nerovnosti na koncový stav

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}
&\max \int_0^4 -x(t)\,\mathrm{d}t \\
&\dot{x}(t) = u(t) \\
&x(0) = 1 \\
&x(4) \le 1 \\
&u(t) \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

Ide o autonómnu Lagrangeovu úlohu s pevným časom, s ohraničením na riadenie a s ohraničením na koncový stav v tvare nerovnosti, pričom toto ohraničenie je v tvare $h(x(4)) \ge 0$, kde $h(x) = -x+1$. Keďže nemáme podmienku na koncový stav v tvare rovnosti, platí $\chi = 0$, a teda podmienka na nenulovosť multiplikátorov sa redukuje na tvar $(\psi^0, \lambda) \ne (0, 0)$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\quad H(x, u, \psi^0, \psi) = -\psi^0 x + \psi u$

(AR) $\quad \dot{\psi}(t) = \psi^0$

(PT) $\quad \psi(4) = -\lambda$ 2

(PK) $\quad \lambda(-\hat{x}(4) + 1) = 0, \quad \lambda \ge 0$

(PM) $\quad -\psi^0 \hat{x}(t) + \psi(t) u \longrightarrow \max\limits_{u \in [-1,1]}$

Riešenie: Riešením (PM) dostaneme

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0\ . \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = \psi^0 t + A,$$

kde A je konštanta.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ V tomto prípade máme $\psi(t) \equiv A$, a pretože $\psi(4) = -\lambda \le 0$, tak $A \le 0$. Všimnime si, že ak by $A = 0$, potom $\lambda = 0$, čo je spor s podmienkou $(\psi^0, \lambda) \ne (0, 0)$. Preto $A < 0$. Z toho vyplýva, že $u(t) \equiv -1$. Po dosadení tohto riadenia do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$x(t) = -t + 1.$$

Všimnime si, že $x(4) = -3 \le 1$ a teda $u(t) \equiv -1$ je síce prípustné riadenie, ale nespĺňa (PK), lebo $x(4) = -3$ a $\lambda = -\psi(4) = -A > 0$.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 1}$ V tomto prípade máme $\psi(t) = t + A$, kde A je konštanta. Keďže $\psi(t)$ je rastúca a $\psi(4) = -\lambda \le 0$, tak $\psi(t) < 0$ pre každé $t \in [0, 4)$. Preto má riadenie tvar $\hat{u}(t) \equiv -1$ a optimálna odozva je (podobne ako v predchádzajúcom prípade) v tvare $\hat{x}(t) = 1 - t$. Teraz analyzujeme podmienku komplementarity (PK). Tá je splnená, ak

$$x(4) = 1 \text{ a } \lambda \ge 0 \qquad \text{alebo} \qquad \lambda = 0 \text{ a } x(4) \le 1.$$

Prvý z uvedených prípadov nemôže nastať, keďže $\hat{x}(4) = -3$. Druhá z možností je však splnená pre $A = -4$, t.j. $\psi(t) = t - 4$.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) \equiv -1 \qquad \hat{x}(t) = 1 - t$$

Poznámka: Všimnite si, že v tomto prípade sme našli kandidáta na optimálne riešenie, v ktorom nebolo ohraničenie na koncový stav v tvare nerovnosti aktívne, a teda úloha ma preto pre toto konkrétne riadenie charakter úlohy s voľným koncom. To potvrdzuje aj fakt, že adjungovaná premená spĺňa $\psi(T) = 0$, čo je klasická (PT) pre úlohu s voľným koncom.

Príklad 29.

Bolzova úloha s ohraničením v tvare nerovnosti na koncový stav

Zadanie: Nájdite riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned}&\max \int_0^2 -x(t)\,\mathrm{d}t + x(2)\\&\dot{x}(t) = u(t)\\&x(0) = 1\\&x(2) \geq 0\\&u(t) \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Ide o autonómnu Bolzovu úlohu s pevným časom, s ohraničením na riadenie a s ohraničením na koncový stav v tvare nerovnosti. Keďže nemáme podmienku na koncový stav v tvare rovnosti, platí $\chi = 0$, a teda podmienka na nenulovosť multiplikátorov sa redukuje na tvar $(\psi^0, \lambda) \neq (0, 0)$.

Formulácia Hamiltonovej funkcie a podmienok PPM:

(HF) $\qquad H(x, u, \psi^0, \psi) = -\psi^0 x + \psi u$

(AR) $\qquad \dot{\psi}(t) = \psi^0$

(PM) $\qquad -\psi^0 \hat{x}(t) + \psi(t) u \longrightarrow \max_{u \in [-1,1]}$

(PT) $\qquad \psi(2) = \psi^0 + \lambda$

(PK) $\qquad \lambda \hat{x}(2) = 0, \lambda \geq 0$

Riešenie: Riešením (PM) dostaneme

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } \psi(t) < 0 \\ 1 & \text{ak } \psi(t) > 0 \\ [-1, 1] & \text{ak } \psi(t) = 0\ . \end{cases}$$

Všeobecným riešením (AR) je

$$\psi(t) = \psi^0 t + A,$$

kde A je konštanta.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 0}$ V tomto prípade máme $\psi(t) \equiv A$, a pretože $\psi(2) = \lambda \geq 0$, tak $A \geq 0$. Všimnime si, že ak by $A = 0$, potom $\lambda = 0$, čo je spor s podmienkou $(\psi^0, \lambda) \neq (0, 0)$. Preto $A > 0$. Z toho vyplýva, že $u(t) \equiv 1$. Po dosadení tohto riadenia do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$x(t) = t + 1.$$

Všimnime si, že $x(2) = 3 \geq 0$ a teda $u(t) \equiv 1$ je síce prípustné riadenie, ale nespĺňa (PK), lebo $x(2) = 3$ a $\lambda = \psi(2) = A > 0$.

$\boxed{\text{Prípad } \psi^0 = 1}$ Po dosadení $\psi^0 = 1$ do (AR) a s využitím (PT) dostaneme

$$\psi(t) = t + \lambda - 1.$$

V závislosti od hodnoty λ môžu nastať dva prípady, ktoré postupne rozoberieme:

(i) Ak $\lambda \geq 1$, potom $\psi(t) = t + \lambda - 1 \geq 0 \quad \forall t$ a teda $u(t) \equiv 1$. Z predchádzajúcej časti vieme, že odozvou pre riadenie $u(t) \equiv 1$ je $x(t) = t + 1$. Potom $x(2) = 3$, a teda z (PK) dostávame podmienku $\lambda = 0$, ktorá v tomto prípade nie je splnená (keďže sme predpokladali $\lambda \geq 1$).

(ii) Ak $\lambda \in [0, 1)$, potom dostávame

$$\psi(t) < 0 \quad \forall t \in [0, 1-\lambda) \quad \text{a} \quad \psi(t) > 0 \quad \forall t \in (1-\lambda, 2].$$

Máme teda

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } t \in [0, 1-\lambda) \\ 1 & \text{ak } t \in [1-\lambda, 2]. \end{cases}$$

Spočítajme odozvu na takéto riadenie. Na intervale $[0, 1-\lambda)$ je $\hat{u}(t) = -1$. Dosadíme do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(0) = 1$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = 1 - t.$$

Na intervale $[1-\lambda, 2]$ je $\hat{u}(t) = 1$. Opäť dosadíme do stavovej rovnice a s využitím počiatočnej podmienky $x(1-\lambda) = 1 - (1-\lambda) = \lambda$ dostaneme

$$\hat{x}(t) = t + 2\lambda - 1.$$

Teraz analyzujeme podmienku komplementarity (PK). Tá je splnená, ak

$$x(2) = 0 \text{ a } \lambda \geq 0 \qquad \text{alebo} \qquad \lambda = 0 \text{ a } x(2) \geq 0.$$

V prvom prípade dostaneme z podmienky $x(2) = 0$, že $\lambda = -\frac{1}{2}$, čo nespĺňa (PK).
V druhom prípade dostaneme z podmienky $\lambda = 0$, že $x(2) = 1$, takže (PK) je splnená.

Výsledok:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & \text{ak } t \in [0, 1) \\ 1 & \text{ak } t \in [1, 2] \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{ak } t \in [0, 1) \\ t - 1 & \text{ak } t \in [1, 2] \end{cases}$$