MATEMATICKO FYZIKÁLNA FAKULTA
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
BRATISLAVA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

1988

DANIEL ŠEVČOVIČ

MATEMATICKO FYZIKÁLNA FAKULTA
UNIVERZITY
JÁNA ÁMOSA KOMENSKÉHO
Bratislava

DIPLOMOVÁ PRÁCA

O NELINEÁRNEJ ROVNICI VIBRÁCII TRÁMU

1988 DANIEL ŠEVČOVIČ

Ja, Daniel Ševčovič, prehlasujem na svoju česť, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Daniel Ševčovič

v Bratislave dňa 14. apríla 1988

Aj touto cestou by som sa chcel
úprimne poďakovať

RNDr. Vladimírovi Ďurikovičovi CSc.,

za vedenie mojej diplomovej práce,
za množstvo cenných rád
a kritických pripomienok, ktoré podstatnou
mierou prispeli k riešeniu problematiky.

1. KAPITOLA

ÚVOD

Cieľom tejto diplomovej práce je štúdium vlastností rovnice transverzálnych (priečnych) vibrácii struny resp. homogénneho trámu. Jedná sa o evolučnú parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorá v jednorozmernom prípade môže byť vyjadrená v tvare:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \left(\gamma + m\left(\int_0^\ell \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx \right)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Všeobecne v n - dimenzionálnom prípade má rovnica tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \Delta \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\gamma + m\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)\right)\Delta u + \Delta^2 u = f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

kde $\Delta = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ štandardne predstavuje Laplaceov operátor.

Hlavným nástrojom na riešenie problémov súvisiacich s uvedenou rovnicou bude aparát funkcionálnej analýzy, teória analytických (holomorfných) pologrúp a teória abstraktných semilineárnych parabolických rovníc, pričom v podstatnej miere využijeme práve semilineárny charakter našej rovnice. Táto vlastnosť nám umožní namiesto pôvodnej rovnice skúmať istú abstraktnú semilineárnu parabolickú rovnicu v príslušnom Banachovom priestore, ktorá v akomsi zmysle bude súvisieť s horeuvedenou rovnicou. Prakticky to znamená, že sa nebudeme priamo zaoberať klasickými riešeniami danej rovnice, ale náš záujem bude sústredený predovšetkým na skúmanie kvalitatívnych vlastností riešení istej abstraktnej evolučnej úlohy.

Úvodná kapitola prináša stručný súhrn označení, základných pojmov a všeobecných výsledkov.

V druhej kapitole budeme študovať otázky lokálnej existencie a jednoznačnosti riešení. V podstatnej miere sa tu uplatní teória a výsledky z analytických pologrúp a sektoriálnych operátorov. Za nie príliš obmedzujúcich predpokladov na hladkosť funkcii m a f (dostačujúca bude len lokálna lipschitzovskosť) sa nám podarí zaručiť lokálnu existenciu a jednoznačnosť riešenia.

Úlohou tretej kapitoly je skúmanie globálnych vlastností riešení. Zaoberať sa budeme semidynamickými systémami, ktoré sú v príslušnom Banachovom priestore generované trajektóriami riešení danej autonómnej evolučnej rovnice. Diskutovaná bude problematika Ljapunovových funkcii pre semidynamický systém. Hlavným záujmom tejto kapitoly bude dôkaz existencie globálneho súvislého atraktora pre daný semidynamický systém. Na riešenie týchto otázok bude použitá teória abstraktných dissipatívnych dynamických systémov a jej aplikácia na našu rovnicu.

1.1 Súčasný stav problematiky

Prvá práca, systematicky rozoberajúca teóriu rovníc transverzálnych vibrácii struny, pochádza od J. Balla [Ba]. V uvedenej práci Ball využíva topologické metódy na štúdium asymptotických vlastností riešení rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(\beta + k \int_0^{\ell} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \cdot \frac{\partial^5 u}{\partial^4 v\, \partial t} -$$

$$- \sigma \left(\int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx \right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

kde konštanty $k, \alpha, \gamma, \sigma$ sú kladné a β, δ sú ľubovolné konštanty. Práca sa zaoberá existenciou slabého dynamického systému (t.j. dynamického systému v slabej topológii príslušného Banachovho priestoru), ktorý je generovaný danou rovnicou.

Fundamentálnu úlohu pri aplikácii teórie abstraktných semilineárnych rovníc longitudinálnych (pozdĺžnych) vibrácii struny zohrávajú práce G.F. Webba [We] a J. Fitzgibbona [Fi] z r. 1980 resp. 1981. Webb v podstatnej miere využíva semilineárny charakter rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha\, \Delta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) \quad ; \alpha > 0$$

na dôkaz potrebných lokálnych a globálnych výsledkov. Fitzgibbon zoslabuje Webbove predpoklady na lipschitzovskosť funkcie f na púhu hölderovskosť. Stráca však v lokálnej teórii vlastnosť jednoznačnosti riešenia. Obidvaja autori využívajú modernú teóriu sektoriálnych operátorov a semilineárnych abstraktných parabolických rovníc. Pri skúmaní asymptotických vlastností rovnice Webb ukazuje niektoré zaujímavé vlastnosti omega - limitných množín, ktoré vyplývajú z faktu, že skúmaný dynamický systém je " gradient like system ". Idea využitia vlastností Ljapunovových funkcii na dôkaz toho, že omega - limitná množina je vždy podmnožinou množiny stacionárnych riešení equlibrií sa využíva aj v tretej kapitole tejto diplomovej práce.

Základ pre aplikáciu teórie abstraktných dissipatívnych procesov a teórie kondenzujúcich zobrazení a mier nekompaktnosti podáva séria článkov od P. Massata [Ma1, Ma2, Ma3]. Prvé dve uvedené práce sa venujú štúdiu abstraktných dissipatívnych procesov, pričom rôzne typy dissipatívnosti sú skúmané vo vzťahu k tzv. alfa - kondenzujúcim zobrazeniam, kde α je známa Kuratowského miera nekompaktosti *. Aplikáciou týchto abstraktných výsledkov do teórie evolučných rovníc rôzneho typu ** je Massatova nasledujúca práca [Ma3] z r. 1983. Massat v nej študuje podobnú rovnicu ako Webb:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \Delta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \qquad \beta > 0$$

ktorá opäť predstavuje rovnicu longitudinálnych vibrácii struny resp. homogénnej tyče. Za málo obmedzujúcich predpokladov sa dokazuje ekvivalentnosť bodovej a kompaktnej dissipatívnosti istého diskrétneho dynamického systému, ktorý je generovaný Poincarého " periódovým" zobrazením.

Využitím výsledkov Massata z oblasti abstraktných diskrétnych dynamických systémov a ich aplikáciou do teórie spojitých dynamických systémov sa zaoberá práca J. Halea a N. Stavrakisa [HS] z r. 1986. V tejto práci je skúmaná problematika existencie súvislých globálnych atraktorov pre rovnicu transverzálnych vibrácii struny:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) \qquad \beta > 0$$

V práci je ukázaná existencia C_0 - pologrupy (nelineárnej) ktorá je generovaná danou rovnicou. Ukazuje sa podobne ako u Webba, že generovaný semidynamický systém je " gradient like system" a tak každá omega limitná množina je zároveň podmno-

---

*: pre bližšiu informáciu je vhodná monografia [AKP]

** : skúmajú sa rovnice prevažne neutrálneho typu, presnejšie neutrálne funkcionálno dif. rovnice a retardované funkcionálno dif. rovnice s posunutým argumentom.

žinou množiny equlibrii. Variačnou metódou je ukázaná ohraničenosť množiny equlibrii, čo následne implikuje bodovú dissipatívnosť semidynamického systému. Využijúc Massatovu teóriu autori poukazujú na existenciu súvislého globálneho atraktoru pre danú rovnicu. Naviac je dokázaná celá rada zaujímavých kvalitatívnych výsledkov o spomínanom atraktore. Napríklad: rovnomerná asymptotická stabilita, súvislosť a konečnosť limitnej kapacity atraktoru, čo má za následok konečnosť Hausdorffovej dimenzie atraktoru. Práve pri posledne uvedenom tvrdení sa podstatne využila teória α- kondenzujúcich zobrazení a všeobecné výsledky o konečnosti Hausdorffovej dimenzie atraktorov, ktorá pochádza od J. Malleta- Pareta [MP].

Otázkami asymptotickej stability nulového riešenia autonómnej rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta \frac{\partial u}{\partial t}\left(\alpha + m\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right)\Delta u + \beta \Delta^2 u = 0$$

$$\alpha, \beta > 0$$

sa zaoberá práca P. Billera [Bi] z r. 1987 . Skúmaná je predovšetkým rýchlosť konvergencie ľubovolného riešenia k nulovému stacinárnemu riešeniu. Výsledky sú však v podstatnej miere podmienené existenciou niekoľkých prvých integrálov " energie" uvedenej rovnice.

Na záver tohto stručného a samozrejme tým pádom neúplného pohľadu do histórie sa v krátkosti zmienime o prácach zaoberajúcich sa klasickými riešeniami rovníc longitudinálnych vibrácii struny.

J.L. Lions vo svojej fundamentálnej monografii [Li], str. 317 kladie ako problém otázku globálnej existencie riešení rovnice (klasických) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(k.\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x)$$

V prípade dvojrozmerného času - priestoru $R^+ \times R$ dáva pozitívnu odpoveď na horeuvedený problém práca C.K. Bernštejna [Be] . Ukázal, že predpoklad analytičnosti počiatočných podmienok implikuje globálnu existenciu v čase riešení rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi\left(\int_0^\ell \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kde φ je analytická funkcia taká, že $\varphi(\xi) \geq \alpha > 0$ pre ľubovolné $\xi \geq 0$

1.2 MODEL

Tvar skúmanej nelineárnej rovnice vychádza a je zároveň zovšeobecnením problému, ktorým sa prvýkrát zaoberal Biler v práci [Bi] . V uvedenej práci však chýba akýkoľvek náznak odvodenia tvaru skúmanej rovnice. To je teda dôvod prečo fyzikálne odvodenie tvaru rovnice uvádzame na tomto mieste.

Uvažujme o transverzálnych / priečnych / pohyboch viskoelastického trámu v rovine X - Y / obr. 1 /. Predpokladajme, že celá sústava je umiestnená vo viskóznom médiu, ktorého odpor je priamo úmerný rýchlosti pohybu. Zanedbáme rotačné vplyvy / torzia trámu / a prudké deformácie. Celý trám natiahneme z pôvodnej dĺžky 1 na dĺžku 1+Δ , vďaka čomu dochádza k vnútornej zmene napätia. Konce trámu sú votknuté v bodoch (0,0) a (1+Δ ,0) . Voľne povedané: akonáhle dôjde k predĺženiu trámu tak vplyvom vnútorných a vokajších síl sa celá sústava dostáva do stavu vibrácie.

V našom modeli potom axiálna sila / t.j. sila pôsobiaca kolmo na trám / bude prostredníctvom fyzikálnych zákonov vyjadrená v tvare:

$$N = \frac{E.A}{1}\Delta + \frac{E.A}{2.1}\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L_2} + \frac{A\eta}{1} \cdot \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx$$

Pre moment ohybu platí:

$$M = - \frac{E.I}{1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \cdot I \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

kde v oboch vyjadreniach E predstavuje Youngov modul pružnosti, A je priečna rezná ploch trámu, η je efektívna vizkozita a I je priečny druhý plošný moment.

Rovnica vibrácii trámu nadobudne tvar:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \delta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kde výraz naľavo je prakticky vyjadrením kinetickej zložky energie, kým výraz napravo predstavuje potenciálnu energiu. Koeficient ρ je merná hustota a δ je koef. vonkajšieho tlmenia.

V klasickom modeli Balla [Ba] je vo vyjadrení axiálnej sily N hodnota Youngovho modulu konštantná. My však na rozdiel od statického prístupu pripustíme aj meniace sa hodnoty veličín E a A v závislosti od hodnoty normy gradientu funkcie výchylky, presnejšie teda:

$$N = \varrho\left(\gamma + m\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2}\right)\right)$$

kde m je nezáporná funkcia nezápornej reálnej premennej, pričom $m(0) = 0$. Zrejme oproti pôvodnému vyjadreniu sily N sme zanedbali vplyv vnútornej vizkoelasticity. V prípade, že

$$m(x) = E.A/(2.l.\varrho) \cdot x \quad \text{a} \quad \gamma = E.A.\Delta/(l.\varrho)$$

tak dostávame pôvodný tvar sily N / samozrejeme so zanedbaným vplyvom vizkoelasticity materiálu /

Nelineárnou funkciou m môžeme modelovať situácie, v ktorých dochádza k zmene Youngovho modulu pružnosti a prierezovej plochy A / napríklad : tečenie materiálu /.

Výsledná rovnica potom po úpravách nadobudne tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\eta I}{\varrho}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \left(\gamma + m\left(\int_0^l \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

Pôsobenie vonkajších zdrojov potenciálnej energie sa prejaví " príspevkom " na pravej strane horeuvedenej rovnice. Teda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \left(\gamma + m\left(\int_0^l \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\beta > 0 \qquad (1)$$

Uvedenú rovnicu (1) skúmame spolu so začiatočno - okrajovými podmienkami typu:

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \quad \text{pre } x \in \langle 0,1 \rangle$$

$$u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \quad \text{pre } t \geq 0$$

Uvedené začiatočno - okrajové podmienky označíme ako (2) . Úlohu (1), (2) budeme nazývať rovnica vibrácie trámu s votknutými koncami / clamped ends /. Poznamenajme, že v uvedenej rovnici (1) sme zanedbali aj vplyv vizkozity okolitého prostredia, teda koeficient vonkajšieho tlmenia δ je nulový.

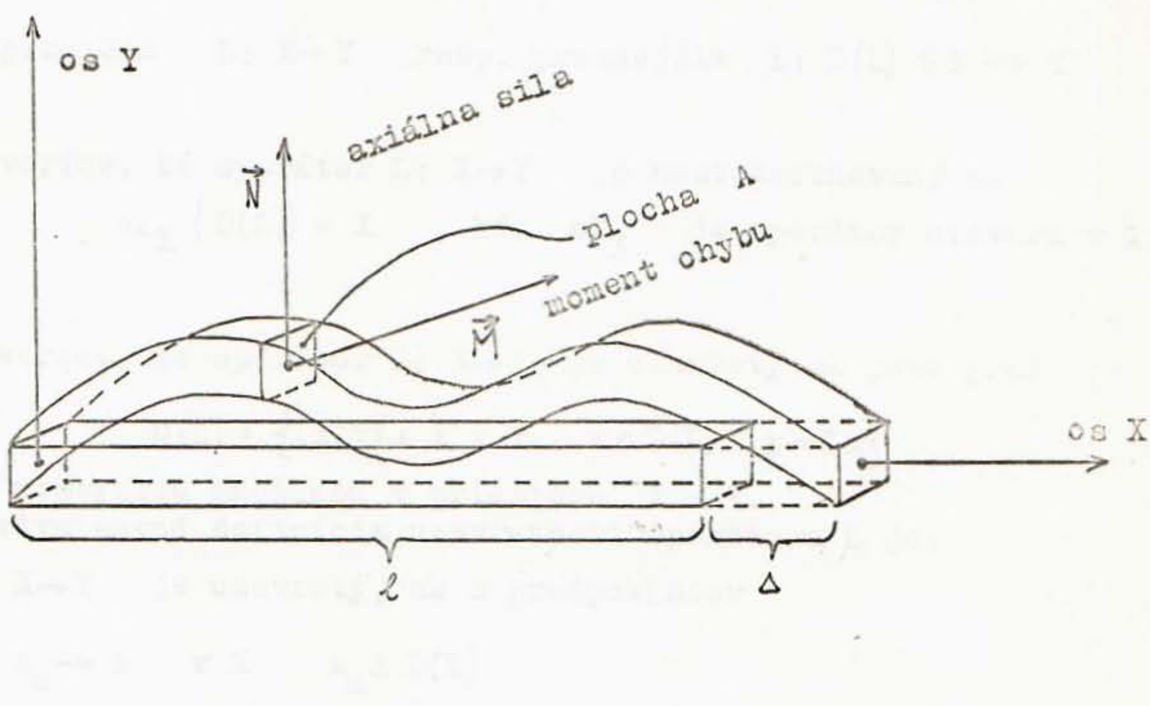
Člen $-\beta \cdot \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$

sa obvykle v literatúre označuje ako člen vnútorného tlmenia trámu. / v prípade longitudinálnych vibrácii pozri práce [We] , [Ba], [Ma3] /

Na zvýraznenie úlohy uvedeného člena hovoríme aj o rovnici

VNÚTORNE TLMENÝCH VIBRÁCII TRÁMU.

obr. 1



Poznámka. Prechod od dimenzie n = 1 k vyšším sa uskutočňuje nahradzovaním druhých derivácii príslušnými n - rozmernými Laplaceovými operátormi. V prípade n = 2 sa zrejme bude jednať o vibrácie hrubej vrstvy, ktorá je roztiahnutá a následne pevne votknutá na okraji vrstvy.

1.3 DEFINÍCIE, OZNAČENIA A VŠEOBECNÉ VÝSLEDKY

Všetky Banachove priestory, z ktorými budeme pracovať, budú definované nad poľom komplexných čísel. V prípade explicitného uvažovania Banachovho pristoru nad poľom reálnych čísel, budeme spektrálnu teóriu operátorov v takomto priestore rozvíjať v štandardnej komplexifikácii daného reálneho Banachovho priestoru.

Banachove priestory budeme skrátene označovať ako B - priestory. Symboly X, Y a $\mathcal{X}$ budú rezervované pre označovanie konkrétnych B - priestorov.

Symbolom $LB(X,Y)$ budeme označovať B - priestor všetkých lineárnych a spojitých zobrazení z X do Y.

Pre lineárny operátor L príjmeme nasledovné označenia:

$D(L)$ - oblasť definície / domain / $D(L) \subseteq X$
$R(L)$ - obor hodnôt / rang / $R(L) \subseteq Y$

Zapisujeme $L: X \to Y$ resp. presnejšie $L: D(L) \subseteq X \to Y$

Hovoríme, že operátor $L: X \to Y$ je hustodefinovaný ak

$cl_X(D(L)) = X$, kde cl_X je operátor uzáveru v X.

Hovoríme, že operátor $L: X \to Y$ je uzavretý ak jeho graf

$$G(L) := \{(x,y) \in X \times Y \text{ , } x \in D(L) \quad y = Lx\}$$

je uzavretou množinou v priestore $X \times Y$.
Ekvivalentná definícia uzavretosti operátora L je:

$L: X \to Y$ je uzavretý, ak z predpokladov

$x_n \to x$ v X $\quad x_n \in D(L)$

$Lx_n \to y$ v Y

vyplýva, že

$x \in D(L)$ a naviac $y = Lx$.

Nech $L: X \to Y$ je lineárny operátor. Symbolom $\varrho(L)$ budeme označovať rezolventnú množinu operátora L.

Ďalej nech $\sigma(L) = \mathcal{C} - \rho(L)$ označuje spektrum operátora L. Potom platí, že

$$\sigma(L) = \sigma_P(L) \cup \sigma_C(L) \cup \sigma_R(L)$$

kde

- $\sigma_P(L)$ označuje bodové spektrum / vlastné čísla / operátora L
- $\sigma_C(L)$ označuje spojité spektrum op. L
- $\sigma_R(L)$ označuje reziduálne spektrum op. L

Výraz typu:

$$\mathrm{Re}\,\sigma(L) \geqslant a \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Re}\,\sigma(L) > a$$

bude vyjadrovať ten fakt, že pre ľubovolné $\lambda \in L$ platí:

$$\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant a \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Re}\,\lambda > a$$

Symbolom Δ štandardne označíme Laplaceov operátor, ktorý je definovaný na hladkých funkciách, pričom

$$\Delta u = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

kde $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq R^n$ je otvorená množina.

Nech S je metrický priestor a X je B- priestor. Potom symbolom

$$C(S,X) \quad \text{resp.} \quad C(S:X)$$

budeme rozumieť priestor všetkých ohraničených a spojitých funkcií z množiny S do X. Príslušná norma na tomto priestore je definovaná vzťahom:

$$\|f\|_{C(S:X)} = \sup\left\{\|f(s)\|_X \ , \ s \in S\right\}$$

Je dobre známe, že priestor $C(S:X)$ je B - priestor.

Nech S je otvorená podmnožina nejakého B - priestoru Y, X je B - priestor. Potom pre celé kladné číslo k položme

$$C^k(S:X)$$

rovné množine všetkých k - krát spojite diferencovateľných / v silnom Fréchetovom zmysle / z množiny $S \subseteq Y$ do X.

Norma na tomto priestore je definovaná predpisom:

$$\|f\|_{C^k(S:X)} = \Sigma_{i=0}^{k} \sup \left\{ \|D^k f(s)\|,\ s \in S \right\}$$

kde D je operátor silnej derivácie.

Opäť priestor $C^k(S:X)$ je B- priestor.

Nech Ω je lebesgueovsky merateľná množina v R^n. Pre $1 \leq p < \infty$ symbolom $L_p(\Omega)$ označujeme priestor všetkých lebesgueovsky merateľných funkcií, zobrazujúcich Ω do poľa komplexných čísel, pričom p -tá mocnina absolútnej hodnoty je integrovateľná funkcia. Štandardne

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d_n x \right)^{1/p}$$

Symbolom $L_\infty(\Omega)$ označme množinu všetkých podstatne ohraničených funkcií / merateľných / zobrazujúcich množinu Ω do komplexných čísel, pričom norma je definovaná predpisom:

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Dôležitú úlohu v tejto práci zohrávajú tzv. Sobolevove priestory.

Opäť nech $\Omega \subseteq R^n$ je otvorená množina. Symbolom

$$W_p^k(\Omega)$$

budeme rozumieť množinu všetkých takých funkcií $f \in L_p(\Omega)$, pre ktoré ľubovolná zovšeobecnená derivácia / distribúcia / je prvkom priestoru $L_p(\Omega)$. Normu zavádzame klasickým spôsobom:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ je multiindex, ktorého modul je rovný

$$\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i = |\alpha|$$

Symbolom

$$\overset{o}{W}{}_p^k(\Omega)$$

označíme uzáver množiny $C_o^k(\Omega)$ v norme priestoru $W_p^k(\Omega)$ kde $C_o^k(\Omega)$ je množina tých $f \in C^k(\Omega)$, ktoré majú kompaktný support. Teda

$$\overset{o}{W}{}_p^k(\Omega) = cl_{W_p^k(\Omega)}(C_o^k \Omega)$$

Fenomén Sobolevových priestorov je možné skúmať aj v tom prípade keď "stupeň hladkosti" k nie je prirodzené číslo. Prístupov k tejto problematike je v zásade viacero. Každý prístup sa však zjednocuje v tom, že pre celočíselné hodnoty "stupňa hladkosti" sa získavajú pôvodné "celočíselné" Sobolevove priestory. Konštrukcia "neceločíselných" Sobolevových priestorov sa klasicky vo väčšine postupov zakladá na komplexnej metóde interpolácie * B - priestorov. Pre naše účely budú celkom postačovať priestory

$$H^{\alpha}(\Omega)$$

kde α je nezáporné reálne číslo. O takýchto priestoroch bude podstatné vedieť, že pre ľubovolné prirodzené číslo k platí

$$H^{k}(\Omega) = W_2^{k}(\Omega)$$

s tou poznámkou, že pre $\alpha \in (k,k+1)$ predstavuje $H^{\alpha}(\Omega)$ množinu hladších funkcií ako je $W_2^{k}(\Omega)$, ale zároveň aj množinu menej hladkých funkcií ako sú funkcie z priestoru $W_2^{k+1}(\Omega)$.

Iný prístup k zavedeniu pojmu neceločíselných Sobolevových priestorov je možné skúmať na základe tzv. Lizoŕky - nových priestorov **.

Sobolevove priestory s neceločíselným stupňom hladkosti sa často v literatúre nazývajú aj ako

Sobolev - Slobodeckého - priestory. [KFJ]

Základným technickým aparátom na riešenie problémov lokálnej existencie riešení semilineárnych parabolických úloh sú tzv. vety o vnorení Sobolevových priestorov.

Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že $\Omega \subseteq R^n$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou $\partial\Omega$.

Symbolom " $\hookrightarrow$ " rozumieme spojité vnorenie B - priestorov.

Poznámky.

* - so základami problematiky metódy interpolácie všeobecných B - priestorov sa je možné zoznámiť v monografii: [TaM]

** - presnejšie by sme mali hovoriť o tzv. izotropných Lizorkynových priestoroch. V prípade, že $\Omega = R^n$, tak potom sa takýmto priestorom hovorí aj priestory besselových potenciálov. Pre bližšiu informáciu pozri: [KFJ] resp. [He]

Keďže vo všetkých prípadoch, v ktorých budeme pracovať so Sobolevovými priestormi je zrejmé aká oblasť $\Omega \subseteq R^n$ sa uvažuje, tak štandardne používame skrátené označenia:

$$W_p^k \quad \text{resp.} \quad \overset{o}{W}{}_p^k \quad \text{resp.} \quad H^\alpha$$

Platia nasledovné základné vety o vnorení Sobolevových priestorov:

Nech k je prirodzené číslo. Potom

$$\text{ak} \quad \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0 \ , \text{tak} \quad W_p^k \hookrightarrow L_q$$

$$\text{ak} \quad n = p.k \ , \text{tak} \quad W_p^k \hookrightarrow L_q \quad \text{pre každé} \quad q \geq p$$

$$\text{ak} \quad \frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0 \ , \text{tak} \quad W_p^k \hookrightarrow C(\Omega)$$

Vzhľadom na to, že predpokladáme ohraničenosť množiny $\Omega \subseteq R^n$ tak triviálne platí vnorenie:

$$L_\infty \hookrightarrow L_q \quad \text{pre každé} \quad q \geq 1$$

Na záver tejto časti prinášame ešte niektoré označenia a konvencie:

Nech M je nejaká podmnožina B - priestoru X. Symbolom

$$\text{span}(M)$$

budeme rozumieť lineárny obal množiny M vo vektorovom priestore X.

Nech $\Omega \subseteq R^n$ je lebesguevosky merateľná množina. Symbolom $\text{meas}(\Omega)$ označíme lebesgueovu mieru tejto množiny.

Nech L je nejaký operátor na priestore X. Potom pod označením:

$\lambda + L$ budeme chápať operátor $\lambda I + L$,

kde I je identický operátor λ je prvok poľa skalárov.

Zápisom $x \longmapsto f(x)$ budeme rozumieť funkciu f, ktorá každému prvku x priradí prvok $f(x)$

2. KAPITOLA

ABSTRAKTNÁ ROVNICA VIBRÁCII TRÁMU

Cieľom tejto kapitoly bude štúdium vlastností istej semilineárnej abstraktnej evolučnej rovnice, ktorá súvisí s rovnicou (1).

Centrálnym pojmom z funkcionálnej analýzy bude tzv. analytická pologrupa lineárnych operátorov. Z toho dôvodu v prvej časti tejto kapitoly uvedieme niektoré základné výsledky, ktoré s týmto pojmom bezprostredne súvisia.

2.1 Sektoriálne operátory, analytické pologrupy.

Problematika, o ktorej sa hovorí v názve časti, je vcelku prístupne rozpracovaná v monografii Dana Henryho [He]. Niektoré partie z teórie zlomkových operátorov a B - priestorov je možné prehľadne nájsť aj v článku Gluška a Kreina [GK].

Pristúpime k definícii sektoriálneho operátora.

Definícia 2.1.1 ([He], Def, 1.3.1)

Lineárny operátor L s definičným oborom a oborom hodnôt, ktoré náležia B - priestoru Y, nazveme s e k t o r i á l n y o p e r á t o r v Y, ak L je uzavretý operátor, husto definovaný a pre nejaké $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $M \geq 1$; $a \in R$ platí, že s e k t o r

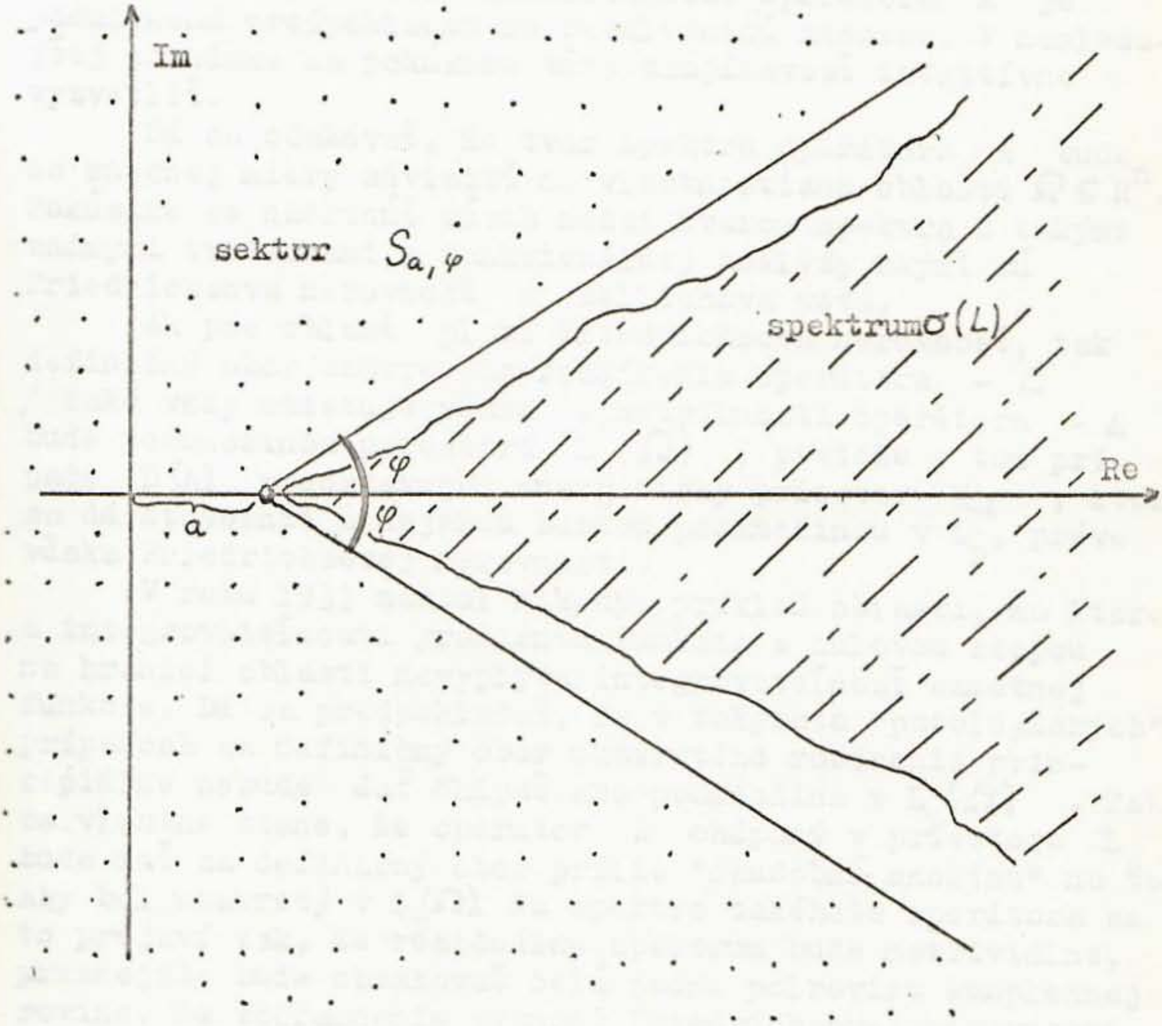
$$S_{a,\varphi} := \left\{ \lambda \in C \; ; \; \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi \; , \; \lambda \neq a \right\}$$

celý leží v rezolventnej množine $\rho(L)$ operátora L. Naviac pre každé $\lambda \in S_{a,\varphi}$ platí nasledovný odhad na normu rezolventy:

$$\|(\lambda - L)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

V rovine komplexných čísel si môžeme utvoriť geometrickú predstavu o sektore $S_{a,\varphi}$ podľa obr. 2.1

obr. 2.1



Na ilustráciu pojmu uvedieme niekoľko príkladov sektoriálnych operátorov. Tieto príklady sú prebraté z [He] .

Príklad 1. Každý lineárny spojitý operátor na Y je sektoriálny.

Príklad 2. Samoadjungovaný, kladne definitný , lineárny operátor je sektoriálny.

Príklad 3. Nech A je samoadjungované, uzavreté rozšírenie v L_p , $1 \leq p < \infty$ operátora $-\Delta$ definovaného na $C_0^2(\Omega)$. Potom, ak $\{\lambda \in C \text{ , } \operatorname{Re}\lambda < 0\} \subseteq \varrho(A)$, tak operátor A je sektoriálny v $L_p(\Omega)$.

Príklad 4. Nech A je taký operátor ako v príklade 3, pričom tento operátor uvažujeme na priestore $L_2(\Omega)$. Potom, ak rezolventná množina operátora A je neprázdna, tak operátor A je sektoriálny.

Zastavíme sa na okamih pri príkladoch 3,4. Už na prvý pohľad je zvláštne, že sektoriálnosť operátora A je podmienená predpokladmi na rezolventnú množinu. V nasledujúcej poznámke sa pokúsime túto zaujímavosť intuitívne vysvetliť.

Dá sa očakávať, že tvar spektra operátora A bude do značnej miery závisieť na vlastnostiach oblasti $\Omega \subseteq R^n$. Pokúsime sa načrtnúť súvis medzi tvarom spektra a takými známymi tvrdeniami z funkcionálnej analýzy akými sú Friedrichsova nerovnosť a Rellichova veta.

Ak pre oblasť platí Friedrichsova nerovnosť, tak definičný obor uzavretého rozšírenia operátora $-\Delta$ / také vždy existuje vďaka symetričnosti operátora $-\Delta$ / bude podmnožinou priestoru $L_p(\Omega)$, pretože v tom prípade D(A) predstavuje energetický priestor H_A, ktorý sa dá stotožniť s nejakou hustou podmnožinou v L_p, práve vďaka Friedrichsovej nerovnosti.

V roku 1933 našiel Nikodým príklad oblasti, na ktorej z integrovateľnosti gradientu funkcie s nulovou stopou na hranici oblasti nevyplýva integrovateľnosť samotnej funkcie. Dá sa predpokladať, že v takýchto "patologických" prípadoch sa definičný obor uzavretého rošírenia principiálne nebude dať chápať ako podmnožina v $L_p(\Omega)$. Tak sa vlastne stane, že operátor A chápaný v priestore L_p bude mať za definičný obor príliš "chudobnú množinu" na to aby bol uzavretý v $L(\Omega)$. Na spektre takéhoto operátora sa to prejaví tak, že reziduálne spektrum bude netriviálne, presnejšie bude obsahovať celú jednu polrovinu komplexnej roviny. Na zdôraznenie významu Friedrichsovej nerovnosti v procese uzatvárania operátora $-\Delta$, hovoríme niekedy aj o tzv. Friedrichsovom uzavretí operátora $-\Delta$ (bližšie pozri [RS])

Na druhej strane Rellichova veta o kompaktnosti vnorenia $W_2^1(\Omega)$ do $L_2(\Omega)$ má úzky súvis s diskrétnosťou spektra operátora A / kompaktosť rezolventy A^{-1} /. Veľmi triviálnymi úvahami sa dá nahliadnuť, že ak oblasť $\Omega \subseteq R^n$ nie je ani ohraničená, ani kváziohraničená * tak potom horeuvedené vloženie určite nie je kompaktné. Z toho dôvodu sa môže stať, že spojitá časť spektra je netriviálna, čo v istom zmysle komplikuje naše budúce úvahy, z toho hľadiska, že namiesto ortonormálnych rozvojov podľa vlastných funkcií operátora A v priestore $L_2(\Omega)$ je

* definíciu kváziohraničenej oblasti možno nájsť v [A]

v takých prípadoch nutné použiť aparát tzv. spektrálnych mier. V našom prípade bude oblasť Ω natoľko "dobrá", že k spojitá časť spektra nebude existovať, a tak vlastne vystačíme s ortonormálnymi rozvojmi, ktoré odpovedajú "atomickým" spektrálym mieram.

Problematiku "kvality" oblasti $\Omega \subseteq R^n$, pričom máme na mysli platnosť Friedrichsovej nerovnosti a Rellichovej vety, vybavíme štandardným spôsobom - predpokladáme, že oblasť $\Omega \subseteq R^n$ má dostatočne hladkú hranicu $\partial\Omega$.

Nasleduje definícia tzv. analytickej pologrupy lineárnych operátorov. Tento pojem je fundamentálnym v celej diplomovej práci.

Definícia 2.1.2 ([He], Def. 1.3.3)

A n a l y t i c k á p o l o g r u p a v B - priestore Y je množina lineárnych spojitých operátorov

$$\{ T(t) \ , \ t \geq 0 \}$$

pre ktorú platí:

a/ $T(0) = id_Y$, $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$ pre $t, s \geq 0$

b/ pre každé $x \in Y$ je $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$

c/ pre každé $x \in Y$ je zobrazenie $t \longmapsto T(t)x$ reálne analytické z $(0, \infty)$ do Y

Ďalej môžeme definovať tzv. infinitezimálny generátor analytickej pologrupy $T(t)$ predpisom:

$$Lx := \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

kde $D(L) \subseteq Y$ je množina všetkých tých $x \in Y$, pre ktoré horeuvedená limita existuje v B - priestore Y.

Symbolom $\{ e^{Lt}, \ t \geq 0 \}$ označíme analytickú pologrupu, ktorej infinitezimálny generátor je práve operátor L.

Fundamentálnu úlohu v teórii analytických pologrúp má nasledovná veta, ktorá uvádza súvis medzi sektoriálnymi operátormi a infinitezimálnymi generátormi analytických pologrúp.

Veta 2.1.1 ([He] , Veta 1.3.4)

Nech L je sektoriálny operátor v B - priestore Y. Potom - L generuje analytickú pologrupu

$$\{e^{-Lt}, t \geq 0\} \quad ,$$

pre ktorú platí explicitné vyjadrenie v tvare abstaktného krivkového integrálu * :

$$e^{-Lt} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} (\lambda + L)^{-1} \cdot e^{\lambda t} \, d\lambda$$

kde Γ je ľubovolná krivka ležiaca v $\varrho(-L)$ taká, že

$$\lim_{\substack{|\lambda| \to \infty \\ \lambda \in \Gamma}} \arg \lambda \in \{-\theta, \theta\} \text{ pre nejaké } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Ďalej ak $\operatorname{Re} \sigma(L) > a$, tak platia nasledovné odhady

$$\| e^{-Lt} \| \leq C . e^{-at} \qquad \text{pre každé } t \geq 0$$

$$\| L \, e^{-Lt} \| \leq \frac{C}{t} . e^{-at} \qquad \text{pre každé } t > 0$$

kde konštanta $C > 0$ nezávisí na t.

Nakoniec pre každé $t > 0$ platí:

$$\frac{d}{dt} e^{-Lt} = -Le^{-Lt}$$

/ $\frac{d}{dt}(\cdot)$ je silná - Fréchetova derivácia /

Sektoriálnosť operátora L nám umožňuje dokázať, že pre krivku Γ z vety 2.11 horeuvedený integrál existuje, ak ho uvažujeme ako Riemannov integrál z operátorovo - značnej funkcie. Teóriu takéhoto integrálu je možné nájsť v klasických učebniciach [Sch] resp. [TaA] .

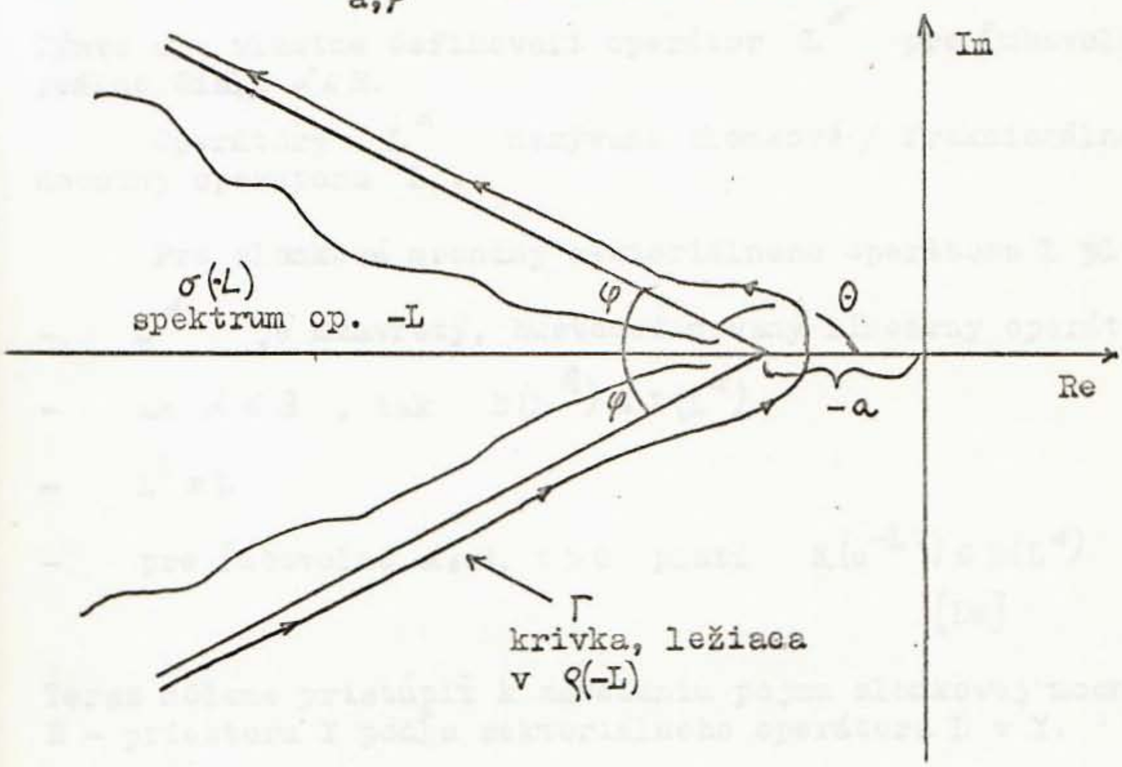
Podrobnejšou analýzou sa dá nahliadnuť tesná súvislosť uvedeného integrálu so známym Cauchyho vzorcom, ktorý sa objavuje v základoch komplexnej analýzy. Problémy spojené s tým, že krivka Γ nieje uzavretá v komplexnej rovine sa dajú vyriešiť úvahami o rozšírenej komplexnej rovine [TaA], čo sa dá intuitívne vysvetliť tak, že na krivku Γ budeme hladieť ako na uzavretú krivku na jednotkovej sfére, pre-

---

* uvedený integrál sa v literatúre nazýva Dunfordov [Y]

chádzajúcu "severným pólom", pričom pracujeme s klasickou stereografickou projekciou jednotkovej sféry na rozšírenú komplexnú rovinu. Tvar krivky Γ si môžeme priblížiť na obr. 2.2.

obr. 2.2 $S_{a,\varphi}$ je sektor operátora L .



Z l o m k o v é m o c n i n y s e k t o r i á l n y c h o p e r á t o r o v a B- p r i e s t o r o v.

V ďalšom budeme stále predpokladať, že L je sektoriálny operátor v B - priestore Y. Naviac budeme požadovať, aby Re $\sigma(L) > 0$.

Vzhľadom na odhady uvedené vo vete 2.1.1 môžeme korektne definovať operátory:

$$L^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty t^{\alpha-1} . e^{-Lt} \, dt \qquad \text{pre } \alpha > 0$$

kde $D(L^{-\alpha}) := Y$ a Γ predstavuje Gama funkciu.

Pretože $0 \in \varrho(L)$, dá sa poľahky nahliadnuť, že operátor $L^{-\alpha}$

je injektívny. Položme preto pre ľubovolné $\alpha > 0$

$$L^{\alpha} := (L^{-\alpha})^{-1} \text{, pričom } D(L^{\alpha}) := R(L^{-\alpha})$$

Pre $\alpha = 0$ definujeme $L^0 := Id_Y$, $D(L^0) := Y$

Týmto sme vlastne definovali operátor L^{α} pre ľubovolné reálne číslo $\alpha \in R$.

Operátory L^{α} nazývame zlomkové / frakcionálne / mocniny operátora L .

Pre zlomkové mocniny sektoriálneho operátora L platí:

- L^{α} je uzavretý, hustodefinovaný lineárny operátor
- ak $\alpha \leq \beta$, tak $D(L^{\beta}) \subseteq D(L^{\alpha})$
- $L^1 \equiv L$
- pre ľubovolné $\alpha \in R$, $t > 0$ platí $R(e^{-Lt}) \subseteq D(L^{\alpha})$

[He]

Teraz môžeme pristúpiť k zavedeniu pojmu zlomkovej mocniny B - priestoru Y podľa sektoriálneho operátora L v Y.

Definícia 2.1.3 ([He] , Def. 1.4.7)

Nech L je sektoriálny operátor v B- priestore Y, pričom $Re\, \sigma(L) > 0$. Pre ľubovolné $\alpha \geq 0$ položme

$$Y^{\alpha} := D(L^{\alpha}) \quad \text{- zlomková mocnina priestoru Y}$$

na množine Y^{α} zavádzame normu

$$\|x\|_{Y^{\alpha}} := \|L^{\alpha}(x)\|_Y \qquad \text{pre každé } x \in Y^{\alpha}$$

<u>Poznámka.</u> Predpoklad $Re\, \sigma(L) > 0$ je síce zbytočne obmedzujúci, pretože zlomkové mocniny priestoru Y sa dajú zaviesť aj bez tohto predpokladu. Pre naše účely však úplne postačuje uvažovať len také sektoriálne operátory, ktoré majú reálnu časť spektra kladnú. Vyhneme sa tak zdĺhavým diskusiám o korektnosti zavedenia normy na Y^{α} . [He]

O zlomkových mocninách B - priestoru Y podľa sektoriálneho operátora L platí nasledovná dôležitá veta:

Veta 2.1.3 ([He] , Veta 1.4.8)

Nech L je sektoriálny operátor v B - priestore Y, pričom Re $\sigma(L) > 0$.
Potom pre ľubovolné $\alpha \geqslant 0$ je Y^{α} opäť B - priestor.
ak $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, tak Y^{β} je hustá podmnožina v Y^{α}.
identické vloženie

$$Y^{\beta} \hookrightarrow Y^{\alpha} \text{ je spojité}$$

Naviac, ak operátor L má kompaktnú rezolventu, tak pre $0 \leqslant \alpha < \beta$ je vnorenie $Y^{\beta} \hookrightarrow\hookrightarrow Y^{\alpha}$ kompaktné.

U z a v r e t é r o z š í r e n i e L a p l a c e o v h o o p e r á t o r a .

V ďalšom budeme pod $L_2(\Omega)$ rozumieť Hilbertov priestor nad poľom komplexných čísel. Množina $\Omega \subseteq R^n$ nech je ohraničená oblasť s dostatočne hladkou hranicou $\partial\Omega$.

Z Friedrichsovej nerovnosti vyplýva, že operátor $-\Delta$ definovaný na $C_0^2(\Omega)$ je symetrický a kladne definitný v norme priestoru $L_2(\Omega)$. Zo symetrie a kladnej definitnosti plynie, že bodové a spojité spektrum operátora $-\Delta$ je časťou kladnej reálnej polpriamky. Teda

$$\sigma_p(-\Delta) \cup \sigma_c(-\Delta) \subseteq \langle 0, \infty) \qquad \text{[TaA] str. 341}$$

Je dobre známe, že operátor $-\Delta$ nie je uzavretý v $L_2(\Omega)$. To, ale znamená, že reziduálne spektrum operátora $-\Delta$ môže byť netriviálne, dokonca môže obsahovať celú polrovinu komplexných čísel.

Tento nedostatok operátora $-\Delta$ sa štandardne rieši Friedrichsovým uzatvorením operátora $-\Delta$, ktoré bude samoadjungované. Vďaka platnosti Rellichovej vety dostávame pre samoadjungované uzavreté rošírenie oveľa viac ako len odstránenie reziduálnej zložky spektra. Spektrum nového operátora A , ktorý je daným uzavretým samoadjungovaným rozšírením, dokonca nebude obsahovať ani len spojitú časť spektra teda

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \quad .$$

Symbol A bude odteraz rezervovaný na označenie uzavretého samoadjungovaného rozšírenia operátora $-\Delta$ v $L_2(\Omega)$.

Známe výsledky o lineárnom operátore A zhrnieme do nasledovného pozorovania:

Pozorovanie 2.1.1

Hilbertov priestor $L_2(\Omega)$ nad poľom C označme ako X .

a/ Operátor A je lineárny, uzavretý, samoadjungovaný operátor v priestore X.
Naviac operátor A je hustodefinovaný a reštrinkcia

$$A\Big/_{C_0^2(\Omega)} = -\Delta \quad , \text{ pričom } \quad C_0^2(\Omega) \subseteq D(A)$$

[TaA] , str. 341

b/ Spektrum operátora A je čisto bodové, teda $\sigma_p(A) = \sigma(A)$ a je zároveň časťou reálnej polpriamky.

Vlastné čísla operátora A tvoria neklesajúcu postupnosť, pričom

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

kde $\sigma_p(A) = \{\lambda_n \, , \, n\in N\}$ [La] , Veta 4.1

c/ Rezolventa A^{-1} je kompaktný operátor v X . Existuje úplná spočítateľná / bezpodmienečná / ortonormálna bazá priestoru X , ktorú tvoria všetky vlastné funkcie operátora A , t.j.

$$X = cl_X(\operatorname{span}\{\varphi_n \, , \, n\in N\})$$

kde $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ pre každé $n\in N$.

[La] , Veta 4.1 , [HS] , str. 16 , [TaA], str. 323

d/ Operátor A je sektoriálny v priestore X . Teda $-A$ generuje analytickú pologrupu, pričom pre ľubovolné $\delta\in(0, \lambda_1)$ platia odhady:

$$\|e^{-At}\| \leq C.e^{-\delta t} \qquad \text{pre každé } t\geq 0$$

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t}.e^{-\delta t} \qquad \text{pre každé } t>0$$

kde konštanta $C>0$ závisí len od δ .

[HS] str. 16 , [TaA] str. 324

e/ pre zlomkové mocniny priestoru X podľa operátora A platí:

$$X^1 = D(A) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

pre $0 \leq \alpha \leq 1$

$$X^\alpha = D(A^\alpha) = H^{2\alpha}(\Omega) \cap H_0^\alpha(\Omega)$$

[He] str. 38

f/ Ortogonálne rozvoje:

Kedže Re $\sigma(A) > 0$ a operátor A je samoadjungovaný

tak $A^{-\alpha} = \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} dE_\lambda$, kde dE_λ je štandardná spektrálna miera pre operátor A [He] str. 32

Pretože spektrum $\sigma(A)$ je len bodové, tak spektrálna miera dE_λ je atomická a teda pre každé $\varphi \in X$

$$A^{-\alpha}\varphi = \Sigma_{k=1}^\infty \lambda_k^{-\alpha}(\varphi, \varphi_k)\varphi_k$$

kde $(.,.)$ je skalárny súčin v $X = L_2(\Omega)$

Potom sa dá ľahko nahliadnuť, že pre $\varphi \in X^\alpha$, $\alpha > 0$

platí:
$$A^\alpha\varphi = \Sigma_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha(\varphi, \varphi_k)\varphi_k$$

Priestor X je Hilbertov priestor, pričom odpovedajúci skalárny súčin sa dá zaviesť nasledovne:

pre $\varphi, \psi \in X^\alpha$

$$(\varphi, \psi)_\alpha := (A^\alpha\varphi, A^\alpha\psi) = \Sigma_{k=1}^\infty \lambda_k^{2\alpha}(\varphi, \varphi_k)\overline{(\psi, \varphi_k)}$$

g/ pre abstraktnú mocninu A^2 platí $A^2 = A \circ A$ a

$$D(A^2) = \{\varphi \in D(A) \ , \ A\varphi \in D(A)\}$$

Na záver úvah o operátore A zavedieme ešte jeden dohovor:

Nasledovné symboly budú v celom texte rezervované a teda budú predstavovať stále tie isté pojmy.

$X = L_2(\Omega)$ nad poľom komplexných čísel

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ vlastné hodnoty operátora A

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ zodpovedajúce vlastné funkcie

2.2 LINEÁRNA HOMOGÉNNA ABSTRAKTNÁ ROVNICA VIBRÁCII TRÁMU

V tomto odseku sa budeme zaoberať dôkazom existencie analytickej pologrupy, ktorá súvisí s homogénnou rovnicou:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta A \frac{\partial u}{\partial t} + A^2 u = 0 \quad ; \ \beta > 0 \qquad (3)$$

Pristúpime k definíciam jednotlivých B - priestorov a lineárnych operátorov.

V celom ďalšom texte budeme pod symbolom $\mathcal{H}$ rozumieť Hilbertov priestor

$$\mathcal{H} := X^1 \times X = (W_2^2(\Omega) \cap \overset{01}{W}{}_2^1(\Omega)) \times L_2(\Omega)$$

Skalárny súčin je definovaný prirodzene. Pre ľubovolné $[u,v]$, $[\bar{u},\bar{v}] \in \mathcal{H}$ -

položme $([u,v] , [\bar{u},\bar{v}])_{\mathcal{H}} := (u,\bar{u})_{X^1} + (v,\bar{v})_X =$
$= (Au, A\bar{u}) + (v,\bar{v})$

kde symbol $[\cdot,\cdot]$ predstavuje dvojicu, ktorá je prvok kartézkeho súčinu priestorov X^1 a X.

Je dostatočne zrejmé, že s príslušným skalárným súčinom je Hilbertov priestor. / nad poľom komplexných čísel /.

Nech β je ľubovolné, ale v každom parciálnom prípade pevne zvolené reálne číslo.

Definujeme operátor L_β nasledovným spôsobom:

- definičný obor. $D(L_\beta) := X^2 \times X^1 = D(A^2) \times D(A)$
- pre ľubovolné $[\varphi,\psi] \in D(L_\beta)$ kladieme

$$L_\beta([\varphi,\psi]) := [-\psi \ , \ A^2\varphi + \beta A \psi] \qquad (4)$$

Z dôvodu vyššej názornosti budeme často lineárny operátor L_β zapisovať v "maticovom tvare "

$$L = \begin{pmatrix} 0 \; ; & -I \\ A^2 \; ; & \beta A \end{pmatrix} \qquad (5)$$

poznamenajme súčasne, že v prípade notácie (5) nebudeme striktne rozlišovať medzi " riadkovým " zápisom zo vzťahu (4) a " stĺpcovým tvarom " :

$$L_\beta([\varphi,\psi]) = \begin{pmatrix} 0 \; ; & -I \\ A^2 \; ; & \beta A \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi \\ A^2\varphi + \beta A \psi\end{pmatrix} \qquad (6)$$

Tým vlastne chceme povedať, že notácie (4) a (6) vyjadrujúce operátor L_β budeme považovať za ekvivalentné.

Základným cieľom tejto časti bude ukázať, že pre $\beta > 0$ je operátor L_β sektoriálny operátor v priestore .

Zaujímavá môže byť aj diskusia ohľadne prípadov $0 < \beta < 2$ a $\beta \geqslant 2$. Dôvodom pre uvedené " roštiepenie" na jednotlivé intervaly bude ten fakt, že spektrum operátora L_β v prípade, že $0 < \beta < 2$ obsahuje aj komplexné čísla s nenulovou imaginárnou zložkou, kým pre $\beta \geqslant 2$ je spektrum časťou kladnej reálnej polpriamky. / lema 2.2.2 / * .

Nasledovať budú lemy zväčša technického charakteru, ktoré opisujú základné vlastnosti operátora L_β , pričom ich usporiadanie metodicky sleduje overovanie jednotlivých predpokladov na sektoriálnosť operátora L_β .

Lema 2.2.1

Lineárny operátor L_β je hustodefinovaný a uzavretý v priestore $\mathcal{X}$.

Dôkaz. Hustota množiny $X^2 \times X^1$ v priestore $\mathcal{X}$. je viac menej zrejmá z definície množiny $\mathcal{X}$ a vlastností zlomkových mocnín operátora A .
Dokážeme teda uzavretosť operátora L_β .

---

* - dá sa usudzovať na úzky súvis medzi tvarom spektra operátora L_β / lema 2.2.2 / a výsledkami P. Bilera [Bi] o rýchlosti konvergencie riešenie k nulovému equlibriu.

Nech $[u_n, v_n] \in X^2 \times X^1 = D(L_\beta)$ a $[u_n, v_n] \longrightarrow [u,v]$ v $\mathcal{X}$.
Nech $L_\beta([u_n, v_n]) \longrightarrow [\bar{u}, \bar{v}]$ v $\mathcal{X}$
potom $u_n \in X^2$ a $u_n \longrightarrow u$ v X^1

$v_n \in X^1$ a $v_n \longrightarrow v$ v X

$-v_n \longrightarrow \bar{u}$ v X^1

$A^2 u_n + \beta A v_n \longrightarrow \bar{v}$ v X

Kedže $-v_n \longrightarrow \bar{u}$ v X^1 tak $v_n \longrightarrow -\bar{u}$ v X^1 a teda zrejme

$\beta A v_n \longrightarrow -\beta A\bar{u}$ v priestore X.

Z uzavretosti operátora A v priestore X teda plynie, že

$v \in D(A) = X^1$ a $Av = -A\bar{u}$

Ďalej potom máme:

$A^2 u_n \longrightarrow \bar{v} - \beta Av$ v priestore X.

Ale, z $u_n \longrightarrow u$ v X^1 vyplýva, že $Au_n \longrightarrow Au$ v X.
Opäť z uzavretosti operátora A v priestore X dostávame / využijúc pritom bod g/ v Pozorovaní 2.1.1 /, že
$Au \in D(A)$ a $A^2 u = \bar{v} - \beta Av$, teda $u \in X^2$.
Teraz je už zrejmé, že $[u,v] \in D(L_\beta)$ a platí

$L_\beta([u,v]) = [\bar{u}, \bar{v}]$

q.e.d.

Horeuvedená lema nepredpokladá, žiadne ohraničujúce podmienky na výber reálneho čísla β. V nasledujúcej leme bude predpoklad $\beta > 0$ podstatným vzhľadom na tvar spektra operátora L_β

Lema 2.2.2

Nech $\beta > 0$. Potom spektrum operátora L_β je len bodové a platí:

ak $\beta \geq 2$ tak spektrum $\sigma(L_\beta)$ je časťou kladnej reálnej polpriamky, t.j. $\sigma(L_\beta) \subseteq (0, \infty)$

ak $0 < \beta < 2$ tak spektrum $\sigma(L_\beta)$ leží na ramenách uhla, ležiaceho v polrovine komplexných čísel s kladnou reálnou časťou, ktorý je naviac symetrický vzhľadom na reálnu os.

Spektrum $\sigma(L_\beta)$ operátora L_β môže byť explicitne vyjadrené ako:

$$\sigma(L_\beta)=\left\{\lambda\in C,\ \lambda=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4}}{2}\lambda_k \text{ alebo } \lambda=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4}}{2}\lambda_k \right.$$
$$\left. \text{pre nejaké } \lambda_k\in\sigma(A)\right\}$$

Nakoniec, $\quad \operatorname{Re}\sigma(L_\beta)\geqslant\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4}}{2}\lambda_1 \quad$ pre $\beta\geqslant 2$

a $\quad \operatorname{Re}\sigma(L_\beta)\geqslant\frac{\beta}{2}\lambda_1$

Dôkaz. V prvej časti ukážeme, že pre bodové spektrum operátora L_β platí:

$$\sigma_p(L_\beta)=\left\{\lambda\in C,\ \lambda=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4}}{2}\lambda_k \text{ alebo } \lambda=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4}}{2}\lambda_k\right.$$
$$\left.\text{pre nejaké } \quad \lambda_k\in\sigma(A)\right\} =: M$$

Nech $\lambda\in\sigma_p(L_\beta)$. Potom nutne existuje $[\varphi,\psi]\in X^2\times X^1$, $[\varphi,\psi]\neq[0,0]$ také, že

$$L_\beta([\varphi,\psi])=\lambda[\varphi,\psi]=[\lambda\varphi,\lambda\psi]$$

Teda

$A^2\varphi+\beta A\psi=\lambda\psi$ a $\quad -\psi=\lambda\varphi$. To, ale prakticky znamená

že $\quad A^2\varphi-\beta\lambda A\varphi=-\lambda^2\varphi$

Poslednú rovnosť rozviňme do Fourierovho radu podľa úplného / v X / ortonormálneho vlastných funkcii operátora A . Z úplnosti systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame porovnaním jednotlivých Fourierových koeficientov , že platí

$$(\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2)\cdot(\varphi,\varphi_k)=0$$

pre každé $k\in N$.

Ak by pre každé $k\in N$ bolo $(\varphi,\varphi_k)=0$, tak opäť z úplnosti systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ musí nutne byť $\varphi\equiv 0$, čo následne implikuje $\psi=0$. To je spor s výberom prvkov φ a ψ

To znamená, že existuje také $k\in N$, že platí

$$(\varphi,\varphi_k)\neq 0 \quad \text{a} \quad \lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2=0 .$$

Tento fakt, ale zrejme má za následok:

$$[\varphi,\psi]\neq[0,0] \quad \text{a} \quad \lambda\in M$$

Naopak, nech $\lambda\in M$.
Ľahko sa v tom prípade vidí, že existuje také $\lambda_k\in\sigma(A)$,

pre ktoré platí:

$$\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2 = 0$$

Položme potom $\varphi := \varphi_k \neq 0$ a $\psi = -\lambda\varphi = -\lambda\varphi_k$

Dostávame, $A^2\varphi + \beta A\psi = \lambda_k^2\varphi_k - \lambda\beta\lambda_k\varphi_k = -\lambda^2\varphi_k$

Teda:

$L_\beta([\varphi,\psi]) = \lambda[\varphi,\psi]$, čo znamená, že $\lambda \in \sigma_p(L_\beta)$

V druhej časti dôkazu nahliadneme, že $\sigma(L_\beta) = \sigma_p(L_\beta)$

Na to zrejme stačí ukázať:

ak $\lambda \notin \sigma_p(L_\beta) = M$ tak $(\lambda - L_\beta)^{-1} \in LB(\mathcal{X},\mathcal{X})$

Pre operátor $\lambda - L_\beta$ dostávame zo vzťahu (5) "maticový zápis" :

$$\lambda - L_\beta = \begin{pmatrix} \lambda \; ; & I \\ -A^2 \; ; & \lambda - \beta A \end{pmatrix} \tag{7}$$

Symbolom $B(\lambda)$ označme operátor:

$$B(\lambda) := A^2 - \lambda\beta A + \lambda^2 \qquad : \; D(B(\lambda)) = X^2$$

Ak $\lambda \notin M = \sigma_p L_\beta$ tak operátor $B(\lambda)$ je injektívny, lebo v prípade, že $B(\lambda)\varphi = 0$

potom pre ľubovolné $k \in N$ platí

$$0 = (B(\lambda)\varphi, \varphi_k) = (A^2\varphi - \lambda\beta A\varphi + \lambda^2, \varphi_k) =$$

$$= (\lambda_k^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda^2) \cdot (\varphi, \varphi_k)$$

Kedže predpokladáme, že $\lambda \notin M = \sigma_p L_\beta$ tak nutne pre každé $k \in N$ je $\lambda_k^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda^2 \neq 0$, čo má za následok

$(\varphi, \varphi_k) = 0$ pre všetky $k \in N$.

Z úplnosti systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ zrejme dostávame, že $\varphi = 0$, a teda operátor $B(\lambda)$ je injektívny.

Pre $\lambda \notin \sigma_p(L_\beta) = M$ vyšetrením limity pre $k \to \infty$, že existuje konštanta $K > 0$, že $\dfrac{1}{|\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2|} \leq K$ pre všetky $k \in N$.

Potom zrejme rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2)^{-1} . (\varphi, \varphi_k) \varphi_k$$

konverguje pre každé $\varphi \in X$

Kedže pre Fourierove koeficienty prvku $B(\lambda)\varphi$ platí:

$$(B(\lambda)\varphi , \varphi_k) = (\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2) \cdot (\varphi, \varphi_k) \qquad \varphi \in X^2$$

tak potom operátor $B(\lambda)^{-1}$ je definovaný na celom X a dá sa vyjadriť v tvare radu:

$$B(\lambda)^{-1}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2)^{-1} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k$$

Ďalej, $\| B(\lambda)^{-1} \| \leq K$ a teda $B(\lambda)^{-1} \in LB(X,X)$

Teraz sa opäť vrátime k operátoru $\lambda - L_\beta$, ktorý je vyjadrený vzťahom (7) .

Operátor $(\lambda - L_\beta)^{-1}$ pre $\lambda \notin M$ môžeme zo vzťahu (7) určiť pomocou " Cramerovho pravidla" známeho z lineárnej algebry na výpočet inverzných matíc.

Úlohu determinantu matice (7) zohráva práve operátor $B(\lambda)$. Teda formálne,

$$B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda ; & I \\ -A^2 ; & \lambda - \beta A \end{pmatrix}$$

potom $$(\lambda - L_\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - \beta A) B(\lambda)^{-1} ; & - B(\lambda)^{-1} \\ A^2 B(\lambda)^{-1} ; & \lambda B(\lambda)^{-1} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

kde $\lambda \notin \sigma_p L_\beta$

Podstatným na dôkaze toho faktu, že horeuvedený " maticový " operátor je skutočne inverzný k $\lambda - L_\beta$ je to, že pre $\lambda \notin \sigma_p L_\beta$ operátor $B(\lambda)^{-1} \in LB(X,X)$ a naviac $R (B(\lambda)^{-1}) = D(B(\lambda)) = X^2 = D(A^2)$.

Kedže všetky operátory vystupujúce v matici (8) navzájom komutujú, tak ostatné je len rutínnou záležitosťou dosadenia.

To znamená, že vzťahom (8) máme určený operátor $(\lambda - L_\beta)^{-1}$ ktorý je definovaný na priestore $\mathfrak{X} = X^1 \times X$.
/ stále automaticky predpokladáme, že $\lambda \notin \sigma_p L_\beta$ /

Ostáva teda dokázať, že $(\lambda - L_\beta)^{-1}$ je ohraničený. Za tým účelom v priestore $\mathfrak{X}$ počítajme normu prvku $(\lambda - L_\beta)^{-1} [\varphi, \psi]$ kde $[\varphi, \psi] \in \mathfrak{X}$

Zrejme potom platí:

$$\|(\lambda - L_\beta)^{-1}[\varphi,\psi]\|_*^2 = \|A((\lambda-\beta A)\,B(\lambda)^{-1}\varphi - B(\lambda)^{-1}\psi)\|_X^2 + $$
$$+ \|A^2\,B(\lambda)^{-1}\varphi + \lambda\,B(\lambda)^{-1}\psi\|_X^2$$

Rozvinutím do Fourierovho radu podľa úplného ortonormálneho systému vlastných funkcii operátora A dostávame:

$$\|(\lambda - L_\beta)^{-1}[\varphi,\psi]\|_*^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k(\lambda-\beta\lambda_k)(\varphi,\varphi_k) - \lambda_k(\psi,\varphi_k)}{\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}\right|^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k^2(\varphi,\varphi_k)+\lambda(\psi,\varphi_k)}{\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}\right|^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(\lambda-\beta\lambda_k).(A\varphi,\varphi_k)-\lambda_k(\psi,\varphi_k)}{\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}\right|^2 + \left|\frac{\lambda_k(A\varphi,\varphi_k)+\lambda(\psi,\varphi_k)}{\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}\right|^2 \leq$$
$$\leq \left(\sqrt{2}\,\sup_{k\in N}\left(\frac{|\lambda-\beta\lambda_k|+2\lambda_k+|\lambda|}{|\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2|}\right)\right)^2 \|[\varphi,\psi]\|_*^2$$

Položme $\quad c(\lambda) := \sqrt{2}\cdot\sup_{k\in N}\dfrac{|\lambda-\beta\lambda_k|+2.\lambda_k+|\lambda|}{|\lambda^2-\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2|}$

Pretože predpokladáme, že $\lambda\notin\sigma_p(L_\beta)$ tak jednoduchým vyšetrením limity pre $k\to\infty$ dostávame, že $c(\lambda)<\infty$

To, ale prakticky znamená, že $(\lambda - L_\beta)^{-1}\in LB(\mathcal{X},\mathcal{X})$ a platí

$$\|(\lambda - L_\beta)^{-1}\| \leq c(\lambda) \qquad (9)$$

Tým sme vlastne ukázali, že každé komplexné číslo, ktoré nie je vlastnou hodnotou operátora L_β náleží do rezolventnej množiny operátora L_β.

Tým sme dokázali podstatnú časť tvrdenia lemy.

Vzhľadom na to, že $\sigma(L_\beta) = \sigma_p(L_\beta) = M$, tak ostatné tvrdenia lemy sú už triviálne.

q.e.d.

Poznámka. Diskrétnosť spektra operátora L_β sa dá ukázať aj jednoduchšie, pričom využijeme, že operátor L_β má kompaktnú rezolventu. Tento fakt bude dokázaný vo vete 2.2.3. Pre dôkaz sektoriálnosti operátora L_β je podstatný odhad (9) a z toho dôvodu sme zvolili túto cestu dokazovania.

K očakávanému dôkazu sektoriálnosti operátora L_β potrebujeme ešte jednu jednoduchú lemu.

Lema 2.2.3

Nech ω je komplexné číslo také, že $\arg\omega \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom pre ľubovolný uhol Θ z intervalu $(|\arg\omega|, \frac{\pi}{2})$ Existuje kladná konštanta $C = C(\omega, \Theta)$ taká, že

$$\sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\lambda - \omega t|} \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

pre každé $\lambda \in S_{0,\Theta}$ kde $S_{0,\Theta}$ je sektor v zmysle definície 2.1.1

Dôkaz.

Uvažujme o kompakte reálnych čísel

$$H := \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle \cap \{ y \in R, \Theta \leq |y + \arg\omega| \leq \pi \}$$

Nahliadneme, že potom existuje konštanta $\alpha = \alpha(\omega, \Theta)$; $0 \leq \alpha < 1$

a $\sup_{x \in H} \cos x \leq \alpha$

Totižto ak by $\sup_{x \in H} \cos x = 1$, tak zo spojitosti funkcie

cos na kompakte H by potom nutne existovalo také $x_0 \in H$ pričom $\cos x_0 = 1$. Vzhľadom na výber množiny H, dostávame, že nutne $x_0 = 0$, a teda $\Theta \leq |\arg\omega|$, čo je v priamom spore s výberom uhla Θ.

Ďalej položme $\bar{H} := \langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \cup H$

Z priebehu funkcie cosínus samozrejme plynie, že

$$\sup_{x \in \bar{H}} \cos x \leq \alpha$$

Skúmajme teraz reálnu funkciu f nezápornej reálnej premennej definovanú:

$$f(t) := \left|1 - \frac{\omega}{\lambda} . t\right|^2$$ pre $t \geq 0$, kde $\lambda \in S_{0,\Theta}$ je parameter.

Potom, ale platí:

$$f(t) = 1 + \frac{|\omega|^2}{|\lambda|^2} . t^2 - 2.t. \frac{|\omega|}{|\lambda|} . \cos(\arg\lambda - \arg\omega)$$

Pretože $-\pi \leq \arg \lambda \leq \pi$; $-\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$ a $\lambda \in S_{0,\theta}$
tak sa dá nahliadnuť, že

$$\arg \lambda - \arg \omega \in \bar{H}$$

a teda

$$\cos(\arg \lambda - \arg \omega) \leq \alpha \qquad \text{pre každé } \lambda \in S_{0,\theta}$$

Berúc do úvahy, že $t \geq 0$ dostávame:

$$f(t) \geq 1 + \frac{|\omega|^2}{|\lambda|^2}.t^2 - 2.t.\frac{|\omega|}{|\lambda|}.\alpha =$$
$$= 1 + \left(\frac{|\omega|}{|\lambda|}.t - \alpha\right)^2 - \alpha^2 \geq 1 - \alpha^2$$

Nakoniec keďže $0 \leq \alpha < 1$ dostávame, že pre ľubovolné $\lambda \in S_{0,\theta}$ platí:

$$\sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\lambda - \omega t|} = \frac{1}{|\lambda|}.\sup_{t \geq 0} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \leq \frac{1}{|\lambda|}.\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{C}{|\lambda|}$$

kde $C = C(\omega, \theta) := (1 - \alpha^2)^{-1/2}$

q.e.d.

S využitím predchádzajúcej technickej lemy a lemy 2.2.2 môžeme už bez problémov dokázať, že operátor L_β je sektoriálny v priestore $\mathcal{X}$ pre ľubovolné $\beta > 0$.

Veta 2.2.1

Nech $\beta > 0$. Potom operátor L_β je sektoriálny operátor v priestore $\mathcal{X}$.

Dôkaz.
Hustá definovanosť a uzavretosť operátora L_β boli predmetom lemy 2.2.1 .

Najprv určíme sektor $S_{0,\theta}$ pre operátor L_β
Zvolme pevne nejaký uhol $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pre ktorý naviac platí:

$$\cos \theta < \frac{\beta}{2}$$

Označme $\beta_1 := \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}$; $\beta_2 := \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}$

Podľa lemy 2.2.2 platí:

$$\sigma(L_\beta) \subseteq \{\beta_1.t \ , \ t > 0\} \cup \{\beta_2.t \ , \ t > 0\}$$

Ak $\beta \geq 2$ tak zrejme $\beta_{1,2}$ sú kladné reálne čísla a tak

$$0 = |\arg \beta_1| = |\arg \beta_2| < \Theta \quad \text{pre každé } t>0$$

Ak $0 < \beta < 2$ tak pre $t > 0$ platí

$$|\arg \beta_1 . t| = |\arg \beta_2 . t| = |\arg \beta_1| = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{\beta} < \Theta$$

pretože,

$$\operatorname{tg} \Theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\Theta} - 1} > \sqrt{\frac{4}{\beta^2} - 1} = \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{\beta}$$

Súhrnne teda pre ľubovolné $\beta > 0$ platí:

$$|\arg \beta_1 . t| = |\arg \beta_2 . t| < \Theta \quad \text{pre každé } t > 0$$

To, ale znamená, že sektor $S_{0,\Theta}$ celý leží v rezolventnej množine operátora L_β.

V druhej časti dôkazu ukážeme potrebný odhad na normu rezolventy.

Podľa vzťahu (9) v dôkaze lemy 2.2.2 platí:

$$\|(\lambda - L_\beta)^{-1}\| \leq c(\lambda) \quad \text{pre všetky } \lambda \in S_{0,\Theta}$$

kde

$$c(\lambda) = \sqrt{2}. \sup_{k \in N} \frac{|\lambda - \beta\lambda_k| + 2\lambda_k + |\lambda|}{|\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2|}$$

Zrejme platí:

$$\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2 = (\lambda - \beta_1 . \lambda_k).(\lambda - \beta_2 . \lambda_k)$$

ďalej využijeme lemu 2.2.3., v ktorej postupne za ω volíme čísla β_1 resp. β_2. / $|\arg \beta_1| = |\arg \beta_2| < \Theta$ /.

Určite potom existuje konštanta $K = K(\beta, \Theta) > 0$

$$\sup_{k \in N} \frac{1}{|\lambda - \beta_1\lambda_k|} \leq \frac{K}{|\lambda|}$$

a analogicky

$$\sup_{k \in N} \frac{1}{|\lambda - \beta_2\lambda_k|} \leq \frac{K}{|\lambda|} \quad \text{pre všetky } \lambda \in S_{0,\Theta}$$

Ďalej dostávame nasledovné odhady:

$$\frac{|\lambda - \beta\lambda_k| + 2\lambda_k + |\lambda|}{|\lambda^2 - \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2|} \leq \frac{|\lambda - \beta_1\lambda_k| + |\lambda - \beta_2\lambda_k| + 2(|\lambda| + \lambda_k)}{|\lambda - \beta_1\lambda_k| . |\lambda - \beta_2\lambda_k|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda - \beta_1\lambda_k|} + \frac{1}{|\lambda - \beta_2\lambda_k|} + 2 . \frac{|\lambda| + |\beta|^{-1} . (|\lambda - \beta\lambda_k| + |\lambda|)}{|\lambda - \beta_1\lambda_k| . |\lambda - \beta_2\lambda_k|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda-\beta_1\lambda_K|}+\frac{1}{|\lambda-\beta_2\lambda_K|}+2\cdot\frac{|\lambda|+|\beta|^{-1}.(|\lambda-\beta_1\lambda_K|+|\lambda-\beta_2\lambda_K|+2.|\lambda|)}{|\lambda-\beta_1\lambda_K|.|\lambda-\beta_2\lambda_K|}\leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda-\beta_1\lambda_K|}+\frac{1}{|\lambda-\beta_2\lambda_K|}+\frac{2}{|\beta|}\cdot\left(\frac{1}{|\lambda-\beta_1\lambda_K|}+\frac{1}{|\lambda-\beta_2\lambda_K|}\right)+$$

$$+\left(2+\frac{4}{|\beta|}\right)\cdot\frac{|\lambda|}{|\lambda-\beta_1\lambda_K|.|\lambda-\beta_2\lambda_K|}$$

Získali sme odhad na konštantu $C(\lambda)$:

$$C(\lambda)\leq\sqrt{2}\left(\frac{K}{|\lambda|}+\frac{K}{|\lambda|}+\frac{2}{|\beta|}\cdot\left(\frac{K}{|\lambda|}+\frac{K}{|\lambda|}\right)+\left(2+\frac{4}{|\beta|}\right)\cdot|\lambda|\frac{K}{|\lambda|}\cdot\frac{K}{|\lambda|}\right)$$

a teda, $\quad C(\lambda)\leq\frac{\bar{K}}{|\lambda|}\quad$ kde konštanta $\bar{K}$ nezávisí na výbere $\lambda\in S_{0,\theta}$

To znamená, že $\quad \|(\lambda-L_\beta)^{-1}\|\leq\frac{\bar{K}}{|\lambda|}\quad$ pre každé $\lambda\in S_{0,\theta}$

z čoho nakoniec dostávame, že operátor L_β je sektoriálny v priestore $\mathcal{X}$.

q.e.d.

Ako priamy dôsledok predchádzajúcej vety dostávame

Veta 2.2.2

Nech $\beta>0$. Potom operátor $-L_\beta$ generuje analytickú pologrupu $\{e^{-L_\beta t}, t\geq 0\}$.
Naviac, pre ľubovolné $\delta\in\left(0,\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4}}{2}\lambda_1\right)$ / prípad $\beta\geq 2$ /
resp. $\delta\in\left(0,\frac{\beta}{2}\lambda_1\right)$ / prípad $0<\beta<2$ /
platia nasledovné odhady:

$$\|e^{-L_\beta t}\|\leq M(\delta).e^{-\delta t}\qquad\text{pre každé } t\geq 0$$

$$\|L_\beta e^{-L_\beta t}\|\leq M(\delta).e^{-\delta t}\qquad\text{pre každé } t>0$$

Dôkaz.
Je triviálny a plynie z vety 2.1.1 , lemy 2.2.2 a vety 2.2.1

q.e.d.

Poznámka. Kedže dôkaz sektoriálnosti operátora L_β je trochu ťažkopádny a dlhý, je na mieste otázka o zjednodušení celého postupu. Pre iné typy "maticových opoerátorov" Webb [We] a Massat [Ma3] používajú o niečo jednoduchšie metódy a postupy.

Webb v [We] dokazuje sektoriálnosť operátora

$$\begin{pmatrix} 0 & ; & -I \\ A & ; & \alpha A \end{pmatrix} \qquad \alpha > 0 \qquad (*)$$

V podstatnej miere využíva, že horeuvedený operátor sa dá rozložiť na súčet sektoriálneho operátora a spojitého operátora. Je známe z elementárnej teórie sektoriálnych operátorov, že takýto súčet bude opäť sektoriálny operátor.

Massat postupuje inak. Pri skúmaní toho istého operátora sa mu podarilo ukázať, že je sektoriálny , avšak na rozdiel od Webba dokonca na celej variete priestorov. Jeho dôkaz je však založený na fakte, že operátor A vystupuje v horeuvedenej "matici" vždy v rovnakej mocnine.

Ukazuje sa, že v našom prípade nie je možné bezprostredne použiť ani techniku Webba / jeden z operátorov nebude spojitý /, ani techniku Massata. Z týchto dôvodov sme museli predbežne použiť postup pertrachtovaný vo vete 2.2.1 .

Vo zvyšku tejto časti sa budeme zaoberať zlomkovými mocninami operátora L_β a priestoru $\mathcal{X}$ podľa operátora L_β .

Zlomkové mocniny operátora L_β a priestoru $\mathcal{X}$

Skúmať budeme explicitné vyjadrenie zlomkovej mocniny operátora L_β^α pre $\alpha \in (0,1)$. Následne potom vyjadríme zlomkovú mocninu $\mathcal{X}^\alpha$ priestoru $\mathcal{X}$ podľa sektoriálneho operátora L_β.

Celý postup bude rozdelený do troch fáz. V prvej z nich explicitne vyjadríme operátor

$$L_\beta^{-\alpha} \qquad \text{pre ľubovolné } \alpha \in (0,1)$$

Ďalej potom určíme obor hodnôt $R(L_\beta^{-\alpha})$ a tak vlastne nájdeme definičný obor operátora L_β^α , pričom $D(L_\beta^\alpha) = \mathcal{X}^\alpha$

---

* - Predpoklad $\alpha > 0$ je u oboch autorov podstatný. Inšpekciou spektra operátora pre $\alpha = 0$ sa dá nahliadnuť, bodové spektrum bude rozložené symetricky na neohraničenej priamke.

Tretia fáza bude spočívať v explicitnom vyjadrení zlomkovej mocniny $\mathcal{X}^{\alpha}$ prostredníctvom zlomkových mocnín priestoru X. Nakoniec nahliadneme, že na priestore $\mathcal{X}^{\alpha}$ existuje ekvivalentná norma, ktorá štandardnou normou súčinu istých B - priestorov.

Lema 2.2.4

Nech $\beta > 0$. Potom pre ľubovolné $\alpha \in (0,1)$ platí:

$$L_{\beta}^{-\alpha}[\varphi,\psi] = [(\vartheta_1+\beta\vartheta_2)A^{-\alpha}\varphi + \vartheta_2 A^{-1-\alpha}\psi \; ; \; -\vartheta_2 A^{1-\alpha}\varphi + \vartheta_1 A^{-\alpha}\psi]$$

pre každé $[\varphi,\psi] \in \mathcal{X} = X^1 \times X$

V symbolickom maticovom tvare môžeme operátor $L_{\beta}^{-\alpha}$ zapísať:

$$L_{\beta}^{-\alpha} = \begin{pmatrix} (\vartheta_1+\beta\vartheta_2)A^{-\alpha} \; ; & \vartheta_2 A^{-1-\alpha} \\ -\vartheta_2 A^{1-\alpha} \; ; & \vartheta_1 A^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

kde ϑ_1, ϑ_2 sú kladné reálne konštanty, závisiace len od hodnôt α, β teda $\vartheta_1 = \vartheta_1(\alpha,\beta)$; $\vartheta_2 = \vartheta_2(\alpha,\beta)$

Dôkaz.

Z vety 2.1.1 vieme, že operátor L_{β} je sektoriálny. Ďalej z dôkazu tejto vety plynie, že sektor operátora L_{β} môžeme vybrať tak, aby platilo:

$$\left|\arg\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4}}{2}\right| = \left|\arg\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4}}{2}\right| < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

kde $S_{0,\vartheta}$ je sektor operátora L_{β}

Podľa lemy 2.2.2 platí $\operatorname{Re}\sigma(L_{\beta}) > 0$. Potom pre $\alpha \in (0,1)$ môžeme použiť známu formulu na vyjadrenie operátora $L_{\beta}^{-\alpha}$:

$$L_{\beta}^{-\alpha} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{-\alpha}(\lambda+L_{\beta})^{-1}\, d\lambda \qquad (10)$$

/ dôkaz pozri [He] , Veta 1.4.

Nech $[\varphi,\psi] \in \mathcal{X} = X^1 \times X$ je nejaký pevne zvolený prvok.

Uvažujme o nezápornom reálnom čísle $\lambda \geq 0$

V dôkaze lemy 2.2.2 sme zaviedli operátor $B(\xi)$ definovaný na priestore X^2 predpisom:

$$B(\xi) = A^2 - \beta \xi A + \xi^2 \ .$$

Ukázali sme, že pre $\xi \notin \sigma_p(L_\beta)$ má operátor $B(\xi)$ spojitý inverzný operátor

$$B^{-1}(\xi) : X \to X \quad , \text{pričom } R(B^{-1}(\xi)) = X^2 \ .$$

Kedže $\lambda \geq 0$, tak $-\lambda \notin \sigma(L_\beta)$ a teda B^{-1} existuje a platí

$$B^{-1}(-\lambda) \in LB(X,X) \quad ; \quad R(B^{-1}(-\lambda)) = X^2 \ .$$

To znamená, že pre $\lambda \geq 0$ má operátor $A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2$ spojitý inverzný operátor

$$(A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2)^{-1} : X \to X$$

kde $$R((A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2)^{-1}) = X^2 = D(A^2)$$

Preto v súlade s dôkazom lemy 2.2.2 môžeme operátor $(\lambda + L_\beta)^{-1}$ vyjadriť v nasledovnom maticovom tvare:

$$(\lambda + L_\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} (\beta A + \lambda)(A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2)^{-1}; & (A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2)^{-1} \\ -A^2(A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2)^{-1}; & (A^2 + \lambda\beta A + \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

Na vyjadrenie prvku $\lambda^{-\alpha}(\lambda + L_\beta)^{-1}[\varphi,\psi]$ opäť použijeme Fourierove rozvoje podľa ortonormálneho systému funkcií $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

Potom platí:

$$\lambda^{-\alpha}(\lambda + L_\beta)^{-1}[\varphi,\psi] = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-\alpha}(\lambda + \beta\lambda_k)(\varphi,\varphi_k)}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2}\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-\alpha}}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2}(\psi,\varphi_k)\varphi_k \\ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-\alpha}\lambda_k^2(\varphi,\varphi_k)}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2}\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2}(\psi,\varphi_k)\varphi_k \end{pmatrix}$$

Pre každé $k \in N$ označme

$$a_k(\lambda) := \frac{\lambda^{-\alpha}(\lambda + \beta\lambda_k)}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2} \qquad b_k(\lambda) := \frac{\lambda^{-\alpha}}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2}$$

$$c_k(\lambda) := \frac{-\lambda^{-\alpha}\lambda_k^2}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2} \qquad d_k(\lambda) := \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\lambda^2 + \lambda\beta\lambda_k + \lambda_k^2}$$

Využijúc predchádzajúce označenie dostávame:

$$\lambda^{-\alpha}(\lambda+L_\beta)^{-1}[\varphi,\psi]=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda)(\varphi,\varphi_k)\varphi_k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k(\lambda)(\psi,\varphi_k)\varphi_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda)(\varphi,\varphi_k)\varphi_k+\sum_{k=1}^{\infty} d_k(\lambda)(\psi,\varphi_k)\varphi_k \end{pmatrix}$$

Teraz ukážeme možnosť zámeny poradia integrovania a sumácie uvedených radov, presnejšie ukážeme, že v priestore X^1 platí:

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda)(\varphi,\varphi_k)\varphi_k \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty a_k(\lambda)\, d\lambda\, (\varphi,\varphi_k)\varphi_k$$

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\lambda)(\psi,\varphi_k)\varphi_k \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty b_k(\lambda)\, d\lambda\, (\psi,\varphi_k)\varphi_k$$

a podobne v priestore X platí:

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda)(\varphi,\varphi_k)\varphi_k \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty c_k(\lambda)\, d\lambda\, (\varphi,\varphi_k)\varphi_k$$

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\lambda)(\psi,\varphi_k)\varphi_k \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty d_k(\lambda)\, d\lambda\, (\psi,\varphi_k)\varphi_k$$

Nech $n \in N$. V norme priestoru X^1 počítajme normu rozdielu

$$\left\| \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda)(\varphi,\varphi_k)\varphi_k - \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty a_k(\lambda)\, d\lambda\, (\varphi,\varphi_k)\varphi_k \right\|_{X^1} \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\lambda)(\varphi,\varphi_k)\varphi_k \right\|_{X^1} d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(\lambda)|^2 \cdot |(A\varphi,\varphi_k)|^2}\; d\lambda$$

Poslednú identitu sme získali na základe Parsevalovej rovnosti.

Kedže $\lambda \geqslant 0$, tak $-\lambda \in S_{0,\theta}$ a teda analogicky ako v dôkaze vety 2.2.1 využijeme technickú lemu 2.2.3. Potom existuje konštanta $C_1 > 0$, nezávisiaca ani od λ, ani od $k \in N$ taká, že platí:

$$|a_k(\lambda)| \leq \lambda^{-\alpha} \cdot \frac{C_1}{\lambda} = C_1 \cdot \lambda^{-1-\alpha} \qquad \text{pre } \lambda > 0,\ k \in N$$

Vyšetrením limity pre $\lambda \to 0^+$ poľahky nahliadneme, že existuje konštanta $C_2 > 0$ opäť nezávisiaca na λ a k, že pre nejaké dostatočne malé okolie bodu 0 platí vzťah:

$$|a_k(\lambda)| \leq c_2\,\lambda^{-\alpha}$$ pre každé $k \in N$ a $0 < \lambda < \varepsilon$, kde ε nezávisí od hodnoty k .

Kombináciou týchto odhadov môžeme integrál

$$\int_0^\infty \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(\lambda)|^2 . |(A\varphi, \varphi_k)|^2}\; d\lambda$$

rodeliť na súčet dvoch integrálov

$$\int_0^\infty = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty$$

a tak keďže $\alpha \in (0,1)$ zrejme existuje konštanta $C > 0$ taká, že:

$$\int_0^\infty \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(\lambda)|^2 |(A\varphi, \varphi_k)|^2}\; d\lambda \leq C \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |(A\varphi, \varphi_k)|^2}$$

Je dostatočne jasné, že konštanta C nezávisí od prirodzeného čísla $n \in N$.

Z Parsevalovej rovnosti vieme, že

$$\|A\varphi\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(A\varphi, \varphi_k)|^2 \qquad \text{a teda}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |(A\varphi, \varphi_k)|^2 = 0$$

Tým sme vlastne dokázali, že v priestore X^1 môžeme zameniť poradie sumácie a integrovania skúmaného radu, t.j.

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda).(\varphi, \varphi_k)\varphi_k \; d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty a_k(\lambda)\, d\lambda\, (\varphi, \varphi_k)\varphi_k$$

Analogickým postupom nahliadneme, že zámena poradia integrovania a sumácie je prípustná aj v ostatných prípadoch.

Vzhľadom na formulu (10) dostávame

$$L_\beta^{-\alpha}[\varphi,\psi] = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k (\varphi,\varphi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k (\psi,\varphi_k)\varphi_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k (\varphi,\varphi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{d}_k (\psi,\varphi_k)\varphi_k \end{pmatrix}$$

kde konštanty $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$, $\bar{c}_k$, $\bar{d}_k$ sú definované predpismi:

$$\bar{a}_k = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\alpha}(\lambda+\beta\lambda_k)}{\lambda^2+\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}d\lambda \quad ; \quad \bar{b}_k = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\alpha}}{\lambda^2+\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}d\lambda$$

$$\bar{c}_k = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{-\lambda_k^2\,\lambda^{-\alpha}}{\lambda^2+\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}d\lambda \quad ; \quad \bar{d}_k = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\lambda^2+\lambda\beta\lambda_k+\lambda_k^2}d\lambda \tag{11}$$

Ďalej definujme konštanty ϑ_1, ϑ_2

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\alpha,\beta) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{1-\alpha}}{x^2+\beta x+1}\,dx$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(\alpha,\beta) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{x^2+\beta x+1}\,dx \tag{12}$$

Keďže predpokladáme, že $\beta>0$ a $\alpha\in(0,1)$ tak integrály definujúce konštanty ϑ_1 resp. ϑ_2 konvergujú.

Triviálnymi substitúciami sa môžeme poľahky presvedčiť, že pre integrály (11) platí:

$$\bar{a}_k = (\vartheta_1+\beta\vartheta_2)\lambda_k^{-\alpha} \quad ; \quad \bar{b}_k = \vartheta_2\lambda_k^{-1-\alpha}$$

$$\bar{c}_k = -\vartheta_2\lambda_k^{1-\alpha} \quad ; \quad \bar{d}_k = \vartheta_1\lambda_k^{-\alpha} \qquad \text{pre každé } k\in N.$$

Pretože $\varphi\in X^1$ a $\psi\in X$, tak pre $\alpha\in(0,1)$ platí:

$$A^{-\alpha}\varphi = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{-\alpha}(\varphi,\varphi_k)\varphi_k \quad ; \quad A^{1-\alpha}\varphi = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{1-\alpha}(\varphi,\varphi_k)\varphi_k$$

$$A^{-\alpha}\psi = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{-\alpha}(\psi,\varphi_k)\varphi_k \quad ; \quad A^{-1-\alpha}\psi = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{-1-\alpha}(\psi,\varphi_k)\varphi_k$$

To znamená, že pre $L_\beta^{-\alpha}[\varphi,\psi]$ dostávame vyjadrenie

$$L_\beta^{-\alpha}[\varphi,\psi] = [(\vartheta_1+\beta\vartheta_2)A^{-\alpha}\varphi+\vartheta_2A^{-1-\alpha}\psi \; ; \; -\vartheta_2A^{1-\alpha}\varphi+\vartheta_1A^{-\alpha}\psi]$$

Tento vzťah môžeme v maticovom tvare zapísať ako

$$L_\beta^{-\alpha} = \begin{pmatrix} (\vartheta_1+\beta\vartheta_2)A^{-\alpha} & ; & \vartheta_2A^{-1-\alpha} \\ -\vartheta_2A^{1-\alpha} & ; & \vartheta_1A^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

q.e.d.

Poznámka. V krátkosti sa zmienime o kladných reálnych konštantách ϑ_1 a ϑ_2

Pre $\beta \geq 2$ a $\alpha \in (0,1)$ explicitne vyjadríme konštanty ϑ_1 a ϑ_2 .

Elementárnym použitím integrálneho počtu a základných vlastností funkcií gama a beta / Eulerove funkcie / môžeme nahliadnuť platnosť vzťahov:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(\alpha,\beta) = \frac{(\beta+\sqrt{\beta^2-4})^{1-\alpha} - (\beta-\sqrt{\beta^2-4})^{1-\alpha}}{\sqrt{\beta^2-4}} \cdot 2^{\alpha-1}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(\alpha,\beta) = \frac{(\beta+\sqrt{\beta^2-4})^{\alpha} - (\beta-\sqrt{\beta^2-4})^{\alpha}}{\sqrt{\beta^2-4}} \cdot 2^{-\alpha} \qquad \text{pre } \beta > 2$$

a $\vartheta_1(\alpha,2) = 1-\alpha$; $\vartheta_2(\alpha,2) = \alpha$

V nasledujúcej leme vyšetrujeme obor hodnôt operátora $L_\beta^{-\alpha}$. Táto lema zohráva fundamentálnu úlohu pri opise priestoru $\mathcal{X}$.

Lema 2.2.5

Nech $\beta > 0$, $\alpha \in (0,1)$. Potom $R(L_\beta^{-\alpha}) = X^{1+\alpha} \times X^\alpha$

Dôkaz.

Nech $[u,v] \in R(L_\beta^{-\alpha})$. Podľa definície oboru hodnôt operátora určite existuje

$$\varphi \in X^1 \quad \text{a} \quad \psi \in X$$

pričom

$$u = (\vartheta_1 + \beta\,\vartheta_2) A^{-\alpha}\varphi + \vartheta_2 A^{-1-\alpha}\psi$$

$$v = -\vartheta_2 A^{1-\alpha}\varphi + \vartheta_1 A^{-\alpha}\psi$$

Keďže $\varphi \in X^1$, tak nutne existuje $\bar\varphi \in X$, $\varphi = A^{-1}\bar\varphi$

Potom

$$u = A^{-1-\alpha}((\vartheta_1 + \beta\,\vartheta_2)\bar\varphi + \vartheta_2\psi)$$

$$v = A^{-\alpha}(-\vartheta_2\bar\varphi + \vartheta_1\psi)$$

čo znamená, že pre prvky u,v platí $u \in X^{1+\alpha}$, $v \in X^\alpha$.

Teda $[u,v] \in X^{1+\alpha} \times X^{\alpha}$.

Na druhej strane predpokladajme, že $[u,v] \in X^{1+\alpha} \times X^{\alpha}$
Potom pre nejaké $\bar{u} \in X$, $\bar{v} \in X$ dostávame:

$$u = A^{-1-\alpha}\bar{u} \quad \text{a} \quad v = A^{-\alpha}\bar{v}$$

Kedže $\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_2^2 > 0$, tak nutne existujú prvky $\bar{\varphi}, \psi \in X$, pre ktoré platí

$$\bar{u} = (\vartheta_1 + \beta\vartheta_2)\bar{\varphi} + \vartheta_2\psi$$

$$\bar{v} = -\vartheta_2\bar{\varphi} + \vartheta_1\psi$$

Ak nakoniec položíme $\varphi = A^{-1}\bar{\varphi}$, tak sa jednoducho dosadením môžeme presvedčiť, že platí

$$L_\beta^{-\alpha}[\varphi,\psi] = [u,v] \quad \text{a teda} \quad R(L_\beta^{-\alpha}) = X^{1+\alpha} \times X^{\alpha}$$

q.e.d.

V ďalšej vete explicitne vyjadríme operátor L_β^{α} . Metóda dôkazu bude podobná ako tomu bolo v leme 2.2.2 , kde sme na explicitné vyjadrenie inverného operátora k " maticovému " operátoru použili známe Cramerovo pravidlo z lineárnej algebry.

Veta 2.2.3

Nech $\beta > 0$, $\alpha \in (0,1)$. Potom pre zlomkovú mocninu priestoru $\mathcal{X}$ podľa sektoriálneho operátora L_β platí

$$\mathcal{X}^{\alpha} = D(L_\beta^{\alpha}) = X^{1+\alpha} \times X^{\alpha}$$

Pre operátor L_β^{α} definovaný na $D(L_\beta^{\alpha})$ platí:

$$L_\beta^{\alpha} = (\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_2^2)^{-1} \begin{pmatrix} \vartheta_1 A^{\alpha} & ; & -\vartheta_2 A^{\alpha-1} \\ \vartheta_2 A^{1+\alpha} & ; & (\vartheta_1 + \beta\vartheta_2)A^{\alpha} \end{pmatrix}$$

Dôkaz.

Podľa lemy 2.2.5 dostávame:

$$\mathcal{X}^{\alpha} = D(L_\beta^{\alpha}) = R(L_\beta^{-\alpha}) = X^{1+\alpha} \times X^{\alpha}$$

Druhá časť dôkazu plynie z faktu $L_\beta^{\alpha} = (L_\beta^{-\alpha})^{-1}$. q.e.d.

V predchádzajúcej vete sme nahliadli, že zlomková mocnina priestoru $\mathcal{X}$ sa dá vyjadriť ako súčin / kartézky / istých množín. Zámerne teda zdôrazňujeme, že sa jedná o množinovo-teoretickú rovnosť. Tým vlastne chceme povedať norma na zlomkovej mocnine $\mathcal{X}^\alpha$ nemusí byť identicky rovná prirodzenej norme na súčine normovaných priestorov. V nasledujúcej vete ukážeme však, že príslušné normy sú ekvivalentné, čo zrejme stačí na to, aby sme boli oprávnený ztotožniť priestor $\mathcal{X}^\alpha$ s priestorom $X^{1+\alpha} \times X^\alpha$.

Veta 2.2.4

Nech $\beta > 0$, $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$. Potom pre zlomkovú mocninu priestoru $\mathcal{X}$ platí:

i/ $\mathcal{X}^\alpha = X^{1+\alpha} \times X^\alpha$ - ako množiny

ii/ $(\mathcal{X}^\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{X}^\alpha}) \cong (X^{1+\alpha} \times X^\alpha, \|\cdot\|_{X^{1+\alpha} \times X^\alpha})$

- ako B - priestory.

Dôkaz.

časť i/ vzhľadom na to, že $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X}$ a $\mathcal{X}^1 = X^2 \times X^1$ a vetu 2.2.3 je triviálna.

Časť ii/

Uvažujme najprv prípad $\alpha \in (0,1)$.
Nech kladné reálne konštanty ϑ_1, ϑ_2 sú definované vzťahmi (12) .

Nahliadneme ekvivalentnosť noriem

$$\|\cdot\|_{\mathcal{X}^\alpha} \quad \text{a} \quad \|\cdot\|_{X^{1+\alpha} \times X^\alpha}$$

Nech teda $[\varphi,\psi] \in \mathcal{X}^\alpha = X^{1+\alpha} \times X^\alpha$

Z dôvodu zjednodušenia zápisov označme $\gamma = (\vartheta_1^2 + \beta.\vartheta_1.\vartheta_2 + \vartheta_2^2)^{-1}$

Dostávame postupnosť nasledovných odhadov:

$$\|[\varphi,\psi]\|_{\mathcal{X}^\alpha} = \|L_\beta^\alpha [\varphi,\psi]\|_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \gamma \left(\|\vartheta_1 A^\alpha \varphi - \vartheta_2 A^{\alpha-1}\psi\|_{X^1} + \|\vartheta_2 A^{1+\alpha}\varphi + (\vartheta_1 + \beta\vartheta_2) A^\alpha \psi\|_{X^\alpha} \right)$$

$$\sqrt{2}\,\gamma(\vartheta_1 + (1+\beta)\vartheta_2) \left(\|\varphi\|^2_{X^{1+\alpha}} + \|\psi\|^2_{X^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Teda existuje kladná reálna konštanta závisiaca len od α, β

taká, že pre normy platí:

$$\| . \|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq c_1 . \| . \|_{X^{1+\alpha} \times X^\alpha}$$

Na druhej strane platí:

$$\| [\varphi, \psi] \|^2_{\mathcal{X}^\alpha} = \| L^\alpha_\beta [\varphi, \psi] \|^2_{\mathcal{X}} =$$

$$= \mu^2 \left(\| \vartheta_1 A^\alpha \varphi - \vartheta_2 A^{\alpha-1} \psi \|^2_{X^1} + \| \vartheta_2 A^{1+\alpha} \varphi + (\vartheta_1 + \beta \vartheta_2) A^\alpha \psi \|^2_X \right) =$$

$$= \mu^2 \left(\| \vartheta_1 A^{1+\alpha} \varphi - \vartheta_2 A^\alpha \psi \|^2_X + \| \vartheta_2 A^{1+\alpha} \varphi + (\vartheta_1 + \beta \vartheta_2) A^\alpha \psi \|^2_X \right) =$$

$$= \mu^2 \left\{ (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) \| \varphi \|^2_{X^{1+\alpha}} + (\vartheta_2^2 + (\vartheta_1 + \beta \vartheta_2)^2) \| \psi \|^2_{X^\alpha} + 2\beta \vartheta_2^2 \, \mathrm{Re} \left(A^{1+\alpha} \varphi, A^\alpha \psi \right) \right\}$$

Využitím Cauchy - Schwartzovej nerovnosti dostávame

$$\| [\varphi, \psi] \|^2_{\mathcal{X}^\alpha} \geq \mu^2 \left\{ (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) \| \varphi \|^2_{X^{1+\alpha}} + \right.$$

$$\left. + (\vartheta_2^2 + (\vartheta_1 + \beta \vartheta_2)^2) \| \psi \|^2_{X^\alpha} - 2\beta \vartheta_2^2 \| \varphi \|_{X^{1+\alpha}} . \| \psi \|_{X^\alpha} \right. \geq$$

$$\geq \mu^2 \vartheta_1^2 \| [\varphi, \psi] \|^2_{X^{1+\alpha} \times X^\alpha}$$

To teda znamená, že normy $\| . \|_{\mathcal{X}^\alpha}$ a $\| . \|_{X^{1+\alpha} \times X^\alpha}$

sú ekvivalentné pre $\alpha \in (0,1)$

Ostáva teda vyšetriť prípad $\alpha = 1$

Ľahko sa preverí platnosť identity:

$$\| [\varphi, \psi] \|^2_{\mathcal{X}^1} = (1 + \beta^2) \| \psi \|^2_{X^1} + \| \varphi \|^2_{X^2} + 2\beta . \mathrm{Re} (A^2 \varphi , A \psi)$$

Opäť využijúc Cauchy - Schwartzovu nerovnosť získame odhad

$$\| [\varphi, \psi] \|^2_{\mathcal{X}^1} \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{1 + 2\beta^2} \right\} . \| [\varphi, \psi] \|^2_{X^2 \times X^1}$$

Využitím trojuholníkových nerovností sa dá zistiť, že

$$\| [\varphi, \psi] \|_{\mathcal{X}^1} \leq \sqrt{2} \, (1 + \beta) \| [\varphi, \psi \| _{X^2 \times X^1}$$

Teda normy $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^1}$, $\|\cdot\|_{X^2 \times X^1}$ sú ekvivalentné

Prípad $\alpha = 0$ je zrejme triviálny z definície priestoru $\mathcal{X}$.

q.e.d.

Na záver tejto časti uvedieme ešte jednu užitočnú vetu o operátore L_β .

Veta 2.2.5

Operátor L_β má kompaktnú rezolventu.

Dôkaz.

Operátor L_β^{-1} môžeme explicitne vyjadriť v tvare

$$L_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} \beta A^{-1} ; & A^{-2} \\ -I ; & 0 \end{pmatrix}$$

O platnosti horeuvedeného vzťahu sa je možné jednoducho presvedčiť prostým dosadením.

Uvažujme o ohraničenej postupnosti $\{[u_n, v_n]\}_{n=1}^{\infty}$ v priestore $\mathcal{X} = X^1 \times X$. Potom zrejme postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v priestore X^1 a postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v priestore X.

Podľa pozorovania 2.1.1 bod c/ má operátor A kompaktnú rezolventu v priestore X. To znamená, že z postupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme vybrať podpostupnosť / opäť ju označíme $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $A^{-1}v_n$ konverguje v priestore X , teda zrejme $A^{-2}v_n$ konverguje v priestore X^1.

Keďže $u_n \in X^1$, tak pre každé $n \in N$ existuje $\bar{u}_n \in X$ také, že $u_n = A^{-1}\bar{u}_n$. Pretože $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v X^1 , tak $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v X. Opäť využijúc kompaktnosť A^{-1} dostaneme, že z postupnosti $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ vieme vybrať podpostupnosť / opäť ju označíme rovnako /, pre ktorú obrazy $A^{-1}\bar{u}_n$ konvergujú v priestore X. To znamená, že postupnosť

$\{A^{-2}\bar{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v priestore X^1. Teda zrejme postupnosť $\{A^{-1}u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v priestore X^1. To znamená, že postupnosť $\{\beta A^{-1}u_n + A^{-2}v_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje konvergentnú podpostupnosť v priestore X^1.

Ďalej keďže $-u_n = -A^{-1}\bar{u}_n$, tak z postupnosti $\{-u_n\}_{n=1}^{\infty}$ možno vybrať konvergentnú podpostupnosť v priestore X.

Súhrnne sme teda ukázali, že existuje podpostupnosť postupnosti $\{[u_n,v_n]\}_{n=1}^{\infty}$ / opäť ju označme rovnako / taká, že $L_\beta^{-1}[u_n,v_n]$ konverguje v priestore $X^1 \times X$. Teda operátor L_β má kompaktnú rezolventu.

q.e.d.

2.3 LOKÁLNA EXISTENCIA NELINEÁRNEJ ABSTRAKTNEJ ROVNICE VIBRÁCII TRÁMU

Táto časť využíva klasickú teóriu semilineárnych parabolických rovníc, ktorú možno nájsť vo fundamentálnej monografii brazílskeho matematika Dana Henryho [He].

Začneme formuláciami a definíciami.

Nech Y je B - priestor a L je sektoriálny operátor v Y, pričom Re $\sigma(L) > 0$.

Pod pojmom abstraktná semilineárna parabolická rovnica budeme rozumieť rovnicu

$$\frac{d}{dt}U + LU = F(t,U) \quad , \quad t > t_0$$

spolu so začiatočnou podmienkou

$$U(t_0) = U_0 \qquad (13)$$

Systém (13) budeme tiež nazývať Cauchyho úloha.

Funkcia F / vo všeobecnosti nelineárna / zobrazuje $R \times Y^\alpha$ do Y pre nejaké $\alpha \in \langle 0,1)$

Dôležitým pojmom súvisiacim so systémom (13) je samozrejme pojem riešenia úlohy (13) .

Definícia 2.3.1 ([He] , Definition 3.3.1)

Riešením úlohy (13) na intervale (t_0,t_1) budeme rozumieť spojitú funkciu $U(.)\colon\langle t_0,t_1) \longrightarrow Y$ spĺňajúca:

i/ $U(t_0) = U_0 \in Y$

ii/ pre každé $t\in(t_0,t_1)$ je $U(t)\in D(L)$ a v bode t existuje silná / Fréchetova / derivácia $\frac{d}{dt}U(t)$

iii/ zobrazenie $t\mapsto F(t,U(t))$ je lokálne hölderovské a naviac pre nejaké $\alpha\in\langle 0,1)$ platí

$$\lim_{t\to t_0}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\,\|F(s,U(s))\|_Y\,ds = 0$$

iv/ na intervale (t_0,t_1) funkcia $U(.)$ vyhovuje rovnici:

$$\frac{d}{dt}U(t) + L\,U(t) = F(t,U(t))$$

Dôležitú úlohu pri zaručovaní existencie a jednoznačnosti riešenia úlohy (13) samozrejme zohráva funkcia F .
V nasledovnej definícii sformulujeme štandardné predpoklady na funkciu F , za ktorých bude mať systém (13) vlastnosť lokálnej existencie a jednoznačnosti.

Definícia 2.3.2

Budeme hovoriť, že funkcia F spĺňa podmienku (HL) pre $\alpha\in(0,1)$, ak platí:

(HL) : pre ľubovolný bod $(\bar t,\bar U)\in R\times Y^\alpha$ existuje okolie tohto bodu $\mathcal{O}\subseteq R\times Y^\alpha$ a existujú konštanty Lip, $\vartheta > 0$, že pre ľubovolné (t,U) , $(s,V)\in\mathcal{O}$ platí

$$\|F(t,U) - F(s,V)\|_Y \le Lip\left(|t-s|^{\vartheta} + \|U-V\|_{Y^\alpha}\right)$$

Poznamenajme, že vyššie uvedená podmienka (HL) hovorí v podstate to, že funkcia $F(t,U)$ je lokálne hölderovská v premennej t a lokálne lipschitzovská v premennej U .

Aj keď ešte v tejto kapitole sa nebudeme zaoberať globálnou existenciou, tak predsa len sformulujeme pojem tzv. úplného riešenia.

Definícia 2.3.3

Hovoríme, že riešenie $U(.)$ úlohy (13) je na intervale $\langle t_o, t_o + T)$ / alebo, že T je maximálne / ak

- existuje riešenie úlohy (13) na intervale $\langle t_o, t_o + T)$ s počiatočnou podmienkou $U(t_o) = U_o$
- ak riešenie $U(.)$ s počiatočnou podmienkou $U(t_o) = U_o$ existuje na intervale $\langle t_o, t_1)$, tak potom nutne $t_1 \leq t_o + T$.

Z hľadiska lokálnej existencie a jednoznačnosti riešenia úlohy (13) má fundamentálny význam nasledovná veta. Uvedená formulácia je prebratá z článku Webba [We] a vlastne predstavuje súhrn viet 3.3.3, 3.3.1, 3.5.2 a 3.3.4 z monografie [He].

Veta 2.3.1 (zdroje sú uvedené vyššie)

Nech L je sektoriálny operátor v B - priestore Y, $\operatorname{Re}\sigma(L) > 0$. Nech funkcia F spĺňa podmienku (HL) pre nejaké $\alpha \in \langle 0,1)$.

Potom pre ľubovolné $t_o \in R$, $U_o \in Y^\alpha$

a/ existuje také $T = T(t_o, U_o) > 0$, že úloha (13) má jediné riešenie na intervale $\langle t_o, t_o + T)$

b/ ak naviac funkcia F je lokálne lipschitzovská v premennej t, tak funkcia $U(.)$ je spojite diferencovateľná na otvorenom intervale $(t_o, t_o + T)$ / t.j. $U \in C^1((t_o, t_o + T) : Y)$ /

c/ ak chápeme funkciu U aj ako funkciu počiatočnej podmienky U_o, t.j. $U = U(t, U_o)$, tak $U(t, U_o)$ je spojitá funkcia v premennej U_o v takom zmysle, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$

ak $\| U_1 - U_2 \|_{Y^\alpha} < \delta$, tak $\| U(t, U_1) - U(t, U_2) \|_Y < \varepsilon$ rovnomerne vzhľadom na t patriace do spoločného intervalu existencie oboch riešení.

d/ Ak $T = T(t_o, U_o)$ je maximálne, t.j. riešenie $U(.)$ je na intervale $(t_o, t_o + T)$ úplné, tak buď $T = +\infty$ alebo norma riešenia $\| U(t) \|_Y$ nie je ohraničená na $(t_o, t_o + T)$.

Pristúpime teraz k formulácii abstraktnej rovnice vibrácii trámu.

Pod abstraktnou rovnicou vibrácii trámu rozumieme Cauchyho začiatočnú úlohu:

$$\frac{d}{dt} U + L_\beta U = F(t,U) \qquad t > t_o$$

$$U(t_o) = U_o$$

na priestore $\mathcal{X} = X^1 \times X$, kde operátor L_β je definovaný vzťahom (4).

Funkcia F je definovaná predpisom

$$F(t,[\varphi,\psi]) = \left[0 \; , \; -\left(\gamma + m\left(\| A^{1/2}\varphi \|^2_X\right)\right) \cdot A\varphi + f(t,\varphi,\psi)\right] \tag{14}$$

kde m je reálne funkcia nezápornej reálnej premennej a funkcia f zobrazuje množinu $R \times X^1 \times X$ do množiny X. (15)

Riešením úlohy (14) rozumieme riešenie semilineárnej úlohy (14) v zmysle definície 2.3.1.

Nasledujúca lema udáva postačujúce podmienky na funkcie m a f, tak aby funkcia F spĺňala podmienku (HL) pre nejaké $\alpha \in \langle 0,1)$.

Lema 2.3.1

Nech pre nejaké $\alpha \in \langle 0,1)$ sú splnené podmienky:

1/ $f: R \times X^{1+\alpha} \times X^\alpha \longrightarrow X$, pričom je lokálne hölderovská v premennej t a lokálne lipschitzovská v premennných φ a ψ .

2/ funkcia $m: \langle 0,\infty) \to R$ je lokálne lipschitzovská.

Potom funkcia F definovaná v (14) spĺňa podmienku (HL) pre α .

Dôkaz.

Z uvedených predpokladov zrejme

$$F : R \times X^{\alpha} \longrightarrow X$$

Na dôkaze lokálnej hölderovskosti v t a lokálnej lipschitzovskosti v premennej $[\varphi, \psi]$ nie je nič obtiažneho a je len rutínneho charakteru, pričom využívame len množstvo trojuholníkových nerovností,

q.e.d.

Na základe predošlého výsledku môžeme vysloviť nasledujúci výsledok o lokálnej existencii a jednoznačnosti riešenia abstraktnej nelineárnej rovnice vibrácii trámu.

Veta 2.3.2 (" o lokálnej existencii riešnia abstraktnej rovnice vibrácii trámu ")

Nech $\beta > 0$. Nech pre nejaké $\alpha \in \langle 0,1)$ sú splnené predpoklady lemy 2.3.1 .

Potom pre ľubovolné $t_0 \in R$, $\varphi_0 \in X^1$, $\psi_0 \in X$

a/ existuje $T = T(t_0, \varphi_0, \psi_0) > 0$ také, že úloha (14) s počiatočnou podmienkou $U_0 = [\varphi_0, \psi_0]$ má jediné riešenie na intervale $(t_0, t_0 + T)$.

b/ ak naviac funkcia f je lokálne lipschitzovská v premennej t , tak riešenie $U(.)$ je spojite diferencovateľné na intervale $(t_0, t_0 + T)$, t.j. $U \in C^1((t_0, t_0 + T) : X^1 \times X)$

c/ ak funkciu $U(.)$, ktorá je riešením úlohy (14), chápeme ako funkciu počiatočnej podmienky, tak $U(t, U_0)$ spojite závisí od U_0 v zmysle bodu c/ vety 2.3.1.

d/ ak $U(.)$ je úplné na intervale $(t_0, t_0 + T)$, tak

buď $T = \infty$ alebo norma riešenia $\| U(t) \|_{\mathcal{X}}$ nie je ohraničená na intervale $(t_0, t_0 + T)$
/ "blowing - up " /

Dôkaz.
Je dostatočne jasný. Podľa vety 2.2.1 je operátor L_β sektoriálny v priestore $\mathcal{X} = X^1 \times X$, zlomková mocnina $\mathcal{X}^\alpha$ je izomorfná súčinu priestorov $X^{1+\alpha} \times X^\alpha$. Funkcia F definovaná vzťahom (14) na základe lemy 2.3.1 spĺňa podmienku (HL) pre α. Kompletizácia dôkazu bezprostredne vyplýva zo všeobecnej vety 2.3.1 .

q.e.d.

Z h l a d z u j ú c i   e f e k t

/ " smoothing efect , smoothing action " /

Povšimnime si jeden zaujímavý fenomén viažucí sa k semilineárnym parabolickým rovniciam typu (13) .

Predpokladajme, že pre nejaké $\alpha \in \langle 0,1)$ sú splnené predpoklady vety 2.3.2 . Potom vieme, že pre ľubovolnú počiatočnú podmienku

$$U(t_0) = U_0 \in \mathcal{X}^\alpha = X^{1+\alpha} \times X^\alpha$$

existuje lokálne riešenie rovnice (14) . Podľa definície riešenia / def. 2.3.1 / dostávame

$$U(t) \in D(L_\beta) = X^2 \times X^1 \qquad t \in (t_0, t_0 + T(t_0, U_0))$$

To, ale prakticky znamená, že pri prechode zo stavu $t = t_0$ do stavu $t > t_0$ dochádza k prudkému kvalitatívnemu skoku - zhladeniu oproti počiatočnej podmienke. Voľne povedané: riešenie s počiatočnou podmienkou z $\mathcal{X}^\alpha$ v nasledujúce časové okamžiky patrí do regulárnejšieho priestoru $\mathcal{X}^1$.

Tento jav sa v literatúre často označuje ako zhladzujúci efekt / anglicky smoothing efect, smoothing action /

Zamyslime sa teraz v krátkosti nad " kvalitou " riešenia úlohy (14) , pričom automaticky vždy predpokladáme, že sú splnené predpoklady vety 2.3.2.

Poznatky o riešení U(.) úlohy (14) môžeme zhrnúť nasledovným spôsobom, pričom si všímame regularitu riešenia.
/ tiež predpokladáme splnenie bodu b/ vety 2.3.2 /

Potom platí:

$$
\begin{aligned}
&- \quad U \in C(\langle t_0, t_0+T) : X^1 \times X) \\
&- \quad U \in C^1((t_0, t_0+T) : X^1 \times X) \qquad (16) \\
&- \quad \text{pre } t \in (t_0, t_0+T) \quad \text{je } U(t) \in X^2 \times X^1
\end{aligned}
$$

Interpretácia riešenia abstraktnej rovnice vibrácii trámu

Ukážeme vzťah riešenia úlohy (14) k parciálnej diferenciálnej rovnici:

$$u_{tt} - \beta \Delta u_t - (\gamma + m((-\Delta u, u)))\Delta u + \Delta^2 u = f(t, u, u_t)$$

$$u(0,x) = q(x)$$

$$u_t(0,x) = h(x) \qquad \text{pre t.v. } x \in \Omega$$

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pre } x \in \partial\Omega, \ t \geq 0 \qquad (17)$$

Symbolmi P_1, P_2 označme prirodzené projekcie z priestoru $X^1 \times X$ do priestorov X^1 resp. X, teda

$$P_1([u,v]) = u$$

$$P_2([u,v]) = v$$

kde $[u,v] \in \mathcal{X} = X^1 \times X$

Nech $U(.)$ je riešením úlohy (14) na intervale (t_0, t_1)

Položme

$$u(t) = P_1 U(t) \qquad v(t) = P_2 U(t)$$

pre každé $t \in \langle t_0, t_1)$.

Na základe (16) je triviálne nahliadnuť, že platí:

$$u \in C(\langle t_0, t_1) : X^1) \cap C^1((t_0, t_1) : X^1) \ ;$$

$$v \in C(\langle t_0, t_1) : X) \cap C^1((t_0, t_1) : X)$$

pre $t\in(t_0,t_1)$ $\quad u(t)\in D(A^2)$, $v(t)\in D(A)$

(18)

Keďže funkcia $U(t)$ spĺňa na intervale (t_0,t_1) rovnicu

$$\frac{d}{dt}U(t)+L_\beta U(t)=F(t,U(t))$$

tak zrejme platí:

$$\frac{d}{dt}u(t)-v(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}v(t)+A^2u(t)+\beta A v(t)=-\left(\gamma+m\left(\|u(t)\|^2_{X^{1/2}}\right)\right)A\,u(t)+$$
$$+f(t,u(t),v(t))$$

(19)

a teda pretože $v\in C^1((t_0,t_1):X)$, tak
$u\in C^2((t_0,t_1):X)$

To znamená, že pre funkciu u platí:

$$u\in C(\langle t_0,t_1):X^1)\cap C^1((t_0,t_1):X^1)\cap C^2((t_0,t_1):X)$$

(20)

Keď v rovnosti (19) nahradíme $v(t)=\frac{d}{dt}u(t)$, tak dostávame

$$u_{tt}+\beta A u_t+\left(\gamma+m\left(\|u\|^2_{X^{1/2}}\right)\right)A\,u+A^2u=f(t,u,u_t)$$

(21)

kde sme z dôvodu zjednodušenia zápisu prijali notáciu

$$\frac{d}{dt}u=u_t\ ,\qquad \frac{d^2}{dt^2}u=u_{tt}$$

Rovnica (21) je vlastne skúmaná rovnica (17), v ktorej sme namiesto operátora $-\Delta$ dosadili jeho uzavreté samoadjungované rozšírenie.

Nakoniec sa zameriame na počiatočnú podmienku.

Je zrejmé, že $u(t_o) = P_1\, U(t_o) = P_1\, U_o$.

Ďalej $v(t_o) = P_2(U_o)$. V tomto prípade pri interpretácii dochádza k istej komplikácii, presnejšie:

- nemusí existovať derivácia funkcie $u(t)$ v bode t_o , pretože vieme, že pre u_t platí len

$$u \in C^1((t_o, t_1) : X^1)$$

Vieme však, že $v \in C(\langle t_o, t_1) : X)$ a $u_t(t) = v(t)$ pre $t \in (t_o, t_1)$ a teda potom existuje limita v priestore X

$$\lim_{t \downarrow t_o} u_t(t) = v(t_o) = P_2\, U(t_o) = P_2(U_o) \tag{22}$$

Situácia ohľadne interpretácie okrajovej podmienky je zrejmá, lebo vieme, že

$$u : \langle t_o, t_1) \longrightarrow X^1 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$$

a teda využijúc základnú vlastnosť priestoru $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ dostávame:

$$u(t,x) = 0 \quad , \; x \in \partial\Omega \quad \text{v zmysle stopy funkcií z priestoru } \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$$

pre každé $t \in \langle t_o, t_1)$

$$\tag{23}$$

V závere tejto kapitoly sa budeme zaoberať jedným autonómnym systémom. Tento systém bude mať fundamentálny význam pre celú kapitolu III. V nasledujúcom príklade stanovíme postačujúce podmienky na to , aby daný autonómny systém mal vlastnosť lokálnej existencie a jednoznačnosti riešenia.

<u>Príklad 1.</u>

Uvažujme o autonómnej rovnici

$$u_{tt} + \beta A u_t + (\gamma + m(\|u\|^2_{X^1}/2))\, A u + A^2 u = g(|u|^2)\, u$$

kde g je reálna funkcia nezápornej reálnej premennej, pričom vzťah $g(|u|^2)\, u$ chápeme štandardne ako bodovú evaluáciu, t.j.

$$g(|u|^2)\, u\, (x) := g\left(|u(x)|^2\right) u(x) \quad \text{pre t.v. } x \in \Omega \tag{24}$$

Touto rovnicou je generovaná abstraktná rovnica vibrácii trámu typu (14), kde nelinearita F má v tomto prípade špeciálny tvar:

$$F([\varphi,\psi]) = [0\ ,\ -(\beta + m(\|\varphi\|^2_{X^{1/2}}))A\varphi + g(|\varphi|^2)\varphi\ ] \tag{25}$$

Zadáme isté regularizačné a rastové podmienky na funkciu g , tak aby funkcia F definovaná v (25) spĺňala podmienku HL pre $\alpha = 0$.

Tvrdenie.

Predpokladajme, že platí:

i/ $m : \langle 0,\infty) \to R$ je lokálne lipschitzovská reálna funkcia

ii/ V závislosti o dimenzie priestoru R^n platí

$n = 1,2,3$ $\qquad g \in C^1(\langle 0,\infty))$

$n = 4$ $\qquad g \in C^1(\langle 0,\infty))$ a existujú $K > 0$, $p > 0$ také, že

$$|g(r)| \leq K(1 + r^p)$$
$$|r.g'(r)| \leq K(1 + r^p) \qquad \text{pre každé } r \geq 0$$

$n \geq 5$ $\qquad g \in C^1(\langle 0,\infty))$ a existuje $K > 0$ taká, že

$$|g(r)| \leq K(1 + r^{\frac{2}{n-4}})$$
$$|r.g'(r)| \leq K(1 + r^{\frac{2}{n-4}}) \qquad \text{pre každé } r \geq 0$$

Potom funkcia F definovaná vzťahom (25) spĺňa podmienku (HL) pre $\alpha = 0$.

Podľa lemy 2.3.1 stačí overiť, že za horeuvedených predpokladov platí

$$g(|u|^2)\,u \quad : X^1 \longrightarrow X$$

a toto zobrazenie je lokálne lipschitzovské.

Vzhľadom na obmedzenosť priestoru tejto diplomovej práce predložíme iba náznak dôkazu tohto faktu.

Dôkaz sa v podstate opiera o nasledujúce tvrdenia: $X^1 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $X = L_2(\Omega)$, $W_2^2 \hookrightarrow L_\infty$ pre $n = 1,2,3$, resp. $W_2^2 \hookrightarrow L_p$ pre $n = 4$ a každé $p \geq 1$, $W_2^2 \hookrightarrow L_{\frac{2n}{n-4}}$ pre $n \geq 5$

Ak sa oprieme o uvedené vnorenia Sobolevových priestorov, tak už potom ľahky dokážeme naše tvrdenie, pričom naviac budeme akurát potrebovať Hölderovu nerovnosť. Celkom zámerne nepredkladáme detaily postupu, pretože presný dôkaz vyžaduje aspoň dve strany textu a odhadov. V krátkosti povedané: metodika je štandardná a ostatné je len rutínna záležitosť.

III. KAPITOLA

GLOBÁLNE VLASTNOSTI RIEŠENÍ

V tejto kapitole sa budeme zaoberať globálnymi vlastnosťami riešení abstraktnej rovnice vibrácii trámu. V prvej časti nahliadneme, že za istých doplňujúcich rastových predpokladov na funkciu g z príkladu 1 , kap. II , sa nám prostredníctvom Ljapunovského typu stability podarí zaručiť globálnu existenciu trajektórii riešení.

V celej kapitole sa budeme výhradne zaoberať abstraktnou rovnicou vibrácii trámu (14) , kde nelineárna funkcia F má tvar (25) .

Ďalej explicitne zdôrazníme, že uvažovať budeme iba dimenzie $n=1,2,3$. Tento predpoklad je zdôvodniteľný hneď z dvoch aspektov: vyššie dimenzie v tomto prípade nemajú väčší fyzikálny význam a vzhľadom na jednoduchosť predpokladov na funkciu g z príkladu 1, kap. II. , v prípade, že $n \leq 3$.

3.1 GLOBÁLNA EXISTENCIA RIEŠENIA

Za istých rastových podmienok na funkciu g sa nám podarí nájsť Ljapunovovu funkciu, ktorá je nerastúca pozdĺž trajektórii riešení úlohy (14) . Ďalej nahliadneme že skúmaná Ljapunovova funkcia vytvára na priestore ekvivalentnú normu - energetickú normu.

Pripomenieme si štandardné predpoklady na funkcie m a g , tak aby nelineárna funkcia F definovaná v (25) spĺňala podmienku (HL) pre $\alpha = 0$.

a/ $n \leq 3$

b/ funkcia $m:\langle 0,\infty) \to R$ je lokálne lipschitzovská

c/ $g \in C^1(\langle 0,\infty))$ (26)

Podľa príkladu 1, kapitola II, máme pre ľubovolnú počiatočnú podmienku $U \in \overset{o}{X}$ zaručenú existenciu a jednoznačnosť riešenia rovnice (14), kde nelineárna funkcia F je definovaná vzťahom (25)

Za predpokladov (26) môžeme korektne definovať Riemannove integrály - ~~prosté~~ funkcie k funkciám m a g, primi

$$M(x) = \int_0^x m(s)\,ds \qquad G(x) = \int_0^x g(s)\,ds \qquad \text{pre každé } x \geq 0 \tag{27}$$

Prostredníctvom primitívnej funkcie G budeme definovať jeden funkcionál na priestore X^1.

Lema 3.1.1

Pre ľubovolné $\varphi \in X^1$ položme

$$J(\varphi) := \int_\Omega G(|\varphi(x)|^2)\ dx$$

Potom funkcionál J je korektne definovaný a ako funkcia $J: X^1 \longrightarrow R$ je spojitý.

Dôkaz.

Najprv overíme, že funkcionál J je korektne definovaný. Za tým účelom uvažujme o nejakom prvku $\varphi \in X^1$.
Pretože $g \in C^1(\langle 0,\infty))$ tak môžeme korektne definovať reálnu funkciu nezápornej reálnej premennej predpisom:

$$C(x) := \sup_{0 \leq r \leq x} |g(r)| \tag{28}$$

Je zrejmé, že funkcia $C(.)$ je nezáporná neklesajúca funkcia.

Potom pre $\varphi \in X^1 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ platí

$$G(|\varphi(x)|^2) = \int_0^{|\varphi(x)|^2} g(r)\,dr \leq |\varphi(x)|^2 \,.\, \sup\{|g(r)| \ , 0 \leq r \leq |\varphi(x)|^2\} \leq$$
$$\leq |\varphi(x)|^2 \,.\, C(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^2) = |\varphi(x)|^2 \,.\, C(\|\varphi\|^2_{L_\infty}) \leq$$
$$\leq |\varphi(x)|^2 \,.\, C(K^2 \|\varphi\|^2_{W_2^2}) = |\varphi(x)|^2 \,.\, C(K^2 \|\varphi\|^2_{X^1})$$

pre takmer všetky $x \in \Omega$. / $K>0$ je konštanta zo spojitosti vnorenia $W_2^2 \hookrightarrow L_\infty$ /

To znamená, že funkcia $x \longmapsto G(|\varphi(x)|^2)$ je integrovateľná, pretože $X^1 \subseteq L_2(\Omega)$.

Ukážeme teraz spojitosť funkcionálu $J: X^1 \longrightarrow R$.

Zrejme platí:

$$\left| \int_{|\psi(x)|^2}^{|\varphi(x)|^2} g(r)\,dr \right| \leq \sup\left\{ |g(r)| \text{, } r \text{ je medzi } |\varphi(x)|^2 \text{ a } |\psi(x)|^2 \right\} \times$$

$$\times \left| |\varphi(x)|^2 - |\psi(x)|^2 \right| \leq$$

$$\leq c\left(|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2\right) . |\varphi(x) - \psi(x)| . \left(|\varphi(x)| + |\psi(x)|\right) \leq$$

$$\leq c\left(\|\varphi\|^2_{L_\infty} + \|\psi\|^2_{L_\infty}\right) . \left(\|\varphi\|_{L_\infty} + \|\psi\|_{L_\infty}\right) |\varphi(x) - \psi(x)|$$

pre takmer všetky $x \in \Omega$.
To znamená, že

$$|J(\varphi) - J(\psi)| \leq c\left(K^2 . \left(\|\varphi\|^2_{X^1} + \|\psi\|^2_{X^1}\right)\right) . K . \left(\|\varphi\|_{X^1} + \|\psi\|_{X^1}\right) \times$$

$$\times \int_\Omega |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx \leq$$

$$\leq c_1 . \sqrt{\text{meas}(\Omega)} \|\varphi - \psi\|_{L_2} \leq$$

$$\leq c_1 . \sqrt{\text{meas}(\Omega)} \|\varphi - \psi\|_{X^1}$$

kde $C_1 = C\left(K^2\left(\|\varphi\|^2_{X^1} + \|\psi\|^2_{X^1}\right)\right) . K\left(\|\varphi\|_{X^1} + \|\psi\|_{X^1}\right)$

Teda funkcionál $J: X^1 \longrightarrow R$ je spojitý.
/ presnejšie J je lokálne lipschitzovský /

q.e.d.

Aj nasledovná lema má technický charakter.

Lema 3.1.2

Nech $u \in C^1((t_0, t_1) : X^1)$. Potom pre ľubovolné $t \in (t_0, t_1)$ platí:

i/ $\frac{d}{dt} M\left(\|u(t)\|^2_{X^1}/2\right) = 2.m\left(\|u(t)\|^2_{X^1}/2\right) . \left(Au(t), u_t(t)\right)$

ii/ $\frac{d}{dt} J(u(t)) = 2. \left(g(|u(t)|^2)\, u(t) \,,\, u_t(t) \right)$

Dôkaz.
Časť i/ je triviálna, pretože

$M'(x) = m(x)$ a $\frac{d}{dt} \| u(t) \|^2_{X^{1/2}} = \frac{d}{dt} \left(Au(t) \,,\, u(t) \right)$

$\left(Au(t) \,, u_t(t) \right)$

Časť ii/

Podobne ako v dôkaze lemy 3.1.1 využijeme fakt, že $g \in C^1(\langle 0, \infty))$ presnejšie: funkcia g má spojitú deriváciu. Potom môžeme korektne definovať nezápornú neklesajúcu reálnu funkciu nezápornej reálnej premennej predpisom:

$$C(x) := \sup_{0 \leq r \leq x} | g'(r) | \qquad (29)$$

Nech $t \in (t_0, t_1)$ je pevne zvolený čas. Nech h je ľubovoľné reálne číslo také, že $t + h \in (t_0, t_1)$.

Pre pevne vybraté $x \in \Omega$ položme

$$w = |u(t,x)|^2 \quad ; \quad z = |u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2$$

Zrejme platí

$$\left| G(w+z) - G(w) - z.g(w) \right| = \left| \int_w^{w+z} \left(g(r) - g(w) \right) dr \right| \leq$$

$$\leq z^2 . \sup\{ | g'(r) | \,,\, r \text{ je medzi } w \text{ a } w+z \} \leq$$

$$\leq z^2 . C\left(|w+z| + |w| \right) = z^2 . C\left(|u(t,x)|^2 + |u(t+h,x)|^2 \right) \leq$$

$$\leq z^2 . C\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(t,x)|^2 + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(t+h,x)|^2 \right) =$$

$$= z^2 . C\left(\|u(t)\|^2_{L_\infty} + \|u(t+h)\|^2_{L_\infty} \right) \leq$$

$$z^2 . C\left(\left(\|u(t)\|^2_{X^1} + \|u(t+h)\|^2_{X^1} \right) . K^2 \right)$$, kde $K > 0$ je

konštanta získaná z platnosti spojitosti vnorenia $X^1 \hookrightarrow L_\infty$

To znamená, že

$$\left| \frac{J(u(t+h)) - J(u(t))}{h} - \int_\Omega \frac{|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2}{h} . g(|u(t,x)|^2) dx \right| \leq$$

$$\leq C\left(K^2 . \left(\|u(t)\|^2_{X^1} + \|u(t+h)\|^2_{X^1} \right) \right) . \int_\Omega \frac{\left(|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2 \right)^2}{h} dx$$

Z Cauchy - Schwartzovej nerovnosti sa ľahko vidí, že

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \frac{\left(|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2\right)^2}{h} dx = 0$$

/ využijeme pritom samozrejme existenciu Fréchetovej derivácie funkcie $u(.)$ v prietore X^1 a teda aj v priestore X/

Záver dôkazu vychádza už priamočiaro. Stačí nahliadnuť, že platí:

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \frac{|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2}{h} . g(|u(t,x)|^2)\, dx =$$
$$= 2.\left(g(|u(t)|^2)\, u(t),\, u_t(t)\right)$$

Posledná rovnosť bezprostredne vyplýva z vnorenia $X^1 \hookrightarrow L_\infty$, využijúc platnosť vzťahu

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \left(\frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} - u_t(t,x) \right) dx = 0$$

ktorý je vlastne prepisom definície Fréchetovej derivácie. Nahliadli sme teda, že pre $t \in (t_o, t_1)$ existuje derivácia $\frac{d}{dt} J(u(t))$ a platí $\frac{d}{dt} J(u(t)) = 2.(g(|u(t)|^2)\, u(t),\, u_t(t))$

q.e.d.

L j a p u n o v o v a f u n k c i a p r e a b s t r a k t n ú r o v n i c u v i b r á c i i t r á m u

Na priestore $\mathcal{X} = X^1 \times X$ definujme reálnu funkciu / Ljapunovovu /

$$V : \mathcal{X} \longrightarrow R$$

$$V([u,v]) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{X^1} + \|v\|^2_X + \gamma \|u\|^2_{X^{1/2}} + M\left(\|u\|^2_{X^{1/2}}\right) - J(u)\right) \tag{30}$$

Pretože funkcia $M(.)$ je spojitá, tak v spojení s lemou 3.1.1

je jasné, že funkcia V je spojitá.

(31)

Fundamentálny výsledok o Ljapunovovej funkcii zavedenej vzťahom (30) sa viaže k derivácii Ljapunovovej funkcie pozdĺž trajektórii riešení úlohy (14) .

Lema 313

Nech $U(.)$ je riešením úlohy (14), (25) na intervale (t_0, t_1) . Potom v každom bode intervalu (t_0, t_1) existuje derivácia funkcie $t \longmapsto V(U(t))$ a naviac platí:

$$\frac{d}{dt} V(U(t)) = -\beta \| P_2 U(t) \|^2_{X^{1/2}} \quad \text{pre } t \in (t_0, t_1)$$

Dôkaz.

Označme štandardne $u(t) = P_1 U(t)$ pre $t \in \langle t_0, t_1)$

Podľa vzťahu (21) vieme, že platí

$$u \in C(\langle t_0, t_1) : X^1) \cap C^1((t_0, t_1) : X^1) \cap C^2((t_0, t_1) : X)$$

a funkcia $u(.)$ vyhovuje hyperbolickej rovnici

$$u_{tt} + \beta A u_t + (\gamma + m(\|u\|^2_{X^{1/2}}))\, Au + A^2 u = g(|u|^2)\, u$$

(32)

Ak rovnicu (32) skalárne / t.j. v priestore X / " prenásobíme" funkciou u_t , tak dostávame:

$$(u_{tt}, u_t) + \beta (Au_t, u_t) + \gamma (Au, u_t) + m(\|u\|^2_{X^{1/2}}) \cdot (Au, u_t) + (A^2 u, u_t) =$$
$$= (g(|u|^2)\, u, u_t)$$

keďže $u_t(t) = P_2 U(t)$ / podľa (19) / , tak podľa lemy 3.1.2 dostávame:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| P_2 U(t) \|^2_X + \beta \| P_2 U(t) \|^2_{X^{1/2}} + \frac{\gamma}{2} \| P_1 U(t) \|^2_{X^{1/2}} +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M(\| P_1 U(t) \|^2_{X^{1/2}}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| P_1 U(t) \|^2_{X^1} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J(P_1 U(t))$$

To prakticky znamená, že existuje derivácia funkcie

$t \longmapsto V(U(t))$, pre ktorú naviac platí požadovaný vzťah.

q.e.d.

Lema 3.1.4

Nech $\gamma \geq 0$, $m(x) \geq 0$ pre $x \geq 0$, $\sup\limits_{r \geq 0} g(r) < \lambda_1^2$

Potom existuje konštanta $K > 0$ taká, že pre každé $U \in \mathcal{X}$ je $\|U\|_{\mathcal{X}}^2 \leq K.V(U)$.

Dôkaz.

Označme $c = \sup\limits_{r \geq 0} g(r)$. Podľa predpokladu platí $c < \lambda_1^2$

/ pripomeňme, že λ_1 je prvá vlastná hodnota operátora A /

Potom zrejme pre ľubovolné $u \in X^1$ je $J(u) \leq c.\|u\|_{L_2}^2$

Kedže $\|A^{-1}\| \leq \lambda_1^{-1}$, tak dostávame:

$$J(u) \leq c.\|A^{-1}Au\|_X^2 \leq c.\|A^{-1}\|^2.\|u\|_{X^1}^2$$

Teda $V(U) \geq \frac{1}{2}\left((1 - c.\lambda_1^{-2})\|P_1 U\|_{X^1}^2 + \|P_2 U\|_X^2\right)$

Zrejme teda stačí položiť

$$K = \left(\tfrac{1}{2}\min\{1 - c.\lambda_1^{-2} , 1\}\right)^{-1}$$

q.e.d.

Na záver tejto časti môžeme vysloviť vetu o globálnej existencii riešenia úlohy(14),(25) .

Veta 3.1.1

Nech $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$, $m(x) \geq 0$ pre $x \geq 0$, $\sup\limits_{r \geq 0} g(r) < \lambda_1^2$.

Nech $m : \langle 0,\infty) \longrightarrow \langle 0,\infty)$ je lokálne lipschitzovská, $g \in C^1(\langle 0,\infty))$, $n \leq 3$.

Potom pre ľubovolné $t_0 \in R$, $U_0 \in \mathcal{X} = X^1 \times X$ existuje jediné riešenie úlohy(14),(25) s počiatočnou podmienkou $U(t_0) = U_0$ na nekonečnom intervale (t_0, ∞)

Dôkaz.

Podľa vety 2.3.2 / " o lokálnej existencii a jednoznačnosti riešnia úlohy (14) " / vieme, že za uvedených predpokladov na funkcie m a g dostávame využitím výsledku z príkladu 1, kapitola II, že existuje jediné lokálne riešenie úlohy (14) ,(25) s počiatočnou podmienkou $U(t_0) = U_0$.

Uvažujme o maximálnom intervale $(t_0, t_0 + T)$, na ktorom je teda riešenie $U(.)$ úplné. Na základe bodu d/ vety 2.3.2 buď $T = +\infty$ alebo norma riešenia $\|U(t)\|_*$ nie je ohraničená na intervale $(t_0, t_0 + T)$.

Ukážeme, že $T = +\infty$.

Predpokladajme opak, t.j. $T < \infty$. Potom podľa vyššie uvedeného faktu nutne musí byť norma riešenia $\|U(t)\|_*$ neohraničená na intervale $t_0, t_0 \; T$.

Pretože $\beta > 0$, tak podľa lemy 3.1.3 je zrejmé, že

$$v(U(t)) \leqslant v(U_0) \qquad \text{pre každé} \quad t \in (t_0, t_0 + T)$$

Na základe lemy 3.1.4 existuje taká konštanta K 0, že pre normu riešenia platí

$$\|U(t)\|_* \leqslant K.\, v(U_0) \qquad \text{pre každé} \quad t \in (t_0, t_0 + T)$$

To, ale znamená, že norma riešenia $U(.)$ ostáva ohraničená na intervale $(t_0, t_0 + T)$, čo je spor.

Teda $T = +\infty$

q.e.d.

3.2 SEMIDYNAMICKÉ SYSTÉMY

V tejto časti v krátkosti pripomenieme niektoré definície a základné výsledky viažuce sa k teórii semidynamických systémov / alebo aj nazývaných polotoky / , ktoré sú generované trajektóriami riešení semilineárnych abstraktných parabolických rovníc typu (13) .

Tiež uvedieme niektoré potrebné pojmy z modernej teórie dissipatívnych procesov, ktorá sa nedávno začala rozvíjať Jackom Haleom [Hal] a Massatom [Mal] -[Ma3] .

Táto časť má charakter prípravný k dosiahnutiu hlavných výsledkov o asymptotických vlastnostiach riešení abstraktnej nelineárnej rovnice vibrácii trámu.

Začneme definíciou semidynamického systému / polotoku/

Definícia 3.2.1 ([He] , Definition 4.1.1 ,[We])

Nech Y je B - priestor . Hovoríme, že systém zobrazení $\{ T(t) , t \geqslant 0 \}$ je semidynamický systém / polotok/ v Y ak platí:

a/ $T(t)$ je spojité zobrazenie z Y do Y pre každé $t \geqslant 0$.

b/ $T(.)\, x$ je spojitá funkcia z R^+ do Y pre každé pevné $x \in Y$

c/ $T(0) = Id_Y$, $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$, pre každé $t, s \geqslant 0$

Nech T je nejaký semidynamický systém v B - priestore Y . Pre ľubovolný prvok $x \in Y$ štandardne definujme omega limitnú množinu prvku x

$$\Omega(x) = \{ y \in Y \ , \text{ existuje postupnosť } t_n \longrightarrow \infty \text{ taká, že } T(t_n)\, x \rightarrow y \}$$

Pri zavedení nasledujúcich pojmov explicitne predpokladáme, že $T(t)$ je nejaký semidynamický systém v B - priestore Y .

Množina $J \subseteq Y$ sa nazýva invariantná vzhľadom na $T(t)$ ak $T(t)\, J = J$ pre každé $t \geqslant 0$.

Množina $J \subseteq Y$ je maximálna kompaktná invariantná, ak je kompaktná, invariantná a maximálna vzhľadom na tieto vlastnosti.

Množina $J \subseteq Y$ sa nazýva kompaktný atraktor pre $T(t)$ v Y , ak J maximálna kompaktná invariantná a atrahuje ohraničené množiny v Y, t.j. pre každú ohraničenú množinu B v Y a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje t_0 také, že pre každé $t \geqslant t_0$ je $dist_Y(T(t)\, B , J) < \varepsilon$

$$(33)$$

/ horeuvedené pojmy sú prebraté s práce [HS] a [We] /

D i s s i p a t í v n e   p r o c e s y

Moderná teória procesov je rozpracovaná v známej monografii Jacka Halea [Hal], hlava 4. My sa však priamo nebudeme zaoberať abstraktnou teóriou procesov, ktorá aj tak je v podstate vytvorená pre funkcionálno - diferenciálne rovnice s s konečným alebo nekonečným oneskorením. Dopredu sa teda ospravedlňujeme za to, že slovo proces použijeme v súvislosti s teóriou dissipatívnych semidynamických systémov, pričom takéto systémy budeme nazývať dissipatívne procesy. V terminológii monografie [Hal] sa budeme zaoberať autonómnymi procesmi.

Nech $T(.)$ je semidynamický systém v Y. Hovoríme, že $T(.)$ je b o d o v o d i s s i p a t í v n y , ak existuje ohraničená množina B v Y, ktorá atrahuje každý bod z Y, t.j. pre každé $x \in Y$, $\varepsilon > 0$ existuje $t_0 = t_0(x,\varepsilon) \geq 0$, že pre ľubovolné $t \geq t_0$ je

$$\mathrm{dist}_Y (T(t)\, x , B) < \varepsilon$$

Teóriou dissipatívnych procesov a jej využitím pri skúmaní semilineárnych parabolických rovníc sa intenzívne zaoberal Paul Massat v [Ma1] - [Ma3]. Dokázal rad fundamentálnych výsledkov o diskrétnych disspatívnych systémoch, o vzťahoch medzi jednotlivými typmi dissipatívnosti, o súvise dissipatívnosti procesov a mier nekompaktnosti a kondenzujúcich resp. podmienene kondenzujúcich zobrazení. Principiálne výsledky Massata z oblasti diskrétnych dissipatívnych procesov zovšeobecnil Jack Hale a Nicholas Stavrakis na prípad spojitých semidynamických systémov.

Z dôvodu obmedzeného času - priestoru tejto diplomovej práce nebudeme uvádzať všetky potrebné "medzivýsledky" a priamo pristúpime k predloženiu fundamentálneho výsledku ktorý je formulovaný jazykom dissipatívnych procesov.

Veta 3.2.1 ([HS] Theorem 2.1 - spojitá verzia
[Ma2] Theorems 2, 5 - diskrétna verzia)

Nech $T(t)$ je semidynamický systém v Banachovom priestore Y. Predpokladajme, že systém $T(t)$ spĺňa predpoklady:

a/ existuje systém lineárnych spojitých zobrazení $\{C(t),\ t \geq 0\}$, $C(t): Y \longrightarrow Y$ pre $t \geq 0$
existuje systém zobrazení
$\{U(t),\ t \geq 0\}$, $U(t): Y \longrightarrow Y$ pre $t \geq 0$
pričom $T(t) = C(t) + U(t)$ pre $t \geq 0$

b/ existujú konštanty $K, \delta > 0$ také, že
$\| C(t) \| \leq K e^{-\delta t}$ pre každé $t \geq 0$

c/ pre každé $t \geq 0$ je $U(t)$ totálne spojité zobrazenie z Y do Y.

d/ semidynamický systém $T(t)$ je bodovo dissipatívny.

e/ orbity ohraničených množín sú ohraničené v Y

Za týchto predpokladov existuje kompaktný atraktor pre $T(t)$ v B - priestore Y. Naviac tento atraktor je aj súvislý.

Poznámka. Pod orbitou / presnejšie semiorbitou / množiny $B \subseteq Y$ vzhľadom na semidynamický systém $T(t)$ rozumieme množinu:

$$\gamma^{+}(B) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)\, B$$

3.3 EXISTENCIA GLOBÁLNEHO ATRAKTORU

V tejto záverečnej časti ukážeme, že za istých doplňujúcich rastových predpokladov na funkciu g existuje kompaktný atraktor pre semidynamický systém generovaný trajektóriami riešení úlohy (14), (25).

V celom ďalšom texte budeme a - priori predpokladať splnenie podmienok vety 3.1.1 o globálnej existencii riešení úlohy (14), (25).

Nech $W \in \mathcal{K}$. Potom podľa vety 3.1.1 existuje jediné globálne riešenie úlohy (14), (25) s počiatočnou podmienkou $U(0) = W$. Uvažujme funkciu U aj v závislosti od počiatočnej podmienky W , teda $U = U(t,W)$.

Definujme systém zobrazení $\{S(t)\ ,\ t \geq 0\}$ nasledovne

$$S(t)W := U(t,W) \quad \text{pre } t \geq 0 \text{ a } W \in \mathcal{X} .$$

(34)

Lema 3.3.1

Systém zobrazení $\{S(t)\ ,\ t \geq 0\}$ definovaný v (34) tvorí semidynamický systém v priestore $\mathcal{X} = X^1 \times X$.

Dôkaz.

Je zrejmý z vety 2.3.2 a vety 3.1.1

q.e.d.

Pri dôkaze existencie atraktora pre semidynamický systém $S(t)$ dôležitú úlohu bude zohrávať množina equlibrii - stacionárnych riešení.

Uvažujme na priestore X^1 o variačnej rovnici:

$$(A\varphi, Av) + (\gamma + m(\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2}})) \cdot (A\varphi_1 v) = (g(|\varphi|^2)\varphi_1 v) \quad \text{pre každé } v \in X^1$$

(35)

pričom štandardne $\varphi \in X^1$ nazývame riešením variačnej rovnice (35) .

Prostredníctvom riešení variačnej rovnice (35) budeme definovať množinu equlibrii - stacionárnych riešení pre rovnicu (14), (25) .

Položme:

$$E = \{[\varphi, 0] \in \mathcal{X}\ ,\ \varphi \text{ je riešením variačnej rovnice } (35)\}$$

Množinu E nazývame množinou equlibrii pre abstraktnú rovnicu vibrácii trámu

(36)

O tvare omega limitných množín vzhľadom na semidynamický systém $S(t)$ hovorí nasledovná dôležité lema.

Lema 3.3.2

Pre každé $[\varphi, \psi] \in \mathcal{X}$ je $\Omega([\varphi, \psi]) \subseteq E$

Dôkaz.

Nech $[\varphi, \psi] \in \mathcal{X}$. Podľa lemy 3.1.3 je funkcia $t \longmapsto V(S(t)[\varphi, \psi])$ nerastúca a nezáporná. / predpokladáme samozrejme automaticky splnenie prepokladov z vety 3.1.1 /

To znamená, že potom existuje limita

$$\lim_{t \to \infty} V(S(t)[\varphi,\psi]) = q$$

Nech teraz $[u,v] \in \Omega([\varphi,\psi])$. Podľa definície omega limitnej množiny prvku $[\varphi,\psi]$ vieme, že existuje postupnosť $t_n \longrightarrow \infty$ taká, že $S(t_n)[\varphi,\psi] \longrightarrow [u,v]$ v $\mathcal{X}$

Zo spojitosti Ljapunovovej funkcie V na priestore $\mathcal{X}$ zrejme vyplýva, že

$$V([u,v]) = q$$

ľahko sa vidí, že potom preľubovolné $t \geq 0$ je

$$V(S(t)[u,v]) = q$$

Využijeme teraz tvrdenie lemy 3.1.3 . Integráciou derivácie Ljapunovovej funkcie V dostávame, že platí:

$$V(S(t)[u,v]) - V([u,v]) = -\beta \int_0^t \| P_2 \, S(t)[u,v] \|^2_{\frac{1}{2}} \, dt$$

To, ale znamená, že $P_2 \, S(t)[u,v] = 0$ pre každé $t \geq 0$

Zo vzťahu (19) , v ktorom $u(t) = P_1 \, S(t)[u,v]$
$v(t) = P_2 \, S(t)[u,v]$

dostávame:

$$\frac{d}{dt} P_1 \, S(t)[u,v] = 0 \quad \text{pre} \quad t > 0$$

a teda $P_1(S(t)[u,v]) = P_1(S(0)[u,v]) = u$ pre $t \geq 0$

Zrejme

$$\frac{d^2}{dt^2} P_1 \, S(t)[u,v] = 0 \quad \text{pre} \quad t > 0$$

a teda funkcia $u(t)$ je pre ľubovolné $t > 0$ riešením rovnice

$$A^2 u(t) + (\gamma + m(\| u(t) \|^2_{X^{1/2}}) \, A \, u(t) = g(|u(t)|^2) \, u(t)$$

Ak túto rovnicu skalárne prenásobíme nejakým $v \in X^1$ a využijeme samoadjungovanosť operátora A , tak sa ľahko vidí, že pre každé $t > 0$ funkcia $u(t)$ spĺňa variačnú rovnicu (35) . Vzhľadom na to, že

$$u(.) \in C(\langle 0,\infty) : X^1)$$

tak nutne aj funkcia $u = u(0)$ je riešením variačnej rovnice (35) . Nakoniec keďže $v = v(0) = P_2 \, S(0)[u,v] = 0$, tak zrejme $[u,v] \in E$ a teda $\Omega([\varphi,\psi]) \subseteq E$

q.e.d

V nasledujúcej leme doplníme predpoklady vety 3.3.1 tak, aby množina equlibrii E bola ohraničená v priestore .

Lema 3.3.2

Nech sú splnené predpoklady vety 3.3.1 . Nech naviac platí

$$\limsup_{r \to \infty} g(r) \leq 0$$

Potom množina equlibrii E je ohraničená v priestore $\mathcal{X}$.

Dôkaz.

Z uvedeného predpokladu jasne vyplýva, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $M = M(\varepsilon) > 0$ také, že ak $r \geq M$, tak $g(r) \leq \varepsilon$. Nech teraz $[\varphi, 0] \in E$

Ak vo variačnej rovnici (35) položíme $v = \varphi$ tak prirodzene dostávame:

$$\|\varphi\|^2_{X^1} \leq \left(g(|\varphi|^2)\varphi, \varphi\right) = \int_\Omega g(|\varphi(x)|^2)\, \varphi(x) . \overline{\varphi(x)}\, dx$$

Nech $\varepsilon > 0$. Oblasť Ω rozdelme na dve časti Ω_1, Ω_2 tak, aby $|\varphi(x)|^2 \leq M(\varepsilon)$ pre $x \in \Omega_1$

$|\varphi(x)|^2 > M(\varepsilon)$ pre $x \in \Omega_2$

Potom platí:

$$\int_\Omega g(|\varphi(x)|^2) . |\varphi(x)|^2\, dx \leq M(\varepsilon) . \lambda_1^2 . \operatorname{meas}\Omega_1 + \varepsilon \int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^2\, dx \leq$$

$$\leq M(\varepsilon) . \lambda_1^2 . \operatorname{meas}\Omega + \varepsilon . \|\varphi\|^2_X \leq$$

$$\leq M(\varepsilon) . \lambda_1^2 \operatorname{meas}\Omega + \varepsilon . \|A^{-1}\|^2 . \|\varphi\|^2_{X^1} \leq$$

$$\leq M(\varepsilon)\, \lambda_1^2 \operatorname{meas}\Omega + \varepsilon . \lambda_1^{-2} . \|\varphi\|^2_{X^1}$$

Teda:
$$\|\varphi\|^2_{X^1} \leq M(\varepsilon) . \lambda_1^2 . \operatorname{meas}\Omega + \varepsilon . \lambda_1^{-2} . \|\varphi\|^2_{X^1}$$

Zvolme ε také dostatočne malé aby $\varepsilon . \lambda_1^{-2} < 1$.

Potom zrejme pre $[\varphi, 0] \in E$ platí

$$\|[\varphi, 0]\|^2_{\mathcal{X}} \leq M(\varepsilon) . \lambda_1^2 . \operatorname{meas}(\Omega) . \left(1 - \varepsilon . \lambda_1^{-2}\right)^{-1}$$

q.e.d.

Na záver tejto kapitoly dokážeme existenciu atraktoru pre abstraktnú rovnicu vibrácii trámu (14) ,(25)

Veta 3.3.1

Nech sú splnené predpoklady vety 3.1.1 a lemy 3.3.2 Potom pre semidynamický systém $S(t)$ generovaný trajektóriami riešení úlohy (14), (25) existuje

súvislý kompaktný atraktor

v priestore $\mathcal{X}$.

Dôkaz.

Overíme splnenie predpokladov vety 3.2.1

Na základe známej metódy variácie konštánt vieme, že riešenie $U(.)$ úlohy (14) spĺňa integrálnu rovnicu

$$U(t) = e^{-L_\beta t} U(0) + \int_0^t e^{-L_\beta(t-s)} F(U(s))\, ds$$

Tento fakt vyplýva zo všeobecných výsledkov o semilineárnych parabolických rovniciach / [He] , Lemma 3.3.2 /

Prirodzene potom získavame rozklad semidynamického systému $S(t)$ na dve časti

$$S(t) = C(t) + V(t)$$

kde $C(t) := e^{-L_\beta t}$

a $V(t)W := \int_0^t e^{-L_\beta(t-s)} F(U(s))\, ds$, kde $U(.)$ je riešenie úlohy (14) s počiatočnou podmienkou $U(0) = W$

Vzhľadom na tvar spektra operátora L_β / pozri lemu 2.2.2/ vidíme, že bod b/ vety 3.2.1 je splnený.

Podľa vety 2.2.5 má operátor L_β kompaktnú rezolventu. Je veľmi dobre známe, že v takom prípade je operátor $e^{-L_\beta r}$ tiež totálne spojitý pre $r > 0$ / pozri [He] str. 35 /

Elementárna úvaha potom jasne dáva, že / nelineárny / operátor $V(t)$ je totálne spojitý pre $t \geq 0$. ?

Z analýzy príkladu 1 , kapitola II vyplýva, že nelineárna funkcia F zobrazuje ohraničené množiny v $\mathcal{X}$ opäť na ohraničené množiny v $\mathcal{X}$. Ak opäť využijeme kompaktnosť rezolventy operátora L_β , tak na základe Theorem 3.3.6 [He] dostávame, že orbity bodov vzhľadom na semidynamický systém $S(t)$ sú prekompaktné množiny v priestore $\mathcal{X}$. Na základe Theorem 4.3.3 [He] vieme, že v takom prípade omega - limitná množina ľubovolného bodu z $\mathcal{X}$ je neprázdna kompaktná, invariantná, súvislá a

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{X}}\left(S(t)\, w , \Omega(w)\right) \longrightarrow 0 \quad \text{pre } t \longrightarrow \infty$$

/ $w \in \mathcal{X}$ je nejaký ľubovolný bod /

Kedže omega limitné množiny sú podmnožinami množiny equlibrii / pozri lemu 3.3.2 / , tak na základe lemy 3.3.6 je zrejmé, že existuje ohraničené okolie množiny equlibrii, ktoré atrahuje každý bod z $\mathcal{X}$ vzhľadom na semidynamický systém $S(t)$. To znamená, že $S(t)$ je bodovo dissipatívny.

Ohraničenosť orbít ohraničených množín je zrejmá z nerastúcosti Ljapunovovej funkcie V pozdĺž trajektórii riešení / lema 3.1.3 / nelokal *

Tým sme overili všetky nutné predpoklady vety 3.2.1

Teda pre semidynamický systém $S(t)$ existuje kompaktný atraktor, ktorý je súvislý a kompaktný.

q.e.d.

treba odhad $c(\|\varphi\|_X) \le V(\varphi) \le c(\|\varphi\|_X)$

ktorý nie je explicitne uvedený

ZÁVER

Je dostatočne jasné, že predkladanú diplomovú prácu možno v krajnom prípade hodnotiť len ako viac či menej úspešný pokus o osvetlenie základov jednej špeciálnej partie náležiacej do temnej a zložitej teórie hyperbolických rovníc so silným tlmením. Pretože z pohľadu geometrickej teórie abstraktná rovnica vibrácii trámu ešte nebola podrobnejšie skúmaná, tak v prvom rade bolo nutné vytvoriť základný technický aparát kapitoly II. Za hlavné a podstatné výsledky považujem III. kapitolu o globálnych vlastnostiach riešení.

Bolo by určite celkom zbytočné na tomto mieste sa pokúšať robiť nejaké prognózy ďalšieho trendu v skúmaní nelineárnej rovnice vibrácii trámu. Súčasný stav matematického poznania z oblasti geometrickej teórie semilineárnych parabolických rovníc poskytuje značne širokú bázu, z ktorej bude možné ďalej rozvíjať znalosti o kvalitatívnych vlastnostiach nelineárnej rovnice vibrácii trámu so silným tlmením.

Záverom by som sa chcel ešte poďakovať RNDr. Marekovi Filovi a RNDr. Petrovi Poláčikovi za ich konzultácie k niektorým partiám zo semilineárnych parabolických rovníc.

Zoznam literatúry

[Am] Amman H., Invariant sets and Existence Theorems for Semilinear Parabolic and Eliptic Systems. In: J.of Math. Anal. and Appl., 65, 432-467, 1978.

[Av] Avantagiaty A., On compact embedding theorems in weighted Sobolev spaces. In: Czech. J. of Math., 29, 117-128, 1979.

[AKP] Achmerov P.P., Kamenskij M.I., Potapov A.S., Mery nekompaktnosti i uplotňajuščije operatory. Nauka 1986.

[Ba] Ball J.M., Stability Theory for an Extensible beam. In: Journal of Diff. Equ., 14, 399-418, 1973.

[Be] Bernštejn S.K., Ob odnom klase funkcionaľnych uravlenij. In: Sobranyje sočinenija, 323-331. Moskva Mir 1970.

[Bi] Biler P., Exponential decay of solutions of damped nonlinear hyperbolic equations. Preprint No. 53, Wroclav 1986.

[Fi] Fitzgibbon W.E., Strongly damped quasilinear Evolution systems. In: Journal of Math. Anal. and Appl., 79, 536-551, 1981.

[GK] Gluško, Krejn S.G., Fractional powers of differential operators and embedding theorems. In: Dokl ady akademiji Nauk ZSSR, 14, 367-384, 1978.

[Hal] Hale J.K., Theory of Functional Differential Equations. Rus. preklad Moskva Mir 1982.

[HS] Hale J.K., Stavrakis N., Limiting behavior of Linearly damped Hyperbolic equations. Preprint, Lefchetz Center for Dynamical systems, Brown University, jan. 1986.

[Har] Haraux A., Nonlinear evolution equations - Global behavior of solutions. Lecture Notes in Math. - 841. Springer Verlag 1981.

[He] Henry D., Geometric Theory of semilinear Parabolic equations. Rus. preklad Moskva Mir 1985.

[Hö] Hörmander, L., The analysis of Linear Partial Diff. operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis. Rus. preklad Moskva Mir 1986.

[K] Krejn S.G., Linejnyje uravlenija v Banachovom prostr. Moskva Nauka 1971.

[KFJ] Kufner A., Fučík S., John O., Function Spaces. Academia Praha 1977.

[Li] Lions J.L., Quelques methodes de resolution des problem aux limites non lineaires. Rus. preklad Moskva Nauka 1972.

[La] Ladyženskaja O.,A., Kraevyje zadači matematičeskoj fiziky. Moskva Nauka 1973.

[MP] Mallet-Paret J., Negatively invariant sets of Compact maps and an Extension of a Theorem of Cartwright. In: Journal of Diff. equ., 22, 331-349, 1976.

[Ma1] Massat P., Stability and fixed points of Point dissipative systems. In: Journal of Diff. Equ., 40, 217-231, 1981.

[Ma2] Massat P., Attractivity properties of α-contractions. In: Journal of Diff. Equ., 48, 327-333, 1983.

[Ma3] Massat P., Limiting behavior for Strongly damped Nonlinear wawe equtions. In: Journal of Diff. Equ.,48, 334-349, 1983.

[Maz] Mazja B.G., Prostranstva Soboleva. Leningrad 1985.

[Ru] Rudin W., Functional Analysis. Rus. preklad Moskva Mir 1975.

[Ph] Phillips R.S., Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. Transactions of AMS, 90, 193-254, 1959.

[Se] Segal I., Nonlinear Semigroups. In: Annals of Math., 78, 329-364, 1963.

[Sch] Schwartz L., Analyse Mathématique I. Rus. preklad Moskva Mir 1972.

[TaA] Taylor A.E., Introduction to the Functional Anplysis. Čes. preklad Academia Praha 1973.

[TaM] Taylor M., Pseudodifferential Operators. Rus. preklad Moskva Mir 1972.

[We] Webb G.F., Existence and asymptotic behavior for a Strogly damped nonlinear wawe equation. In: Canadian J. of Math., 32, 631-643, 1980.

[RS] Reed M., Simon B., Method of Modern Mathematical physics. IV. Analysis of Operators. Rus. preklad Moskva Mir 1984.

[ET] Ekeland I., Teman R., Convex analysis and variational Problems. Rus. preklad Moskva Mir 1979.

[Y] Yosida K., Functional Analysis. Rus. preklad Moskva Mir 1967.