

Daniel Ševčovič, Beáta Stehlíková, Karol Mikula

**Analytické  
a numerické metódy  
oceňovania  
finančných derivátov**

# Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov

• • • • •  
S T U • •  
• • • • •  
• • • • •



# **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**

Daniel Ševčovič

Beáta Stehlíková

Karol Mikula

**Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009**

*Cieľom tejto knihy je priblížiť čitateľovi základné aspekty oceňovania finančných derivátov, ich kvalitatívnu analýzu a praktické metódy ich oceňovania. Text sa zameriava na využitie moderných analytických a numerických metód na ohodnotenie derivátových kontraktov, akými sú napríklad opcie a dlhopisy.*



S prispením grantu Nadácie Tatra banky pre podporu vzdelávania vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU v roku 2009.

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© 2009 doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.,  
prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Recenzent: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Jazyková úprava: Zuzana Ceľuchová

Návrh obálky: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

Náklad 300 kusov, 1. vydanie, počet strán 200.

ISBN 978-80-227-3014-3

# Obsah

<i>Úvod</i>	9
<b>1</b> <i>Zaistovanie finančných aktív</i>	12
1.1 Stochastický charakter finančných aktív . . . . .	13
1.2 Deriváty ako nástroje zaistovania aktív . . . . .	14
1.2.1 Forwardy . . . . .	14
1.2.2 Opcie . . . . .	16
1.3 Debakle derivátových obchodov . . . . .	19
<b>2</b> <i>Black–Scholesov a Mertonov model</i>	21
2.1 Stochastické procesy . . . . .	22
2.1.1 Wienerov proces a geometrický Brownov pohyb .	22
2.1.2 Itóova lema . . . . .	27
2.1.3 Itóova lema pre vektorové náhodné premenné . .	28
2.1.4 Itóov integrál a izometria . . . . .	30
2.2 Black–Scholesova rovnica . . . . .	32
2.2.1 Stochastická rovnica pre derivát stochastickej ceny akcie . . . . .	33
2.2.2 Samofinancovaná stratégia tvorby portfólia s nu- lovým rastom investícií . . . . .	34
2.3 Terminálové podmienky . . . . .	38
2.3.1 Pay–off diagram kúpnej call opcie . . . . .	38
2.3.2 Pay–off diagram put opcie . . . . .	39
2.3.3 Pay–off diagramy vybraných opčných stratégií . .	40
2.4 Okrajové podmienky pre cenu derivátov . . . . .	43

2.4.1	Okrajové podmienky pre call a put opcie . . . . .	44
2.4.2	Okrajové podmienky pre kombinované opčné stratégie . . . . .	45
<b>3</b>	<i>Európske typy derivátov</i>	48
3.1	Oceňovanie call a put opcií . . . . .	48
3.2	Oceňovanie put opcií prostredníctvom call opcií a forwardov, put–call parita . . . . .	54
3.3	Oceňovanie vybraných opčných stratégií . . . . .	57
3.4	Porovnanie teoretických výsledkov oceňovania s reálnymi trhovými dátami . . . . .	58
<b>4</b>	<i>Kvalitatívna analýza rizika</i>	62
4.1	Historická volatilita akcií . . . . .	63
4.2	Implikovaná volatilita . . . . .	65
4.3	Volatility smile . . . . .	71
4.4	Delta opcie . . . . .	71
4.5	Gama opcie . . . . .	74
4.6	Ostatné faktory: Théta, Vega, Ró . . . . .	76
4.6.1	Citlivosť na zmenu úrokovej miery – faktor P (Ró)	76
4.6.2	Citlivosť na čas do expirácie – faktor Théta . . . . .	77
4.6.3	Citlivosť na zmenu volatility – faktor Vega . . . . .	78
<b>5</b>	<i>Modelovanie transakčných nákladov a rizika</i>	81
5.1	Lelandov model . . . . .	82
5.2	Modelovanie bid–ask spreadov pomocou Lelandovho modelu . . . . .	86
5.3	Riziko zahrňujúca metodológia a ďalšie nelineárne modely . . . . .	90
<b>6</b>	<i>Modelovanie exotických finančných derivátov</i>	96
6.1	Ázijské opcie . . . . .	97
6.1.1	Parciálna diferenciálna rovnica pre ázijské opcie . . . . .	98
6.2	Bariérové opcie . . . . .	103
6.3	Košíkové opcie a opcie na indexy . . . . .	107
6.4	Binárne opcie . . . . .	108
6.5	Zložené opcie . . . . .	108
6.6	Lookback opcie . . . . .	109

<b>7</b>	<i>Modelovanie okamžitej úrokovej miery</i>	112
7.1	Jednofaktorové modely . . . . .	113
7.2	Hustota rozdelenia Itóovho stochastického procesu a Fokker-Planckova rovnica . . . . .	116
7.3	Dvojfaktorové modely . . . . .	122
7.4	Kalibrácia modelov . . . . .	124
7.4.1	Metóda maximálnej vierohodnosti odhadu parametrov Vašíčkovho modelu . . . . .	124
7.4.2	Gauss-Nowmanove odhady parametrov . . . . .	126
<b>8</b>	<i>Oceňovanie derivátov úrokovej miery</i>	129
8.1	Dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier . . . . .	130
8.1.1	Jednofaktorové rovnovážne modely . . . . .	132
8.1.2	Dvojfaktorové rovnovážne modely . . . . .	139
8.1.3	Bezarbitrážne modely . . . . .	145
8.2	Ďalšie deriváty úrokovej miery . . . . .	147
<b>9</b>	<i>Americké typy derivátov</i>	150
9.1	Oceňovanie amerických opcií pomocou úloh s voľnou hranicou . . . . .	153
9.2	Oceňovanie amerických opcií pomocou lineárnej komplementarity . . . . .	159
<b>10</b>	<i>Numerické metódy oceňovania derivátov</i>	163
10.1	Explicitná schéma na riešenie Black-Scholesovej rovnice . . . . .	164
10.1.1	Binomický a trinomický strom . . . . .	170
10.2	Implicitná schéma na riešenie Black-Scholesovej rovnice . . . . .	173
10.3	Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc . . . . .	177
10.3.1	Metóda LU rozkladu . . . . .	177
10.3.2	Gauss-Seidelova relaxačná SOR metóda . . . . .	178
10.4	Metódy riešenia úlohy o lineárnej komplementarite . . . . .	181
10.4.1	Projektovaná SOR metóda . . . . .	181
10.4.2	Numerické riešenie problému prekážky . . . . .	183
10.5	Numerické metódy oceňovania amerických typov opcií . . . . .	185



10.5.1	Identifikácia hranice predčasného uplatnenia americkej opcie . . . . .	187
10.5.2	Implikovaná volatilita americkej opcie . . . . .	190
10.5.3	Zdrojové programy numerických algoritmov . . .	191
	<b>Literatúra</b>	<b>193</b>
	<i>Register</i>	198

---

# Úvod

---

V priebehu posledných troch desaťročí sa začali objavovať rôzne nestability na finančných trhoch. Výrazne sa zvýšili riziká pre investorov, ktoré sú prevažne dôsledkami fluktuácie cien akcií, indexov, úrokových mier a výmenných kurzov. Z tohto dôvodu začali investori hľadať možnosti, ako predchádzať možným stratám v dôsledku spomínaných fluktuácií. Praktické potreby investorov podnietili napokon vznik moderných finančných nástrojov, akými sú rozličné finančné deriváty, ktorých hodnota závisí od príslušných aktív. Aktívami môžu byť akcie, meny, akciové indexy, úrokové sadzby, výmenné kurzy, komodity, drahé kovy a pod. Finančné deriváty do značnej miery poskytujú investorom ochranu voči fluktuáciám cien aktív. Podcenenie úlohy zaisťovania investičných portfólií pomocou derivátov môže viesť k veľkým finančným stratám. Na druhej strane, však deriváty nie sú „všeliekom“ a ich využívanie musí byť vykonávané s hlbokou znalosťou problematiky, o čom svedčí i celý rad derivátových debaklov medzinárodných investičných spoločností koncom 90-tych rokov a koncom roku 2008.

Cieľom tejto knihy je priblížiť čitateľovi základné aspekty oceňovania finančných derivátov, ich kvalitatívnu analýzu a praktické metódy ich oceňovania. K búrlivému rozmachu využívania finančných derivátov došlo v posledných desaťročiach najmä vďaka pionierskej práci

ekonómov M. S. Scholesa, R. C. Mertona a teoretického fyzika F. Blacka, zo začiatku sedemdesiatych rokov [8]. V tejto práci bol odvodený dnes už klasický Black–Scholesov model, za ktorý im bola neskôr v roku 1997 udelená Nobelova cena za ekonómiu.<sup>1</sup> Prístup bol skutočne revolučný a priniesol metódu uplatnenia parciálnych diferenciálnych rovníc pri oceňovaní finančných derivátov. Rozpracovaná metodológia tak umožňuje oceňovať deriváty podkladových aktív ako funkcie závisiace od času do expirácie a ceny samotného podkladového aktíva.

Kniha je tematicky rozdelená do niekoľkých celkov. V prvej kapitole sa budeme venovať analýze charakteru vývoja aktív a cenných papierov. Predstavíme si niektoré základné typy derivátov. Kapitola nemá matematický charakter a jej cieľom je na verbálnej úrovni priblížiť význam štúdia finančných derivátov. Druhá kapitola je zameraná na štúdium Black–Scholesovho modelu oceňovania derivátov, ktorého matematickou formuláciou bude parciálna diferenciálna rovnica. Dôraz bude kladený na polozenie základov stochastického diferenciálneho kalkulu, ktorý je východiskom k odvodeniu akéhokoľvek modelu oceňovania finančných derivátov. Tretia kapitola sa zameriava na oceňovanie európskych call a put opcií. Odvodíme explicitný vzorec oceňovania, ktorý je známy aj ako Black–Scholesova alebo aj Feynman-Kacova formula. Obsahom štvrtej kapitoly je kvalitatívna analýza rizika. Čitateľovi priblížime základné pojmy akými sú historická a implikovaná volatilita. Ďalej sa sústredíme na faktory citlivosti Delta, Gama, Théta, Vega a Ró, ktoré nám poskytujú podrobnejší obraz o závislosti ceny derivátu na zmene niektorého z parametrov modelu. Modelovanie transakčných nákladov a rizika je predmetom piatej kapitoly. Okrem Lelandovho modelu sa zameriame aj na niektoré nelineárne modely, ktoré zovšeobecňujú klasickú Black–Scholesovu rovnicu v prípade, že je do modelovania potrebné zahrnúť transakčné náklady na zaistovanie portfólia alebo riziko plynúce z nezaisteného portfólia. V šiestej kapitole predstavíme základné typy exotických typov derivátov, akými sú napríklad ázijské opcie alebo bariérové opcie a iné. V siedmej kapitole sa budeme venovať otázkam modelovania okamžitej úrokovej miery, ktorá predstavuje podkladové aktívum pre deriváty úrokovej miery. V nadväzujúcej ôsmej kapitole sa budeme venovať derivátom úrokovej miery. Priblížime metodológiu oceňovania dlhopisov. Zvláštna pozornosť je venovaná

---

<sup>1</sup>Nobelova cena za ekonómiu sa v skutočnosti neudeľuje, nakoľko ekonómia nie je predmetom závetu Alfreda Nobela. Jedná sa o tzv. Cenu Švédskej banky za ekonómiu na pamiatku A. Nobela, ktorá je považovaná za jej ekvivalent.

bezarbitrážnym modelom úrokovej miery, akými je napríklad Vašíčkov alebo Cox–Ingersoll–Rossov model. Americké typy derivátov rozoberáme v deviatej kapitole. Tieto deriváty sú charakterizované možnosťou predčasného uplatnenia opcie. Ukážeme, že problém oceňovania amerických derivátov sa dá previesť na úlohu o hľadani voľnej hranice pre parabolické parciálne diferenciálne rovnice. Vo finančnej terminológii sa tejto voľnej hranici hovorí hranica predčasného uplatnenia opcie. V záverečnej desiatej kapitole sa budeme bližšie zaoberať numerickými metódami na riešenie Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice pomocou explicitných a implicitných konečno-diferenčných metód. Pomocou projektovaného SOR algoritmu ukážeme, ako numericky efektívne zvládnuť problém oceňovania amerických typov derivátov.

Text knihy vznikol na základe série prednášok a seminárov z teórie oceňovania finančných derivátov na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Autori sú vďační všetkým, ktorí svojimi pripomienkami prispeli ku skvalitneniu obsahu. Ďakujeme A. Zbyňovskej a M. Strakovi za podrobné zápisky prednášok, M. Gancárovej, S. Kilianovej, M. Takáčovi a Z. Celúchovej za starostlivé korektúry a poznámky k textu, ako aj mnohým ďalším kolegom, bez pomoci a rád ktorých by tento text sotva uzrel svetlo sveta.<sup>1</sup>

Bratislava január 2009

Autori

---

<sup>1</sup>Kniha vznikla aj s pomocou grantov VEGA 1/0381/09 a APVV-0351-07.

---

## Kapitola 1

### *Zaist'ovanie finančných aktív*

---

V súčasnosti sme svedkami prudkého rozmachu akciových spoločností - počnúc klasickými „kamennými“ podnikmi a končiac modernými technologickými „Dot.Com“ spoločnosťami. Vlastníctvo akcií podniku predstavuje jeden zo základných nástrojov, ktoré slúžia na ovplyvňovanie chodu a vývoja podniku. Zároveň ich vlastníctvo prináša zisk v podobe dividend vyplácaných držiteľom akcií. Na druhej strane, z pohľadu podniku a emitenta akcií sú tieto zdrojom kapitalizácie podniku, a tým pádom príležitosťou na získanie zdrojov na ďalšie investície a rozvojové programy. Hoci cena akcie nemusí bezprostredne odrážať hodnotu podniku, je jedným z najlepších indikátorov jeho stavu a perspektívy ďalšieho rozvoja.

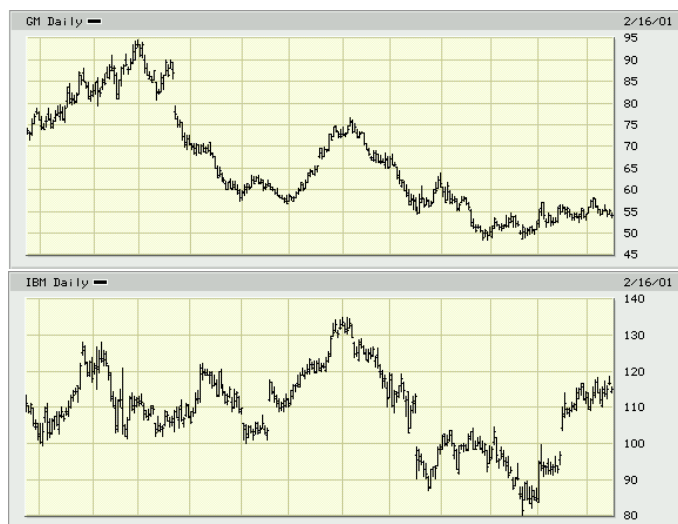
Od čias zrodu finančných nástrojov, akými sú akcie, sa do popredia záujmu investorov dostávala otázka efektívneho rozloženia investičného portfólia medzi akcie a dlhopisy. Akcie prinášajú investorovi vyššie zisky a navyše môžu prinášať ďalší zisk v podobe dividend. Na

druhej strane však predstavujú rizikový typ cenných papierov. Dlhopisy majú obvykle nižší výnos, ale aj ich rizikovosť je nižšia v porovnaní s akciami. Investori preto hľadajú optimálne zloženia svojich investičných portfólií. Základným nástrojom zabezpečovania investora voči riziku je tzv. finančný derivát. Zrod jednoduchých finančných derivátov sa dá datovať ešte do 19. storočia a viaže sa k poľnohospodárskym kontraktom na nákup plodín. Tieto typy kontraktácie nákupných cien (napr. obilia) počas zimného obdobia dávali poľnohospodárom možnosť investícií a odhadu potrebnej výmery osiatej pôdy. Tento typ obchodovania sa dá prirovnať k jednému zo základných finančných derivátov, akým je tzv. forward. Od tých čias sa postupne vyvinuli mnoho zložitejšie finančné deriváty, slúžiace na zaistovanie investičného portfólia voči riziku plynúcemu z výkyvov cien akcií. Posledné tri desaťročia predstavujú zlom v obchodovaní s finančnými derivátmi. Deriváty sú najčastejšie vypisované na akcie, výmenné kurzy, komodity. Medzi základné typy derivátov radíme opcie a deriváty úrokových mier. Oceňovanie rôznych druhov opcií je obsahom ďalších kapitol tejto učebnice.

## 1.1 Stochastický charakter finančných aktív

Pohľad na stránky finančných denníkov a internetových databáz nám poskytuje obraz o vývoji cien aktív, akými sú napríklad akcie, burzové indexy, úrokové miery a iné obchodovateľné aktíva. Ich časový vývoj je často nestály, vykazujúci väčšiu alebo menšiu fluktuáciu. Tieto zmeny sú spôsobené pôsobením burzového a mimoburzového trhu na cenu aktíva. Ponuka a dopyt po danom aktíve formujú jeho časový priebeh. Pri analýze časových dát sa často stretávame na jednej strane s možnosťou vymedziť určitý trend a na druhej strane určiť fluktuačnú zložku vývoja ceny. Kým prvá zložka svedčí o dlhodobom trende ovplyvnenom najmä pozíciou a stratégiou firmy, fluktuačná zložka sa dá pripísať na konto trhového mechanizmu vyvažovania ponuky a dopytu, budúcich očakávaní a pod. Na obr. 1.1 a 1.2 môžeme vidieť vývoj ceny akcií firiem General Motors, Microsoft a IBM za rok 2000 a 2008. Na ďalšom obrázku 1.3 je zachytený vývoj cien burzového indexu Dow-Jones a celkový objem transakcií (dole).

Úlohou predošlých príkladov bolo poukázať na stochastický charakter vývoja cien rôznych akcií a indexov na svetových burzách. Modelovaním stochastického vývoja ceny akcie sa budeme podrobnejšie zaoberať v nasledovnej kapitole. Z praktického hľadiska je potrebné po-



Obr. 1.1: Časový vývoj cien akcií firiem General Motors a IBM v roku 2000.

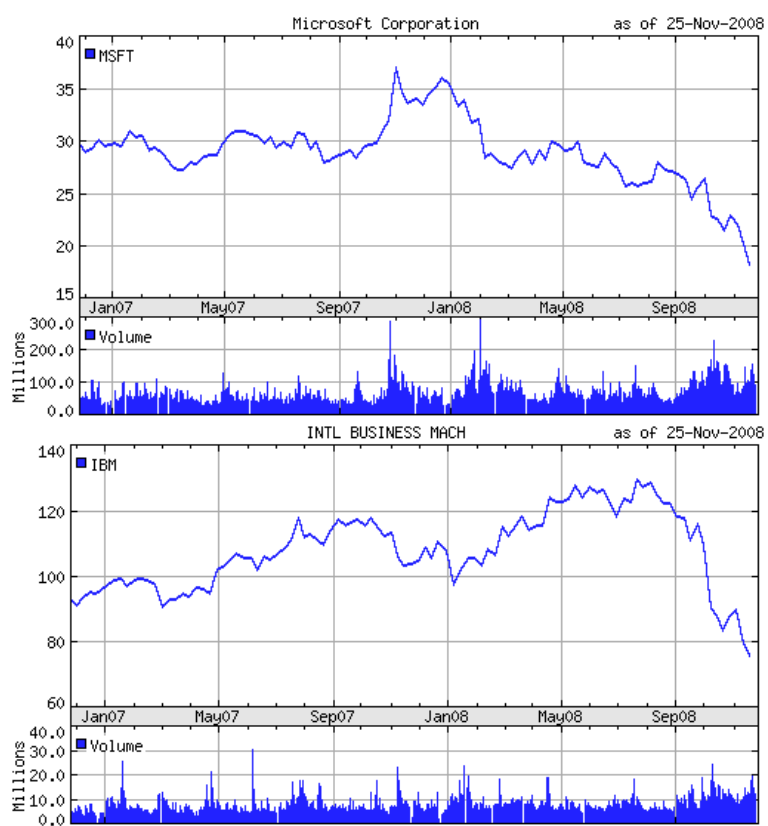
znamenat', že snahou investorov je minimalizovať svoje možné straty plynúce z prudkého pádu cien akcií. Jedným z efektívnych nástrojov na dosiahnutie tohto cieľa je použitie zaistovacích nástrojov, akými sú rôzne druhy derivátov aktív.

## 1.2 Deriváty ako nástroje zaistovania aktív

V tejto časti poukážeme na význam finančných a iných derivátov na zaistovanie stability portfólia voči fluktuáciám vo vývoji ceny daného aktíva. Zaoberať sa budeme tzv. forwardovými a opčnými typmi derivátov.

### 1.2.1 Forwardy

Historicky prvými nástrojmi na zabezpečovanie sa investorov voči riziku boli forwardové kontrakty. Forward je dohoda predstavujúca právo a súčasne povinnosť realizácie (forwardového) obchodu medzi vypisovateľom forwardu a kupujúcim na kúpu, resp. predaj aktíva v presne



Obr. 1.2: Časový vývoj cien akcií firiem Microsoft a IBM v rokoch 2007, 2008 a objem realizovaných obchodov.





Obr. 1.3: Časový vývoj indexu Dow-Jones v rokoch 2000 a 2007-8.

stanovenom expiračnom čase za vopred dohodnutú expiračnú cenu. Ako uvidíme v kapitole 3, oceňovanie forwardov je jednoduché a je založené iba na úročení expiračnej ceny kontraktu. Jednoduchosť je predovšetkým dôsledkom podmienky, že forward je právo a súčasne povinnosť realizácie obchodu. Podobným typom derivátu je futures. Na rozdiel od mimoburzového forwardu, futurita je burzový produkt, ktorý je obchodovaný na burze.

### 1.2.2 Opcie

Na rozdiel od forwardových kontraktov opcie predstavujú typ kontraktu, pri ktorom má ich vlastník právo, nie však povinnosť kúpiť, resp. predať dané aktívum za vopred dohodnutú cenu vo vopred stanovenom expiračnom čase. Opcia teda nemá obligatórny charakter, t. j. dáva jej držiteľovi voľnosť pri jej uplatňovaní.

Pre lepšiu názornosť si uvedieme jednoduchý príklad využitia tzv. kúpnej opcie. Predpokladajme, že vlastnime kúpnu opciu na nákup akcií firmy IBM za vopred dohodnutú expiračnú cenu 60 USD, ktorá je uplatniteľná v expiračnej lehote o tri mesiace. Nech súčasná cena je

55 USD. Ak sa za tri mesiace doby života opcie cena akcie zvýši na 70 USD, tak nám vlastníctvo tejto opcie prináša finančný zisk v podobe 10 USD, ktoré tvoria rozdiel medzi skutočnou cenou (70 USD) a expiračnou cenou opcie (60 USD). V tejto situácii hovoríme, že opcia je *in the money*, nakoľko nám jej uplatnenie prináša zisk. Na druhej strane, ak za spomínané tri mesiace cena akcie dosiahne iba hodnotu 58 USD, tak sa pre nás, ako majiteľa opcie, stáva takáto opcia bezcennou a nemá zmysel si ju uplatňovať. Takej opcii hovoríme, že je bezcenná, tzv. *out of the money*, nakoľko nám jej uplatnenie neprináša žiaden zisk. Všimnime si, že právo a nie povinnosť uplatniť danú opciu nám prináša istú výhodu oproti tým, ktorí takúto možnosť nemajú. Samotné právo na kúpu sa preto stáva hodnotou. Táto výhoda však musí byť zaplatená na začiatku vypisovania kontraktu. Vypisovateľ si od nás vyžiada tzv. opčnú prémiiu za to, že my, ako držiteľ opcie, máme toto právo na budúce uplatnenie opcie. Základný problém teórie finančných derivátov je otázka, ako oceniť toto právo tak, aby nedošlo k poškodeniu ani jednej zo strán kontraktu.

Základné, tzv. *vanilla* opcie, predstavujú európske typy kúpnych opcií a opcií na predaj. Kúpna opcia alebo call opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase  $t = T$  za vopred dohodnutú expiračnú cenu  $E$ . Predajná opcia alebo put opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ získava právo predat akciu v presne určenom expiračnom čase  $t = T$  za vopred dohodnutú expiračnú cenu  $E$ . Aj v tomto prípade je úlohou oceniť hodnotu  $V$  put opcie v čase uzavretia kontraktu  $t = 0$ .

Na obrázku 1.4 sú zachytené reálne obchodované stavy cien call a put opcií na akcie firmy Microsoft zo dňa 21. 11. 2008. Napríklad call opcia s expiráciou dňa 19. 12. 2008 a expiračnou cenou  $E = 15$  (dolárov) stála v rozmedzí 5,20 (bid cena - ponuka na kúpu opcie) až 5,30 (ask cena - ponuka na predaj opcie). Cena akcie bola  $S = 20,12$ . Rozdiel aktuálnej a expiračnej ceny, t. j.  $S - E$  bol v tomto prípade 5,12, čo znamená, že cena opcie je o niečo väčšia, ako by bola jej hodnota v čase expirácie. Tento jav sa dá vysvetliť ešte štvortýždňovou lehotou do vypršania, nakoľko cena akcie je počas tohto obdobia ešte vystavená stochastickým výkyvom a určitému riziku z možného rastu ceny akcie. Podobne je to pre put opciu s expiračnou cenou  $E = 25$ , ktorá v súčasnosti stojí od 4,85 - 4,95, čo je opäť hodnota mierne prevyšujúca rozdiel  $E - S = 4,78$ .

Analýzou cien opcií aj pre expiračné ceny vyššie, resp. nižšie ako je aktuálna cena akcie vidíme, že cena opcie sa skladá z tzv. vnútor-

Microsoft Corporation (MSFT)														At 9:41AM ET: <b>20.12</b> <span style="color: green;">↑ 0.13 (0.65%)</span>	
Options															
View By Expiration: <b>Dec 08</b>   <a href="#">Jan 09</a>   <a href="#">Apr 09</a>   <a href="#">Jul 09</a>   <a href="#">Jan 10</a>   <a href="#">Jan 11</a>															
Options Expiring Fri, Dec 19, 2008															
Calls								Strike Puts							
Symbol	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int	Strike Price	Symbol	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int	
<a href="#">MQFLEX</a>	15.20	0.00	15.10	15.20	42	34	5.00	<a href="#">MQFEXX</a>	N/A	0.00	N/A	N/A	0	0	
<a href="#">MQFLB.X</a>	10.15	0.00	10.10	10.20	74	2,541	10.00	<a href="#">MQFXB.X</a>	0.03	0.00	0.02	0.04	97	3,473	
<a href="#">MQFLM.X</a>	7.20	0.00	7.15	7.25	95	187	13.00	<a href="#">MQFXM.X</a>	0.07	0.00	0.05	0.07	459	2,994	
<a href="#">MQFLN.X</a>	6.15	0.00	6.15	6.25	55	211	14.00	<a href="#">MQFXN.X</a>	0.10	0.00	0.07	0.10	204	2,147	
<a href="#">MQFLC.X</a>	5.06	↑ 0.11	5.20	5.30	11	1,348	15.00	<a href="#">MQFXC.X</a>	0.14	0.00	0.13	0.14	5	8,183	
<a href="#">MQFLO.X</a>	4.35	0.00	4.25	4.35	263	368	16.00	<a href="#">MQFXO.X</a>	0.20	↓ 0.02	0.19	0.21	2	337	
<a href="#">MQFLO.X</a>	3.40	0.00	3.30	3.40	122	4,157	17.00	<a href="#">MQFXQ.X</a>	0.32	↓ 0.02	0.33	0.34	11	8,395	
<a href="#">MQFLS.X</a>	1.83	↓ 0.05	1.89	1.92	36	7,567	19.00	<a href="#">MQFXS.X</a>	0.83	↑ 0.06	0.77	0.80	169	31,116	
<a href="#">MQFLD.X</a>	1.28	↓ 0.02	1.27	1.29	56	8,886	20.00	<a href="#">MQFXD.X</a>	1.14	↓ 0.06	1.13	1.16	109	23,562	
<a href="#">MQFLU.X</a>	0.78	↓ 0.09	0.75	0.78	105	72,937	21.00	<a href="#">MQFXU.X</a>	1.83	↑ 0.23	1.65	1.68	1	72,472	
<a href="#">MSQLN.X</a>	0.40	↓ 0.04	0.41	0.43	350	16,913	22.00	<a href="#">MSQXN.X</a>	2.58	↑ 0.23	2.30	2.36	3	4,495	
<a href="#">MSQLQ.X</a>	0.21	↓ 0.01	0.20	0.22	125	20,801	23.00	<a href="#">MSQXQ.X</a>	3.10	0.00	3.05	3.15	30	3,840	
<a href="#">MSQLD.X</a>	0.09	↓ 0.02	0.09	0.11	92	12,207	24.00	<a href="#">MSQXD.X</a>	3.80	0.00	3.95	4.05	167	3,871	
<a href="#">MSQLE.X</a>	0.04	↓ 0.02	0.04	0.05	165	14,193	25.00	<a href="#">MSQXE.X</a>	4.90	0.00	4.85	4.95	157	2,075	
<a href="#">MSQLR.X</a>	0.02	0.00	0.02	0.03	161	9,359	26.00	<a href="#">MSQXR.X</a>	6.15	0.00	5.85	5.95	210	1,795	
<a href="#">MSQLS.X</a>	0.02	0.00	N/A	0.03	224	3,643	27.00	<a href="#">MSQXS.X</a>	7.00	0.00	6.85	6.95	45	1,156	
<a href="#">MSQLT.X</a>	0.02	0.00	N/A	0.02	59	2,938	28.00	<a href="#">MSQXT.X</a>	7.55	0.00	7.80	7.95	24	874	
<a href="#">MSQLE.X</a>	0.01	0.00	N/A	0.02	10	1,330	30.00	<a href="#">MSQXF.X</a>	10.54	0.00	9.85	10.00	26	124	

Highlighted options are in-the-money.

Obr. 1.4: Ceny call a put opcí s různými expiračními cenami na akcie firmy Microsoft zo dňa 26. 11. 2008.

nej hodnoty opcie, ktorá je daná výrazom  $\max(S - E, 0)$  v prípade call opcie, resp.  $\max(E - S, 0)$  (v prípade put opcie) a rizikovej prirážky k vnútornej hodnote opcie, ktorá oceňuje riziko plynúce zo stochastického charakteru vývoja podkladového aktíva počas ostávajúceho času do expirácie call resp. put opcie.

### 1.3 Debakle derivátových obchodov

Na koniec tejto kapitoly uvedieme niekoľko známych príkladov tzv. derivátových debaklov, pri ktorých investori stratili významné finančné čiastky pri obchodovaní s finančnými derivátmi. Zmyslom uvedenia aj negatívnych príkladov je upozorniť čitateľa na skutočnosť, že nepremyslené a nefundované používanie derivátov môže byť v konečnom dôsledku riskantnejšie, ako ich nepoužívať vôbec.

V druhej polovici 90-tych rokov bolo zaznamenaných niekoľko derivátových debaklov, ktorých účastníkmi sa stali popredné svetové inštitúcie. Britská spoločnosť Barings stratila stovky miliónov GBP vďaka riskantnej stratégii svojho obchodníka Nicka Leeson, ktorý sa snažil uplatnením kombinovanej opčnej stratégie, zameranej na očakávaný nárast ceny, dosiahnuť dominantné postavenie na trhu s opciami, a tak sa stať dominantným investorom. Pri realizovaní tejto stratégie „pumpoval“ obrovské finančné čiastky s cieľom ovládnuť opčný trh a následne diktovať ceny. Táto stratégia mu nakoniec nevyšla a Barings zaznamenali veľké straty. Americká spoločnosť NatWest prišla o stovky miliónov dolárov vďaka zlému odhadu rizika plynúceho z výrazných fluktuácií cien akcií. Švajčiarska banka Union Bank of Swiss prišla o stovky miliónov dolárov kvôli nesprávnemu oceneniu komplikovaného derivátu, ktorý predávala na trhu za nižšiu cenu. Deriváty sa viazali na vývoj cien dvoch aktív s rôznymi dobami splatnosti. Častým zdrojom omylov pri oceňovaní podobných komplikovaných finančných derivátov je podcenenie rizikových faktorov, variabilných korelácií medzi jednotlivými aktívami a celý rad ďalších faktorov, ktoré sú poväčšinou dôsledkom zlej východiskovej štatistickej analýzy predmetných dát.

V druhej polovici roku 2008 sa začala prejavovať globálna finančná kríza, ktorej príčiny sa hľadali predovšetkým v nedostatočnom kontrolovaní derivátových obchodov a ich nedostatočnom krytí. O prehľbujúcej sa finančnej kríze v druhej časti roku 2008 svedčí aj pokles globálnych indikátorov hodnôt aktív, akým je napríklad Dow-Jonesov priemyselný

index. Treba však poznamenať a dodať, že napriek niektorým zlyháním derivátových obchodov, tieto patria k dôležitým nástrojom finančného obchodovania, pretože prinášajú možnosť rozkladania budúceho možného rizika. Deriváty umožňujú efektívne zaistovať finančné portfóliá. V neposlednom rade, finančné deriváty majú významnú informačnú úlohu, keďže poskytujú pozorovateľom a účastníkom na trhu možnosť odhaľovať možné budúce tendencie vývoja samotných aktív, na ktoré sú ako deriváty nadviazané.

---

## Kapitola 2

### *Black–Scholesov a Mertonov model*

---

V tejto kapitole sa budeme zaoberať odvodením diferenciálnej rovnice opisujúcej vývoj ceny derivátu v závislosti od ceny akcie a času ostávajúceho do expirácie. V známom Black–Scholesovom modeli oceňovania derivátov, centrálnu úlohu zohráva modelovanie stochasticky sa vyvíjajúcich aktív. Základným nástrojom, ako opísať takýto náhodný vývoj ceny aktíva, sú tzv. Markovove náhodné procesy. Spomedzi veľkej škály rôznych Markovových procesov sa pri odvodení Black–Scholesovej rovnice využije jeden špeciálny typ Markovovho procesu, ktorý je nazývaný Wienerov proces a jeho zovšeobecnenie - Brownov pohyb. Ukážeme si stochastickú diferenciálnu rovnicu, pomocou ktorej môžeme modelovať Wienerov proces a Brownov pohyb. Uvedieme si základný nástroj stochastickej analýzy - tzv. Itóovu lemu, ktorá nám bude prospešná pri ďalšom odvodení Black–Scholesovej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice. V tomto kroku sa budeme opierať

o niektoré ekonomické východiská, akými sú averzia investora k riziku a princíp nemožnosti existencie arbitráže pri obchodovaní s cennými papierami a aktívami. Na záver kapitoly budeme diskutovať rôzne opčné stratégie počnúc jednoduchými call a put opciami a kombinovanými stratégiami končiac.

## 2.1 Stochastické procesy

Stochastický proces je  $t$ -parametrický systém náhodných premenných  $\{X(t), t \in I\}$ , kde  $I$  je interval alebo diskretná množina indexov. *Markovov proces* je taký stochastický proces, pre ktorý platí, že ak je daná hodnota  $X(s)$ , tak budúce hodnoty  $X(t)$  pre  $t > s$  môžu závisieť iba od  $X(s)$ , nie však od predošlých hodnôt  $X(u)$  pre  $u < s$ . Predpokladanie markovovského charakteru stochastického vývoja cien akcií je v súlade s tzv. *slabou formou trhovej efektívnosti*, nakoľko jedine súčasné hodnoty cien akcií by mali slúžiť na vytváranie budúcich hodnôt.

### 2.1.1 Wienerov proces a geometrický Brownov pohyb

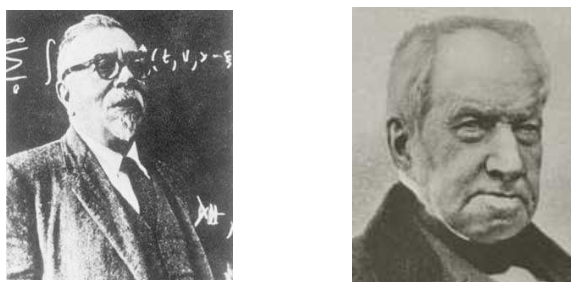
**Definícia 2.1.** *Brownov pohyb*  $\{X(t), t \geq 0\}$  je  $t$ -parametrický systém náhodných veličín, pričom

- i) všetky prírastky  $X(t + \Delta) - X(t)$  majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu\Delta$  a disperziou (alebo aj varianciou)  $\sigma^2\Delta$ ,
- ii) pre každé delenie  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$  sú prírastky  $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu i),
- iii)  $X(0) = 0$ .

*Brownov pohyb s parametrami  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$  nazývame Wienerov proces.*<sup>1</sup>

Pri štúdiu definície Brownovho pohybu vzniká prirodzená otázka, či jednotlivé vlastnosti sú od seba nezávislé a prečo stredná hodnota a disperzia prírastkov  $X(t + \Delta) - X(t)$  je proporcionálna práve  $\Delta$  a nie nejakej inej funkcii od  $\Delta$ . Pokúsime sa tieto otázky zodpovedať.

<sup>1</sup>Norbert Wiener, 1884-1964, matematik. Pracoval v matematickej analýze, teórii pravdepodobnosti. Pokladá sa zakladateľa vedného odboru kybernetiky.



Obr. 2.1: Norbert Wiener (1884-1964) a Robert Brown (1773-1858).

Uvažujme nejaké delenie intervalu  $[0, t]$ , t. j.  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ . Potom zrejme

$$X(t) - X(0) = \sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1},$$

a tým pádom stredné hodnoty a disperzie ľavej a pravej strany musia byť rovnaké. Pre strednú hodnotu výrazu  $X(t) - X(0)$  dostávame podľa definície, že platí

$$E(X(t) - X(0)) = \mu(t - 0) = \mu t.$$

Na druhej strane, stredná hodnota náhodnej premennej  $\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}$  je daná ako

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mu(t_i - t_{i-1}) = \mu t$$

a teda stredné hodnoty premenných  $X(t) - X(0)$  a  $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})$  sa rovnajú. Uvedomme si, že bez predpokladu, že každý prírastok  $X_i - X_{i-1}$  má strednú hodnotu práve  $\mu(t_i - t_{i-1})$  by sme tento výsledok neodvodili. Teraz sa zamerajme na disperzie premenných  $X(t) - X(0)$  a  $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})$ . Zrejme podľa definície

$$\text{Var}(X(t) - X(0)) = \sigma^2(t - 0) = \sigma^2 t.$$

Pripomeňme, že pre nezávislé náhodné premenné  $A, B$  platí:  $\text{Var}(A + B) = \text{Var}(A) + \text{Var}(B)$ . Keďže o prírastkoch  $X_i - X_{i-1}$  predpokladáme



ich nezávislosť pre rôzne  $i = 1, 2, \dots, n$ , platí

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1} \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sigma^2(t_i - t_{i-1}) = \sigma^2 t.$$

Opäť si uvedomme, že bez predpokladu, že každý prírastok  $X_i - X_{i-1}$  má disperziu práve  $\sigma^2(t_i - t_{i-1})$ , by horeuvedená rovnosť disperzií pre  $X(t) - X(0)$  a  $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})$  neplatila.

Z predchádzajúcej definície bezprostredne vyplýva, že ak  $\{w(t), t \geq 0\}$  je Wienerov proces, tak pre jeho štatistické parametre strednej hodnoty a disperzie platí:

$$E(w(t)) = 0, \quad \text{Var}(w(t)) = t. \quad (2.1)$$

Naviac, pre distribučnú funkciu rozdelenia pravdepodobnosti Wienerovho procesu platí:

$$P(w(t) < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2t} d\xi. \quad (2.2)$$

Praktická ukážka piatich numerických realizácií Wienerovho procesu je uvedená na obr. 2.3. Experimentálne numerické potvrdenie lineárnej závislosti (2.2) medzi varianciou  $\text{Var}(w(t))$  a časom  $t$  je uvedené na obr. 2.4.

Brownov pohyb  $\{X(t), t \geq 0\}$  s parametrami  $\mu$  a  $\sigma$  môžeme analyzovať aj z hľadiska jeho prírastkov  $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ . Pre ich strednú hodnotu a disperziu musí podľa i) platiť:  $E(dX(t)) = \mu dt$  a  $\text{Var}(dX(t)) = \sigma^2 dt = \sigma^2 \text{Var}(dw(t))$ . To ale znamená, že Brownov pohyb môžeme charakterizovať jeho deterministickou a fluktuálnou zložkou a prírastky  $dX(t)$  môžeme vyjadriť v tvare totálneho diferenciálu

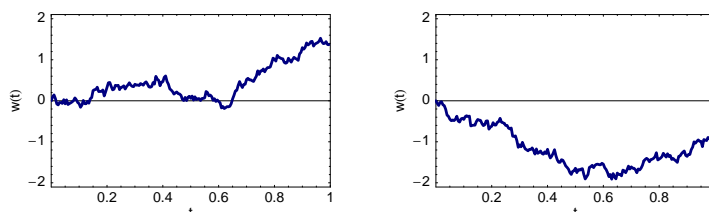
$$dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t), \quad (2.3)$$

kde  $\{w(t), t \geq 0\}$  je Wienerov proces. Rovnicu (2.3) nazývame *stochastická diferenciálna rovnica*.

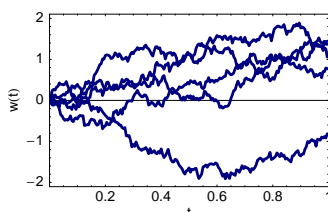
**Definícia 2.2.** Ak  $\{X(t), t \geq 0\}$  je Brownov pohyb s parametrami  $\mu, \sigma$  a  $y_0 \in \mathbb{R}^+$ , tak systém náhodných premenných  $\{Y(t), t \geq 0\}$

$$Y(t) = y_0 e^{X(t)}, \quad t \geq 0,$$

nazývame *geometrický Brownov pohyb*.



Obr. 2.2: Ukážka dvoch vybraných vzoriek Wienerovho procesu.



Obr. 2.3: Súhrnná ukážka piatich vybraných vzoriek Wienerovho procesu.

Geometrický Brownov pohyb je opäť Markovov proces a na základe znalosti rozdelenia pravdepodobnosti Wienerovho procesu (2.2) sa dajú odvodiť jeho základné štatistické parametre

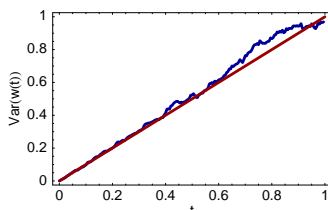
$$E(Y(t)) = y_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}, \quad \text{Var}(Y(t)) = y_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t} (e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (2.4)$$

Pre zjednodušenie odvodu charakteristík (2.4) nám stačí uvažovať prípad, keď  $y_0 = 1$ . Potom pre distribučnú funkciu  $G(y, t) = P(Y(t) < y)$  geometrického Brownovho pohybu  $Y(t)$  platí, že  $G(y, t) = 0$  pre  $y \leq 0$  (to je dôsledok kladnosti náhodnej premennej  $Y(t)$ ) a pre  $y > 0$  platí:

$$G(y, t) = P(Y(t) < y) = P\left(Z(t) < \frac{-\mu t + \ln y}{\sigma}\right),$$

kde  $Z(t)$  je náhodná premenná,  $Z(t) = (-\mu t + \ln Y(t))/\sigma$ . Zrejme  $dZ(t) = dw(t)$  a teda  $Z(t) = Z(0) + w(t) = w(t)$ , nakoľko  $Z(0) = 0$ . Teda  $Z(t)$  je vlastne Wienerov proces. Využívajúc poznatok o tvare distribučnej funkcie Wienerovho procesu (2.2), dostávame pre distribučnú funkciu  $G(y, t)$  náhodnej premennej  $Y(t)$  vzťah  $G(y, t) = 0$  pre  $y \leq 0$  a

$$G(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{-\mu t + \ln y}{\sigma}} e^{-\xi^2/2t} d\xi \quad \text{pre } y > 0.$$



Obr. 2.4: Časový vývoj disperzie Wienerovho procesu.

Keďže  $E(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y, t) dy$  a  $E(Y(t)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2g(y, t) dy$ , kde  $g(y, t) = \frac{\partial}{\partial y}G(y, t)$ , výpočtom týchto integrálov poľahky dostávame, že platí

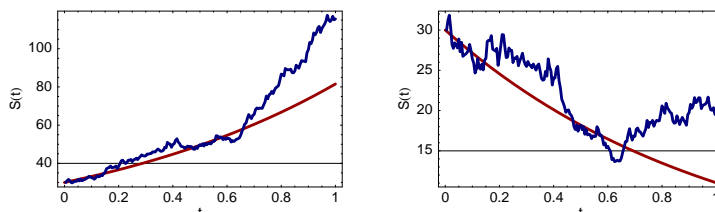
$$\begin{aligned}
 E(Y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} yg(y, t) dy = \int_0^{\infty} yg(y, t) dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} ye^{-\frac{(-\mu t + \ln y)^2}{2\sigma^2 t}} \frac{1}{\sigma y} dy \\
 &\quad (\xi = (-\mu t + \ln y)/(\sigma\sqrt{t})) \\
 &= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2} + \sigma\sqrt{t}\xi} d\xi = \frac{e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - \sigma\sqrt{t})^2}{2}} d\xi \\
 &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t}.
 \end{aligned}$$

Analogickým spôsobom dostaneme aj vzťah pre disperziu (2.4).

V ďalšom budeme hovoriť, že náhodná premenná  $\{Y(t), t \geq 0\}$  je lognormálne rozdelená s parametrami strednej hodnoty a disperzie danými podľa (2.4). Wienerov proces budeme označovať pomocou  $\{w(t), t \geq 0\}$  a jeho prírastky za krátky časový okamih  $dt$  označíme symbolom  $dw$ , t. j.  $dw(t) = w(t+dt) - w(t)$ . Na základe definície Wienerovho procesu sú pritom prírastky  $dw(t)$  navzájom nekorelované v čase  $t$ , ich stredná hodnota je nulová, t. j.  $E(dw(t)) = 0$  a pre disperziu platí  $Var(dw(t)) = dt$ . Voľne povedané, prírastky  $dw$  sa dajú písať

$$dw = \Phi\sqrt{dt}, \quad \text{kde } \Phi \approx N(0, 1),$$

t. j.  $\Phi$  je normálne rozdelená náhodná premenná.



Obr. 2.5: Ukážka dvoch vybraných vzoriek geometrického Brownovho pohybu s kladným driftom  $\mu > 0$  (vľavo) a záporným driftom  $\mu < 0$  (vpravo).

### 2.1.2 Itóova lema

Kľúčovú úlohu v teórii oceňovania derivátov zohráva analýza funkcií (derivátov), ktorých jedna premenná (aktívum) je náhodnou premennou spĺňajúcou nejakú stochastickú diferenciálnu rovnicu. Z tohto dôvodu sa v nasledovnom kroku zameriame na otázku, či je možné zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie  $f(x, t)$ , pričom premenná  $x$  je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice. Odpoveď na túto otázku nám dáva Itóova lema, ktorá je jedným z pilierov analýzy stochastických diferenciálnych rovníc. Itóova lema<sup>1</sup> je podľa Wikipédie „najsľávnejšou lemovú všetkých čias“.

**Lema 2.1** (Itóova lema). *Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde  $w$  je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie  $f$  je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw. \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Kijoši Itó, 1915-2008, matematik. Pracoval v oblasti teórie pravdepodobnosti a stochastických procesov. Dokázal jedno z najdôležitejších tvrdení stochastického diferenciálneho kalkulu - Itóovu lemu. Držiteľ prestížnej Gaussovej ceny z roku 2008.



Obr. 2.6: Kijosi Itô (1915–2008).

Intuitívny dôkaz Itóovej lemy sa dá previesť rozvinutím funkcie  $f = f(x, t)$  do Taylorovho radu stupňa 2. Skutočne

$$f(x + dx, t + dt) - f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) + \text{č.v.r.}$$

Teraz vďaka vlastnosti  $dw = \Phi \sqrt{dt}$ , kde  $\Phi \approx N(0, 1)$ , dostávame

$$(dx)^2 = \sigma^2 (dw)^2 + 2\mu\sigma dw dt + \mu^2 (dt)^2 \approx \sigma^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2).$$

Podobne výraz  $dx dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$ , a teda rozvoj diferenciálu  $df$  podľa prírastkov  $dt$  a  $dx$  sa dá napísať v tvare

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt.$$

Vzťah (2.5) potom už vyplýva z vyššie uvedeného vzťahu pre  $df$  dosadením výrazu  $dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$  pre diferenciál  $dx$ .

### 2.1.3 Itóova lema pre vektorové náhodné premenné

Predošlý postup odvodenia Itóovej lemy pre funkciu skalárneho argumentu  $x$  sa dá poľahky rozšíriť aj na prípad  $C^2$  hladkej funkcie  $f = f(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vektorového argumentu  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . O premenných  $x_i, i = 1, \dots, n$  budeme prepokladať, že vyhovujú sústave

stochastických diferenciálnych rovníc

$$dx_i = \mu_i(\vec{x}, t)dt + \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\vec{x}, t)dw_k,$$

kde  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  je vektor Wienerových procesov, ktoré majú navzájom nezávislé prírastky, t. j.

$$E(dw_i dw_j) = 0 \text{ pre } i \neq j, \quad E((dw_i)^2) = dt.$$

Vektorovo môžeme rovnice pre procesy  $x_i$  zapísať v tvare

$$d\vec{x} = \vec{\mu}(\vec{x}, t)dt + K(\vec{x}, t)d\vec{w},$$

kde  $K$  je  $n \times n$  matica

$$K(\vec{x}, t) = (\sigma_{ij}(\vec{x}, t))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Potom pre prírastok  $df$  hladkej funkcie  $f = f(\vec{x}, t)$  môžeme napísať rozvoj do Taylorovho radu stupňa 2. Dostávame

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \nabla_x f \cdot d\vec{x} \\ &+ \frac{1}{2} \left( (d\vec{x})^T \nabla_x^2 f d\vec{x} + 2\nabla_x f \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{x} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) + \text{č.v.r.}, \end{aligned}$$

kde  $\nabla_x f$ , resp.  $\nabla_x^2 f$  predstavujú gradient, resp. Hessovu maticu funkcie  $f$  vzhľadom na premenné  $x_1, \dots, x_n$ . Podobne ako v odvodení jednorozmerného variantu Itôovej lemy budú členy  $d\vec{x} dt$  a  $(dt)^2$  zanedbateľné oproti členu  $dt$ . Rozhodujúca teda bude opäť analýza výrazu  $(d\vec{x})^T \nabla_x^2 f d\vec{x} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ . Na základe predpokladu o nezávislosti prírastkov  $dw_i$  a  $dw_j$  pre  $i \neq j$  dostávame, že platí

$$\begin{aligned} dx_i dx_j &= \sum_{k,l=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} dw_k dw_l + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2) \\ &\approx \left( \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk} \right) dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2). \end{aligned}$$

To ale znamená, že rozvoj diferenciálu  $df$  podľa prírastkov  $dt, d\vec{x}$  sa dá napísať v tvare

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} K : \nabla_x^2 f K \right) dt + \nabla_x f d\vec{x}, \quad (2.6)$$

kde výraz  $K : \nabla_x^2 f K$  definujeme ako

$$K : \nabla_x^2 f K = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk}. \quad (2.7)$$

Vztáh (2.6) pre prvý diferenciál hladkej funkcie závislej od vektora stochastických procesov je obsahom Itóovej lemy pre funkcie vektorového argumentu. Tento výsledok zohráva dôležitú úlohu pri analýze viacfaktorových modelov oceňovania derivátov úrokovej miery.

### 2.1.4 Itóov integrál a izometria

Dôležitým technickým nástrojom v analýze stochastických procesov je tzv. Itóov integrál a izometria. Konštrukcia Itóovho integrálu je veľmi podobná definícii Riemann–Stieltesovmu integrálu funkcií reálnej premennej.

V prvom rade si uvedomme, že z definície Wienerovho procesu  $\{w(t), t \geq 0\}$  má náhodná premenná  $w(t)$  normálne rozdelenie so stredom nula a disperziou  $t$ , t. j.  $w(t) \sim N(0, t)$ . Túto rovnosť môžeme zapísať aj ako

$$\int_0^t dw(\tau) = w(t) - w(0) = w(t) \sim N(0, t).$$

To ale znamená, že pre konštantnú funkciu  $f(\tau) \equiv c$ , kde  $c$  je konštanta, platí

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) dw(\tau) &= c \int_0^t dw(\tau) = cw(t) - cw(0) \\ &= cw(t) \sim N(0, c^2 t) = N(0, \int_0^t f^2(\tau) d\tau). \end{aligned}$$

Táto identita nám poskytuje ideu, ako zaviesť tzv. Itóov integrál merateľnej funkcie  $f : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$  takej, že  $\int_0^t f^2(\tau) d\tau < \infty$ .

$$\int_0^t f(\tau) dw(\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)),$$

kde  $\nu = \max(\tau_{i+1} - \tau_i)$  je norma delenia  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t$  intervalu  $(0, t)$  a konvergencia sa chápe podľa pravdepodobnosti. Nech funkcia  $f$  je konštantná na každom intervale  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ . Potom pre strednú hodnotu konečnej sumy  $\sum_{i=1}^n f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i))$  zrejme platí

$$E \left( \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)) \right) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) E(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)) = 0,$$

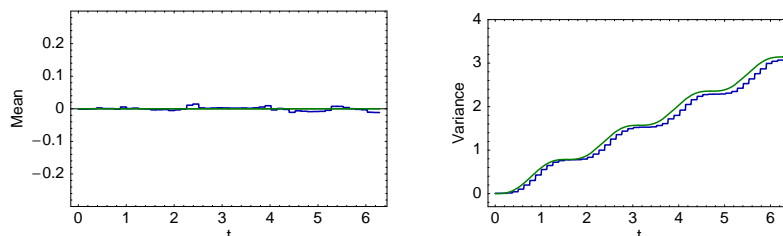
pretože prírastky  $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)$  sú normálne rozdelené náhodné premenné  $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i) \sim N(0, \tau_{i+1} - \tau_i)$ . Keďže tieto prírastky sú navyše aj nezávislé a  $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i) = \Phi_i \sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}$ , kde  $\Phi_i \sim N(0, 1)$ , tak pre disperziu súčtu nezávislých normálne rozdelených premenných napokon dostávame

$$\begin{aligned} E \left( \left[ \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)) \right]^2 \right) &= \sum_{i=1}^n f^2(\tau_i) E(\Phi_i^2)(\tau_{i+1} - \tau_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f^2(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i). \end{aligned}$$

Podobne ako pri zavedení pojmu Riemann–Stieltsovho integrálu teraz môžeme prejsť k limite pre normu delenia  $\nu$  idúcu k nule a postupnosti jednoduchých schodovitých funkcií konvergujúcich bodovo takmer všade k merateľnej funkcii  $f$ . Dostávame tak jeden z fundamentálnych výsledkov stochastického kalkulu pre Itóov integrál:

**Lema 2.2.** *Nech pre merateľnú funkciu  $f : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$  platí  $\int_0^t f^2(\tau) d\tau < \infty$ . Potom existuje Itóov integrál  $\int_0^t f(\tau) dw(\tau)$ , ktorý predstavuje normálne rozdelenú náhodnú premennú s rozdelením  $N(0, \sigma^2(t))$ , kde  $\sigma^2(t) = \int_0^t f(\tau)^2 d\tau$ .*





Obr. 2.7: Ukážka strednej hodnoty Itóovho integrálu  $\int_0^t f(\tau)dw(\tau)$  (vľavo) a jeho disperzie spolu s grafom  $\int_0^t f(\tau)^2d\tau$  (vpravo) pre funkciu  $f(\tau) = \sin(2\tau)$ . Počet delení intervalu je  $n = 100$ .

To znamená, že platia identity:

$$E \left( \int_0^t f(\tau)dw(\tau) \right) = 0,$$

$$E \left( \left[ \int_0^t f(\tau)dw(\tau) \right]^2 \right) = \int_0^t f(\tau)^2d\tau.$$

Posledná identita sa nazýva Itóova izometria.

Poznamenajme, že Itóova izometria platí nielen pre merateľné funkcie  $f$ , ale aj pre všeobecné stochastické procesy, ktoré majú vlastnosť spojitosti zľava a lokálnej konečnosti. Pre taký proces  $\{H_\tau, \tau \geq 0\}$  sa Itóov integrál opäť definuje ako limita (v zmysle konvergencie podľa pravdepodobnosti) konečných súm

$$\int_0^t H_\tau dw(\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} H_{\tau_i} (w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)).$$

Potom Itóova izometria má tvar (pozri Oksendal [50])

$$E \left( \left[ \int_0^t H_\tau dw(\tau) \right]^2 \right) = E \left( \int_0^t H_\tau^2 d\tau \right). \quad (2.8)$$

Ďalšie podrobnosti o kvalitatívnych ako aj kvantitatívnych vlastnostiach stochastických procesov sa čitateľ môže viac dozvedieť v knihách a prehľadových článkoch: Karatzas a Shreve [35], Papanicolaou [51], Hull [29], Wilmott, Dewynne a Howison [64], Melicherčík a kol. [47, 45, 46], Baxter a Rennie [7].

## 2.2 Black–Scholesova rovnica

V tejto časti odvodíme model oceňovania finančných derivátov, akými sú napríklad opcie. Matematické vyjadrenie tohto modelu je tzv. Black–Scholesova parciálna diferenciálna rovnica. Opisuje časový vývoj ceny derivátu akcie ako funkcie ceny akcie a času ostávajúceho do expirácie derivátu.

Odvodenie Black–Scholesovej diferenciálnej rovnice budeme sledovať na príklade európskej kúpnej opcie. Pripomeňme, že kúpna opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase  $t = T$  za vopred dohodnutú expiračnú cenu  $E$ . Zdôraznime, že daná strana získava právo, ale nie povinnosť kúpiť predmetnú akciu. Toto právo má teda samo osebe istú hodnotu, a preto zaň treba v čase uzavretia kontraktu  $t = 0$  zaplatiť istú, tzv. opčnú prémiiu  $V$ . Pre obe strany, t. j. pre vypisovateľa opcie ako i pre držiteľa opcie, je zaujímavé vedieť, aká je férová hodnota prémie tak, aby ani jedna zo strán nebola zvýhodnená. Označme

$S$  - hodnotu (cenu) aktíva,

$V$  - hodnotu derivátu (opcie) na dané aktívum,

$T$  - expiračnú dobu, t. j. termín vypršania derivátu.

Časovú premennú označíme  $t$  a teda  $t \in [0, T]$ . Úloha spočíva v nájdení matematickej rovnice, ktorá by opisovala vzťah pre funkciu ceny opcie  $V = V(S, t)$  ako funkcie aktuálnej ceny akcie  $S$  a času  $t$ . Opčná prémia predstavuje potom hodnotu  $V(S, 0)$  na počiatku uzatvárania kontraktu, t. j. v čase  $t = 0$ .

Odvodenie rovnice pozostáva z dvoch krokov. V prvom z nich určíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa ľubovoľná hladká funkcia  $V = V(S, t)$  od stochasticky meniacej sa ceny akcie  $S$  a času  $t$ . Funkciu  $V$  vo všeobecnosti hovoríme finančný derivát. V druhom kroku zostavíme tzv. samofinancujúce sa bezrizikové portfólio vhodnou kombináciou kúpy, resp. predaja akcií, opcií a bezrizikových dlhopisov.

### 2.2.1 Stochastická rovnica pre derivát stochastickej ceny akcie

Ako sme už spomenuli v predošlej kapitole, na modelovanie náhodného vývoja ceny akcie ako funkcie času  $S = S(t)$  použijeme stochastickú

diferenciálnu rovnicu reprezentujúcu geometrický Brownov pohyb

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad (2.9)$$

kde  $dS$  znamená zmenu ceny akcie za časový okamih  $dt$ ,  $\mu$  je očakávaný výnos alebo trend vývoja akcie,  $\sigma$  je volatilita časového vývoja akcie. Znakom  $dw$  sme označili diferenciál Wienerovho procesu. Poznamenajme, že stochastická rovnica (2.9) sa dá napísať aj v tvare

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw,$$

pričom z tohto zápisu je jasnejšie, že v časovej analýze je podstatnou informáciou iba relatívna zmena  $dS/S$  a nie absolútna zmena ceny aktíva  $dS$ . Dôvodom je ten fakt, že hľadaný model musí byť v konečnom dôsledku nezávislý od voľby jednotiek, teda výsledná oceňovacia formula musí mať rovnaký tvar nezávisle od toho, či cenu meriame v eurách alebo v ich stotinách, t. j. centoch.

V nasledovnom kroku odvodíme stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie (derivátu) ceny akcie a času. Ak funkcia  $V = V(S, t)$  je nejaká hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $S$  je sama osebe funkciou času  $S = S(t)$  a vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (2.9), tak sa pýtame: akú stochastickú rovnicu bude spĺňať funkcia  $V = V(S, t)$ ? Odpoveď na túto otázku nám dáva hlboký výsledok z teórie náhodných procesov – Itóova lema, ktorá bola uvedená v predošlej časti (lema 2.1). V našom prípade premenná  $S$  vyhovuje stochastickej rovnici (2.9), t. j.  $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ , a teda  $\mu(S, t) = \mu S$ ,  $\sigma(S, t) = \sigma S$ . Na základe Itóovej lemy cena derivátu akcie, teda funkcia  $V(S, t)$  náhodného procesu  $S$ , bude vyhovovať stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \quad (2.10)$$

## 2.2.2 Samofinancovaná stratégia tvorby portfólia s nulovým rastom investícií

V tomto kroku sa budeme zaoberať vytváraním portfólia pozostávajúceho z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Myšlienka samofinancovanej stratégie tvorby portfólia spočíva

v dynamickom predaji, resp. kúpe jednotlivých zložiek portfólia tak, že na udržanie jeho nulovej rizikovosti nie sú potrebné žiadne ďalšie investície (tzv. podmienka nulových investícií) a že nákup, resp. predaj niektorej zo zložiek portfólia je kompenzovaný predajom, resp. kúpou inej zložky portfólia (tzv. podmienka samofinancovanosti portfólia). Tento spôsob odvodenia Black–Scholesovej rovnice náleží Mertonovi a jeho odlišnosť od odvodenia Blacka a Scholesa spočíva práve v uvažovaní samofinancujúceho sa portfólia s nulovým rastom investícií. Poznamenajme, že predpoklad o snahe dosiahnuť bezrizikové portfólio, je základným pilierom odvodenia Black–Scholesovej rovnice. Tento predpoklad vychádza z predstavy o snahe investorov dosiahnuť rizikovo neutrálnu stratégiu obchodovania s cennými papiermi. Hoci dnes už vieme, že predpoklad o konštrukcii bezrizikového portfólia sa dá z praktického hľadiska spochybnit', napriek tomu ho budeme postupovať ako východisko pre odvodenie základného Black–Scholesovho modelu. V kapitole 5 sa napokon budeme zaoberať aj modifikáciami základného Black–Scholesovho modelu, ktoré budú zohľadňovať okrem iného realistejšie predstavy o bezrizikovosti portfólia, o obmedzenej likvidite trhu alebo o zahrnutí transakčných nákladov do modelu.

V nasledovnom kroku budeme vytvárať portfólio pozostávajúce z určitého množstva akcií, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Uvažovať budeme o tzv. samofinancujúcom sa portfóliu, t. j. o portfóliu, v ktorom sa nákup, resp. predaj jednej z uvedených troch zložiek musí uhradiť predajom, resp. nákupom inej zložky portfólia. Presnejšie, nech v čase  $t$  je portfólio zložené z  $Q_S$  kusov akcií v cene  $S$ ,  $Q_V$  kusov opcií v cene  $V$  a peňažného objemu  $B$  bezrizikových dlhopisov nevyplácajúcich kupóny. Ak si označíme  $M_S = SQ_S$ ,  $M_V = VQ_V$ , tak predpoklad nulových investícií znamená, že musí platiť  $M_S + M_V + B = 0$ , pre všetky časy  $t \in [0, T]$ , t. j.

$$SQ_S + VQ_V + B = 0, \quad (2.11)$$

pre  $t \in [0, T]$ . Mertonovu podmienku samofinancovanosti portfólia môžeme preto vyjadriť v tvare:

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0 \quad (2.12)$$

pričom  $dQ_S$ ,  $dQ_V$ ,  $\delta B$  označujú postupne zmeny počtov akcií, opcií a zmenu objemu bezrizikových dlhopisov držaných v portfóliu, ktoré sa použili na samofinancovanie nákupu, resp. predaja akcií a opcií. Pri-

pomeňme, že pre bezrizikové dlhopisy nevyplácajúce kupóny platí jednoduchá oceňovacia rovnica  $B(t) = B(0)e^{rt}$ , kde  $r > 0$  je spojitá miera úročenia dlhopisu. Táto rovnica sa v diferenciálnom tvare dá prepísať ako  $dB = rB dt$ . Zmena objemu dlhopisov by bola doteraz závislá iba na spojitom úročení istiny  $B(0)$ . Keďže však dlhopisy dynamicky používame aj na samofinancovanie portfólia prostredníctvom ich kúpy, resp. predaja v objeme  $\delta B$  (viď (2.12)), celková zmena peňažného objemu dlhopisov  $dB$  je potom daná vzťahom

$$dB = rB dt + \delta B. \quad (2.13)$$

Diferencovaním vzťahu (2.11), následne dosadením (2.13) do (2.12) a vyjadrením ceny  $B$  z rovnice (2.11) nakoniec dostaneme, že musí platiť

$$\begin{aligned} 0 &= d(SQ_S + VQ_V + B) \\ &= SdQ_S + VdQ_V + \delta B + Q_S dS + Q_V dV + rB dt \\ &= Q_S dS + Q_V dV - r(SQ_S + VQ_V) dt, \end{aligned}$$

a teda po vydelení nenulovou hodnotou  $Q_V$  počtu opcií v portfóliu napokon získavame

$$dV - rV dt - \Delta(dS - rS dt) = 0, \quad \text{kde } \Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}. \quad (2.14)$$

Pripomeňme, že oba náhodné procesy, t. j. cena akcie  $S$ , ako i cena opcie na akciu  $V$ , vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dw, \\ dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \end{aligned}$$

Dosadením týchto vzťahov pre diferenciály  $dS$  a  $dV$ , po úpravách dostávame

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV - \Delta \mu S + \Delta rS \right) dt \\ &+ \sigma S \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dw = 0. \end{aligned}$$

Cieľom investora je teraz skombinovať svoje portfólio pozostávajúce z akcií, opcií a dlhopisov tak, aby neutralizoval vystavenie svojho portfólia riziku. Takéto správanie sa investora sa označuje ako averzia investora k riziku. Zrejme jediný rizikový člen vo vyššie uvedenej rovnici

je reprezentovaný stochastickým členom  $dw$  Wienerovho náhodného procesu. Neutralizovanie vplyvu tohto stochastického, a tým pádom rizikového, člena sa dá výberom pomeru  $\Delta$

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (2.15)$$

Následným dosadením takéhoto výberu  $\Delta$  do deterministického zvyšku rovnice, dostávame výslednú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) dt = 0,$$

a teda

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (2.16)$$

ktorá je známa ako Black–Scholesova rovnica na oceňovanie derivátov akcií. Odvodenie tejto rovnice bolo prvýkrát uvedené v práci Blacka a Scholesa [8]. Veľmi dobrá referencia je aj novší článok Dewynne a kol. [15], kde sa čitateľ môže oboznámiť s rôznymi aspektami oceňovania nielen európskeho typu opcií, ale aj amerických opcií.

Uvedme ešte jedno užitočné zovšeobecnenie Black–Scholesovej rovnice pre prípad akcie, ktorá spojíte vypláca dividendy s ročnou dividendovou mierou  $D \geq 0$ . V tomto prípade držaním akcie v hodnote  $S$  získame za čas  $dt$  dividendový podiel  $DSdt$ . Vyplatením dividend však samotná cena akcie klesá, čo sa prejaví na zníženom trende ceny akcie. Teda cena akcie bude vyhovovať stochastickej rovnici

$$dS = (\mu - D)S dt + \sigma S dw.$$

Na druhej strane, získaním dividend dostávame nové prostriedky do nášho samofinancujúceho sa portfólia v celkovom objeme  $DSQ_S dt$  za čas  $dt$ . Túto sumu by sme mohli ako dodatočný príjem prirátat' do pravej strany rovnice pre zmenu objemu dlhopisov (2.13), t. j.  $dB = rB dt + \delta B + DSQ_S dt$ . Tento doplnok sa prejaví v modifikácii rovnice (2.14), ktorá nadobudne tvar

$$dV - rV dt - \Delta(dS - (r - D)S dt) = 0.$$

Opakovaním ďalšieho postupu nakoniec prideme k modifikovanej rovnici (2.16) zahrňujúcej dividendovú mieru  $D$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.17)$$



Obr. 2.8: M. S. Scholes a R. C. Merton - nositelia Ceny Švédskej banky za ekonómiu (Nobelova cena) v roku 1997.

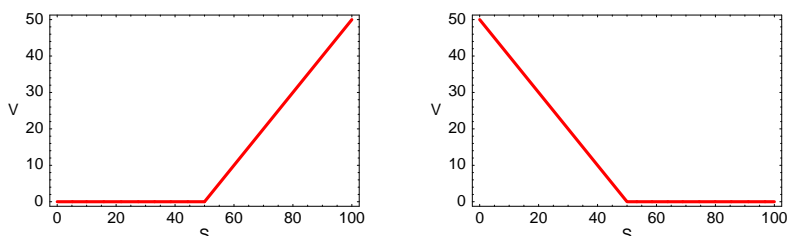
## 2.3 Terminálové podmienky

Pri odvodzovaní samotnej Black–Scholesovej rovnice sme nikde nevyužili predpoklad o tom, že derivát predstavuje kúpnu call opciu. V tejto časti ukážeme, že k samotnej Black–Scholesovej rovnici (2.16) musíme doplniť ďalšie podmienky, ktoré budú bližšie určovať, o aký typ derivátu sa jedná. Súhrnne im hovoríme terminálové pay-off (výplatné) podmienky, nakoľko sú to podmienky na tvar závislosti ceny derivátu od ceny akcie v čase expirácie  $T$ , t. j. v čase uplatnenia opcie.

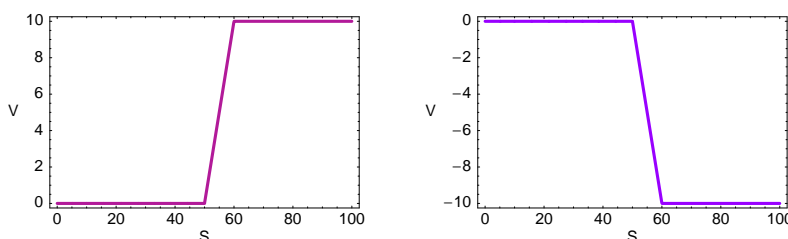
### 2.3.1 Pay-off diagram kúpnej call opcie

V prípade európskej kúpnej opcie sa k Black–Scholesovej rovnici (2.16) resp. jej dividendovej modifikácii (2.17), musí doplniť aj koncová podmienka na cenu opcie v čase expirácie  $T$ . Jej zmysel je v tom, že ak aktuálna cena  $S$  akcie v čase  $T$  prekročí hodnotu  $E$ , na ktorú bol uzavretý opčný kontrakt typu call, tak cena opčnej prémie (keby sa za ňu platilo v čase  $T$ ) je zrejme rozdiel medzi aktuálnou cenou  $S$  a dohodnutou cenou  $E$ , t. j.  $S - E$ . Tento záver plynie z predpokladu o neprípustnosti arbitrážnej príležitosti na trhu, t. j. možnosti bezrizikového zisku. Na druhej strane, pokiaľ aktuálna cena akcie neprekročí dohodnutú cenu  $E$ , tak opcia nemá žiadnu hodnotu, pretože ju vôbec neuplatníme. To znamená, že v čase  $t = T$  je vyčíslenie ceny opcie jednoduché a je dané ako funkcia (pozri obr. 2.9)

$$V(S, T) = \max(S - E, 0). \quad (2.18)$$



Obr. 2.9: Terminálové pay-off diagramy pre kúpnu call (vľavo) a put opciu (vpravo) s expiračnou cenou  $E = 50$ .



Obr. 2.10: Terminálové pay-off diagramy bullish (vľavo) a bearish (vpravo) spread stratégií pre expiračné ceny  $E_1 = 50$ ,  $E_2 = 60$ .

### 2.3.2 Pay-off diagram put opcie

Ak uvažujeme európsku put opciu, bude odvodenie koncovej podmienky na cenu opcie v čase expirácie  $T$  vychádzať z podobnej úvahy ako pre call opciu. V prípade, že aktuálna cena  $S$  akcie v čase  $T$  prekročí hodnotu  $E$ , na ktorú bol uzavretý opčný kontrakt typu put, tak cena opčnej prémie je nulová, nakoľko nebude mať zmysel uplatňovať si právo predať opciu za nižšiu expiračnú cenu  $E$  ako je reálna trhovú hodnotu akcie  $S$ . Na druhej strane, pokiaľ aktuálna cena akcie je menšia ako dohodnutá expiračná cena  $E$ , tak opcia má hodnotu, ktorej výška sa v čase expirácie  $t = T$  rovná rozdielu  $E - S$ . To znamená, že terminálový pay-off diagram put opcie je funkcia

$$V(S, T) = \max(E - S, 0). \quad (2.19)$$



### 2.3.3 Pay-off diagramy vybraných opčných stratégií

*Bullish spread* je kombináciou kúpy a predaja dvoch call opcií vypísaných na tú istú akciu, jedna s nižšou a druhá s vyššou expiračnou cenou,  $E_1 < E_2$ . Vyjadrenie pay-off diagramu je nasledovné:

$$V(S, T) = \max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0). \quad (2.20)$$

*Bearish spread* je, naopak, kombináciou predaja a kúpy dvoch call opcií vypísaných na tú istú akciu, jednej s nižšou a druhej s vyššou expiračnou cenou,  $E_1 < E_2$ . Vyjadrenie pay-off diagramu je nasledovné:

$$V(S, T) = -\max(S - E_1, 0) + \max(S - E_2, 0). \quad (2.21)$$

Stratégia *bullish spread* predstavuje stratégiu zameranú na očakávaný nárast ceny akcie, pričom sa dá v prípade jej skutočného nárastu dosiahnuť určitý zisk. Stratégia *bearish spread* naopak predstavuje stratégiu zameranú na očakávaný pokles ceny akcie. Z pay-off diagramov oboch stratégií typu *spread* vyplýva, že možnosť zisku ako aj straty je vždy obmedzená.

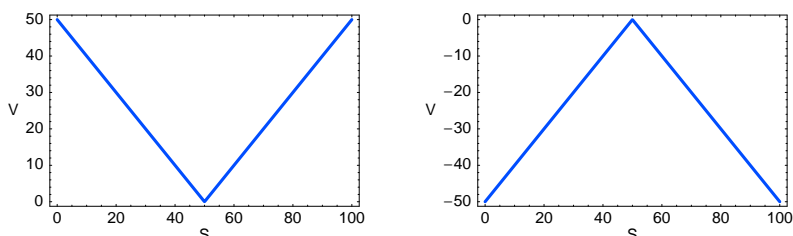
*Bought straddle* stratégia spočíva v kúpe jednej call opcie a jednej put opcie vypísaných na tú istú akciu, s rovnakými expiračnými cenami  $E$  a dobou splatnosti. Pomocou tejto stratégie môže investor limitovať straty v prípade, že cena akcie je v blízkom okolí expiračnej ceny. V opačnom prípade je možnosť zisku vysoká. Matematické vyjadrenie terminálovej podmienky v čase expirácie  $t = T$  je nasledovné:

$$V(S, T) = \max(S - E, 0) + \max(E - S, 0). \quad (2.22)$$

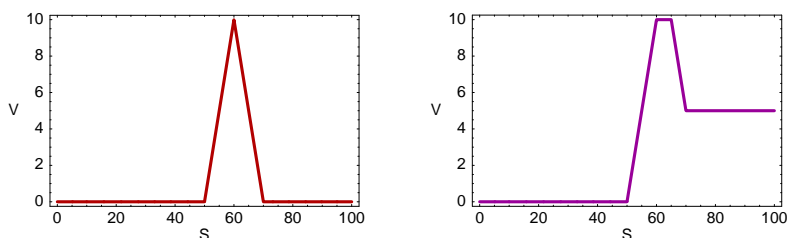
*Sold straddle* je kombináciou predaja jednej call opcie a jednej put opcie vypísaných na tú istú akciu, s rovnakými expiračnými cenami  $E$  a s rovnakou dobou splatnosti.

$$V(S, T) = -\max(S - E, 0) - \max(E - S, 0). \quad (2.23)$$

*Butterfly* je kombinovaná stratégia, ktorá pozostáva z kúpy dvoch call opcií, jednej s nízkou  $E_1$  a jednej s vysokou  $E_4$  expiračnou cenou, a predaja dvoch call opcií s rovnakými expiračnými cenami  $E_2 = E_3$ , pričom  $E_1 < E_2 = E_3 < E_4$ . Navyše by malo platiť, že  $E_1 + E_4 = E_2 + E_3 = 2E_2$ . Pripomíname, že všetky opcie sú vypísané na tú istú akciu a majú rovnakú dobu splatnosti. Stratégia *butterfly* je založená na



Obr. 2.11: Terminálové pay-off diagramy bought (vľavo) a sold (vpravo) straddle stratégií pre expiračnú cenu  $E = 50$ .



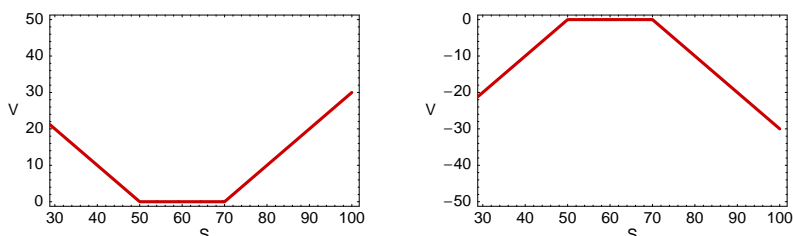
Obr. 2.12: Terminálové pay-off diagramy butterfly (vľavo) a condor (vpravo) spread stratégií pre expiračné ceny  $E_1 = 50, E_2 = E_3 = 60, E_4 = 70$  (butterfly), resp.  $E_1 = 50, E_2 = 60, E_3 = 65, E_4 = 70$  (condor).

investorovom predpoklade o stabilite ceny, teda bude zisková v prípade, že cena akcie bude v okolí hodnoty  $E_2 = E_3$ .

$$\begin{aligned}
 V(S, T) = & \max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0) \\
 & - \max(S - E_3, 0) + \max(S - E_4, 0). \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

*Condor* je stratégia podobajúca sa butterfly, s tým rozdielom, že expiračné ceny predaných call opcií sa nerovnajú,  $E_2 \neq E_3$ , t. j.  $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$ , pričom matematické vyjadrenie terminálovej podmienky je opäť dané vzorcom (2.24). Stratégia condor bude zisková pri očakávanom náraste ceny akcie, pričom maximálny zisk sa bude realizovať v prípade, že sa cena akcie bude pohybovať v intervale  $(E_2, E_3)$ .

*Bought strangle* je kombináciou kúpy jednej call a jednej put opcie, pričom call opcia je vypísaná na vysokú expiračnú cenu  $E_2$  a put opcia je



Obr. 2.13: Terminálové pay-off diagramy bought (vľavo) a sold (vpravo) strangle stratégií pre expiračné ceny  $E_1 = 50$ ,  $E_2 = 70$ .

na nízku expiračnú cenu  $E_1$ , pričom  $E_1 < E_2$ . Vyjadrenie terminálového pay-off diagramu je nasledovné:

$$V(S, T) = \max(S - E_2, 0) + \max(E_1 - S, 0). \quad (2.25)$$

*Sold strangle* je kombináciou predaja jednej call a jednej put opcie, pričom call opcia je vypísaná na vysokú expiračnú cenu  $E_2$  a put opcia je na nízku expiračnú cenu  $E_1$ , pričom  $E_1 < E_2$ . Maximálny zisk touto kombináciou dosiahneme, ak cena akcie bude v intervale  $(E_1, E_2)$ . Vyjadrenie terminálového pay-off diagramu je nasledovné:

$$V(S, T) = -\max(S - E_2, 0) - \max(E_1 - S, 0). \quad (2.26)$$

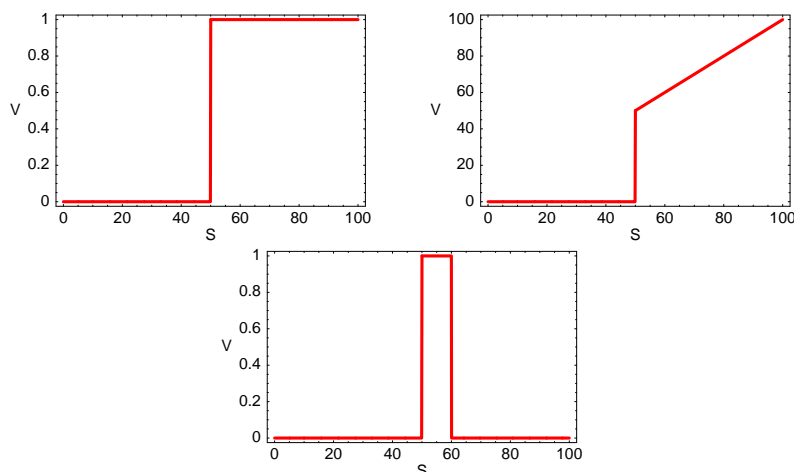
Na záver tohto stručného prehľadu najznámejších opčných stratégií uvedieme ešte tri jednoduché deriváty, ktoré spadajú do kategórie tzv. *binárnych opcií*.

*Cash-or-nothing* je typ opčnej „stávky“, pri ktorej majiteľ opcie získava pevný výnos (povedzme hodnotu 1), pokiaľ cena aktíva  $S$  presiahne expiračnú cenu  $E$ . To znamená, že vyjadrenie terminálového pay-off diagramu je nasledovné (pozri obr. 2.14):

$$V(S, T) = 1 \quad \text{ak } S \geq E, \quad V(S, T) = 0 \quad \text{ak } S < E. \quad (2.27)$$

*Asset-or-nothing* je typ opčnej „stávky“, pri ktorej majiteľ opcie získava hodnotu aktíva  $S$ , pokiaľ táto cena presiahne expiračnú cenu  $E$ . To znamená, že vyjadrenie terminálového pay-off diagramu je nasledovné (pozri obr. 2.14):

$$V(S, T) = S, \quad \text{ak } S \geq E, \quad V(S, T) = 0, \quad \text{ak } S < E. \quad (2.28)$$



Obr. 2.14: Terminálové pay-off diagramy Cash-or-nothing (vľavo) a Asset-or-nothing (vpravo) opčných stratégií pre expiračnú cenu  $E = 50$  a Digitálnej opcie (dole) s  $E_1 = 50$ .

*Digitálna* opcia je typ „stávky“, pri ktorej majiteľ opcie získava pevný výnos (povedzme 1), pokiaľ sa cena akcie  $S$  bude nachádzať v intervale  $(E_1, E_2)$ . To znamená, že vyjadrenie terminálového pay-off diagramu je nasledovné:

$$V(S, T) = 1, \quad \text{ak } S \in (E_1, E_2), \quad V(S, T) = 0 \quad \text{inak.} \quad (2.29)$$

O oceňovaní a význame rôznych opčných stratégií ako aj o ich praktickom použití sa čitateľ môže viac dozvedieť v knihách, učebných textoch a zápisoch z prednášiek: Hull [29], Wilmott, Dewynne a Howison [64], Melicherčík a kol. [47, 45, 46], Baxter a Rennie [7], Komorník a kol. [37] a Straka [55].

## 2.4 Okrajové podmienky pre cenu derivátov

Z pohľadu analýzy parciálnych diferenciálnych rovníc typu Black–Scholesovej rovnice je potrebné zadať počiatočné (resp. koncové) podmienky a podmienky na okraji zadávanej oblasti. Koncovými, tzv. terminálovými podmienkami sme sa zaoberali v predošlej časti. Cieľom tejto časti

je poukázat' na spôsob určenia okrajových podmienok pre základné typy opcií, akými sú kúpna call a put opcia na predaj.

### 2.4.1 Okrajové podmienky pre call a put opcie

Najprv odvodíme okrajové podmienky pre európsku kúpnu call opciu. Oblasť, na ktorej budeme uvažovať premennú  $S$  (cenu opcie), bude interval  $[0, \infty)$ . Podmienka na hodnotu ceny call opcie na ľavom okraji  $S = 0$  vychádza z jednoduchej úvahy, že opcia na akciu, ktorá práve dosiahla svoj default (krach firmy)  $S = 0$ , je nulová, t. j.  $V_{ec}(0, t) = 0$ . Na druhej strane, pre vysoké hodnoty ceny akcie  $S \rightarrow \infty$  sa cena opcie musí približovať hodnote  $S$ . Presnejšie, rozdiel ceny opcie  $V$  a ceny akcie  $S$  sa pre veľké hodnoty musí približovať záporne vzatej expiračnej cene  $E$  diskontovanej o úrokovú mieru  $r$ . To znamená, že okrajové podmienky pre európsku kúpnu call opciu nevyplácajúcu dividendy sa dajú vyjadriť nasledovne:

$$V_{ec}(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} V_{ec}(S, t) - S = -Ee^{-r(T-t)} \quad (2.30)$$

pre každé  $t \in (0, T)$ . V prípade, že akcia spojitě vypláca dividendy s mierou  $D \geq 0$ , okrajové podmienky majú tvar

$$V_{ec}(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} V_{ec}(S, t) - Se^{-D(T-t)} = -Ee^{-r(T-t)}, \quad (2.31)$$

pre každé  $t \in (0, T)$ , čo znamená, že cena opcie sa pre veľké hodnoty ceny akcie  $S$  približuje diskontovanej cene akcie  $Se^{-D(T-t)}$  zníženej o expiračnú cenu  $E$  diskontovanú úrokovou mierou  $r$

Okrajové podmienky pre európsku put opciu vychádzajú z podobných úvah ako pre call opciu. Pre veľké hodnoty ceny akcie stráca put opcia hodnotu, a preto  $V_{ep}(\infty, t) = 0$ . Na druhej strane, pre akciu v defaultovom stave  $S = 0$  je zrejme hodnota put opcie rovná expiračnej cene diskontovanej o úrokovú mieru bezrizikového dlhopisu, t. j.

$$V_{ep}(0, t) = Ee^{-r(T-t)}. \quad (2.32)$$

Súhrnne sa potom dajú okrajové podmienky pre put opciu vyjadriť nasledovne:

$$V_{ep}(0, t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} V_{ep}(S, t) = 0, \quad (2.33)$$

pre každé  $t \in (0, T)$ , bez ohľadu na to, či akcia vypláca alebo nevypláca dividendy.

### 2.4.2 Okrajové podmienky pre kombinované opčné stratégie

V prípade, že máme za úlohu určiť zodpovedajúce okrajové podmienky iných opčných stratégií ako sú jednoduché vanilla opcie (call resp. put), postupujeme tak, že si najprv terminálový pay-off diagram (pre expiračný čas  $t = T$ ) príslušnej stratégie rozložíme na lineárnu kombináciu call, resp. put opcií. Potom príslušné okrajové podmienky pre ostatné časy  $t \in (0, T)$  budú takou istou lineárnou kombináciou okrajových podmienok vytvárajúcich call a put opcií uvedených v predošlej časti.

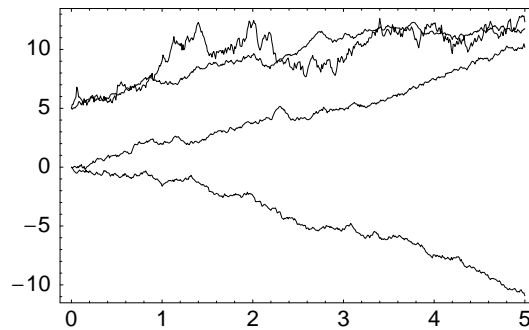
### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Podrobne odvodte vzorec pre disperziu geometrického Brownovho pohybu (2.4), t. j.

$$\text{Var}(Y(t)) = y_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

2. Podobne ako Brownov pohyb, aj geometrický Brownov pohyb môžeme rozložiť na jeho deterministickú a fluktuálnu zložku. Diferencovaním vzťahu  $Y(t) = y_0 e^{X(t)}$ , kde  $dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t)$  dostávame, že pre prírastky  $dY(t)$  platí  $dY = y_0 e^X dX = Y dX$ , a teda formálne dostávame, že by malo platiť  $dY(t) = \mu Y(t)dt + \sigma Y(t)dw(t)$ . Na druhej strane, aplikovaním Itóovej lemy na funkciu  $f(x) = e^x$  naopak dostávame, že proces  $Y$  vyhovuje stochastickej rovnici  $dY(t) = (\mu + \sigma^2/2)Y(t)dt + \sigma Y(t)dw(t)$ . Ktorá z uvedených foriem stochastickej rovnice pre  $Y$  je teda správna? Kde sme sa dopustili chyby?
3. Nech  $X$  je Brownov pohyb s parametrami  $\mu$  a  $\sigma$ , t. j.  $dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t)$ . Napíšte stochastickú rovnicu pre nasledovné funkcie od premennej  $X$  a času  $t$ :  $f(x, t) = x^2$ ;  $f(x, t) = e^{x+t}$ ;  $f(x, t) = \ln(1 + x^2)$ .
4. Predpokladajme, že sa cena akcie riadi geometrickým Brownovým pohybom s parametrami  $\mu = 0,3750$ ,  $\sigma^2 = 0,0669$  (odhady parametrov geometrického Brownovho pohybu z denných cien akcií firmy Google od 7. 2. 2007 do 7. 2. 2008). 14. 2. 2007 bola jej cena 459,1 USD.
  - Nájdite strednú hodnotu a zobrazte graf pravdepodobnostného rozdelenia ceny tejto akcie o štvrt' roka.
  - Aká je pravdepodobnosť, že o rok bude cena tejto akcie nižšia ako je súčasná?

- Aká je pravdepodobnosť, že o pol roka bude cena vyššia ako 600 USD?
5. Kontrakt medzi vypisovateľom opcie a kupujúcim opcie znie: Opcia oprávňuje majiteľa jej uplatnením kúpiť akciu za expiračnú cenu  $E_1$  v expiračnom čase  $T$ . V okamihu uplatnenia opcie však musí majiteľ opcie predať vypisovateľovi danú akciu za expiračnú cenu  $E_2$  pričom  $E_1 < E_2$ . Aký je pay-off diagram tejto stratégie v čase expirácie  $T$ ? Kto-rej známej stratégii sa podobá? Dá sa táto stratégia realizovať použitím vanilla opcií, t. j. call resp. put?
  6. Z Itóovej lemy vieme, že diferenciál procesu  $x(t) = \exp(w(t))$  nie je  $x(t)dw(t)$ . Nájdite funkciu  $x(t)$ , pre ktorú platí  $dx(t) = x(t)dw(t)$ .
  7. Nech cena akcie  $S$  spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu  $dS = \mu Sdt + \sigma Sdw$ . Nájdite stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa jej súčasná hodnota  $\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$ .
  8. Ako závisí cena európskej call, resp. put opcie na expiračnej cene? Je to závislosť rastúca alebo klesajúca?
  9. Označme  $c(S, E, \tau)$ ,  $p(S, E, \tau)$  cenu európskej call a put opcie s expiračnou cenou  $E$ , ak aktuálna cena akcie je  $S$  a do expirácie zostáva čas  $\tau$ . Bezriziková úroková miera je  $r$ . Pomocou konštrukcie vhodného portfólia a vylúčenia arbitráže dokážte nasledujúce vlastnosti:
    - (a)  $c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$  pre  $E_2 \geq E_1$ ,
    - (b)  $p(S, E_1, \tau) \leq p(S, E_2, \tau)$  pre  $E_1 \geq E_2$ ,
    - (c)  $S - e^{-r\tau} \leq c(S, E, \tau) \leq S$ ,
    - (d)  $(E_2 - E_1)e^{-r\tau} \leq c(S, E_1, \tau) - c(S, E_2, \tau)$  pre  $E_1 \geq E_2$ ,
    - (e)  $c(S, E, \tau)$  aj  $p(S, E, \tau)$  sú konvexné funkcie expiračnej ceny  $E$ .
  10. Priradte nasledovné procesy ich simuláciám na grafe obr. 2.15:
    - (a)  $x_1(t) = 5 + 2t + 3w(t)$ ,
    - (b)  $x_2(t) = -2t + w(t)$ ,
    - (c)  $x_3(t) = 5 + 2t + w(t)$ ,
    - (d)  $x_4(t) = 2t + w(t)$ .
  11. Nájdite rozdelenie nasledujúcich náhodných premenných:



Obr. 2.15: Simulácie náhodných procesov.

- (a)  $w(2)$ ,
  - (b)  $w(5) - w(3)$ ,
  - (c)  $x(t) = 1 + 2t + 3w(t)$ , kde  $t$  je ľubovoľné kladné číslo (t. j. rozdelenie hodnoty procesu  $x(t) = 2t + 3w(t)$  v čase  $t$ ),
  - (d)  $w(1) + w(2)$  (pozor,  $w(1)$  a  $w(2)$  nie sú nezávislé) ,
  - (e)  $\exp(t + 0,3w(t))$  kde  $t$  je ľubovoľné kladné číslo,
  - (f)  $\exp(0,05w(t))$  kde  $t$  je ľubovoľné kladné číslo.
12. Predpokladajme, že pre vývoj ceny akcie platí  $S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma w(t)}$ . Uvažujme cenu akcie o  $t$  rokov a pravdepodobnosť, že v tomto čase bude cena akcie menšia ako súčasná. Ako táto pravdepodobnosť závisí od času  $t$ ? (Intuitívne: Deterministická časť procesu je exponenciálny rast, takže táto pravdepodobnosť by sa mala znižovať. Na druhej strane, je tu dlhší čas na to, aby nastala nejaká výrazná odchýlka od trendu smerom nadol, spôsobená náhodnou časťou procesu. Čo preváži?)



---

## Kapitola 3

### *Európske typy derivátov*

---

Cieľom tejto kapitoly je analyzovať možnosti oceňovania európskych typov opcií. Základnou charakteristikou európskeho typu opčných kontraktov je vlastnosť, že k uplatneniu opcie môže dôjsť len v presne stanovenom čase expirácie  $t = T$ . Ukážeme, že pre takýto typ opčných kontraktov je možné odvodiť explicitný vzorec pre riešenie Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice na oceňovanie opcií. Najprv sa sústredíme na jednoduché *vanilla* opcie typu call, resp. put. Neskôr ukážeme, ako rozšíriť znalosti o oceňovaní call a put opcií aj na prípad kombinovaných opčných stratégií, ktoré sme skúmali v predošlej kapitole.

#### 3.1 Oceňovanie call a put opcií

Pripomeňme, že na základe odvodeného Black–Scholesovho modelu oceňovania derivátov má príslušná parciálna diferenciálna rovnica opi-

sujúca vývoj ceny opcie na danú akciu vyplácajúcu spojitú dividendu tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (3.1)$$

$$V(S, T) = \bar{V}(S), \quad S > 0, t \in [0, T].$$

Význam jednotlivých veličín je nasledovný:  $V = V(S, t)$  je cena opcie na akciu, pričom  $S > 0$  je súčasná cena akcie v čase  $t \in [0, T]$  a  $T > 0$  je čas vypršania (expirácie) opcie. Ďalšími parametrami úlohy sú:  $\sigma$  volatilita akcie, t. j. štandardná odchýlka časového vývoja ceny akcie,  $r$  je spojitá úroková miera bezrizikového dlhopisu nevyplácajúceho kupóny a  $D$  spojitá ročná miera dividendy vyplácanej akciou.

Nakoniec pripomeňme, že terminálová (koncová) podmienka  $\bar{V}(S) = V(S, T)$  v čase expirácie je v prípade európskej call opcie zadaná nasledovne:

$$\bar{V}(S) = \max(S - E, 0) = \begin{cases} S - E, & \text{pre } S \geq E \\ 0, & \text{pre } 0 < S < E, \end{cases}$$

kde  $E$  je expiračná cena, na ktorú je dohodnutý opčný obchod v čase  $T$ . V prípade, že sa jedná o put opciu, je terminálová podmienka vyjadrená ako:

$$\bar{V}(S) = \max(E - S, 0) = \begin{cases} E - S, & \text{pre } 0 < S \leq E \\ 0, & \text{pre } E < S. \end{cases}$$

Základná myšlienka riešenia rovnice (3.1) so zadanou koncovou podmienkou spočíva v istej postupnosti transformácií tejto parabolickej rovnice, ktorá sa po úpravách transformuje na základný tvar parabolickej rovnice  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ ,  $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times [0, T]$  so zadanou počiatočnou podmienkou.

1. krok - Zámena času. Spočíva v transformovaní času  $t \in [0, T]$  tak, aby plynul opačným smerom, t. j. od času expirácie  $T$  do počiatočného času  $t = 0$ . Zaveďme preto novú premennú  $\tau = T - t$  a položme

$$W(S, \tau) = V(S, T - \tau), \quad \text{teda } V(S, t) = W(S, T - t).$$

S využitím vzťahu  $dt = -d\tau$  sa rovnica (3.1) transformuje na tvar:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - (r - D)S \frac{\partial W}{\partial S} + rW = 0, \quad (3.2)$$

$$W(S, 0) = \bar{V}(S), \quad S > 0, \tau \in [0, T].$$

2. krok - *Logaritmická transformácia ceny akcie*. Spočíva v zavedení substitúcie  $S = e^x$ ,  $x = \ln S$  a zavedení novej funkcie

$$Z(x, \tau) = W(e^x, \tau), \quad \text{teda } W(S, \tau) = Z(\ln S, \tau).$$

Poznamenanajme, že  $S \in (0, \infty)$  práve vtedy, keď  $x \in (-\infty, \infty)$ . Viacnásobným použitím pravidla o derivovaní zloženej funkcie postupne dostávame:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = S \frac{\partial W}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + S \frac{\partial W}{\partial S} = S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Rovnicu (3.2) potom môžeme prepísať ako

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - r + D \right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0,$$

$$Z(x, 0) = \bar{V}(e^x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau \in [0, T].$$

3. krok - *Transformácia na základnú parabolickú PDR*  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ . Členov nižšieho rádu (podľa stupňa derivácie)  $Z$  a  $\frac{\partial Z}{\partial x}$  sa môžeme zbaviť prostredníctvom exponenciálnej transformácie:

$$u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau), \quad \text{t. j. } Z(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau),$$

kde konštanty  $\alpha, \beta$  budú určené neskôr. Zrejme platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= e^{-\alpha x - \beta \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right), \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= e^{-\alpha x - \beta \tau} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u \right), \\ \frac{\partial Z}{\partial \tau} &= e^{-\alpha x - \beta \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta u \right). \end{aligned}$$

Pre novú transformovanú funkciu  $u$  dostávame, že je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0,$$

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x),$$

kde pre koeficienty  $A, B$  platia vzťahy

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r + D, \quad \text{a} \quad B = (1 + \alpha)r - \beta - \alpha D - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}.$$

Jednoduchým výpočtom sa môžeme presvedčiť, že konštanty  $\alpha, \beta$  sa dajú určiť tak, aby výrazy  $A, B$  boli obidva súčasne nulové. Je to práve vtedy, keď

$$\alpha = \frac{r - D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r + D}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r - D)^2}{2\sigma^2}. \quad (3.3)$$

Táto voľba koeficientov  $\alpha, \beta$  nám teda zaručí, že výsledná rovnica pre funkciu  $u$  má nakoniec tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x), \quad -\infty < x < \infty, \tau \in [0, T].$$

4. krok - Aplikácia vzorca na výpočet riešenia. Rovnica (3.4) má na základe známych výsledkov o riešení parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc (pozri [58, Veta 4.1.1]) riešenie  $u(x, \tau)$ , ktoré sa dá napísať ako konvolúcia počiatočnej podmienky s Greenovou funkciou v tvare integrálu

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s, 0) ds.$$

Postupnosťou spätných transformácií  $u \mapsto Z \mapsto W \mapsto V$  nakoniec prideme k vzťahu

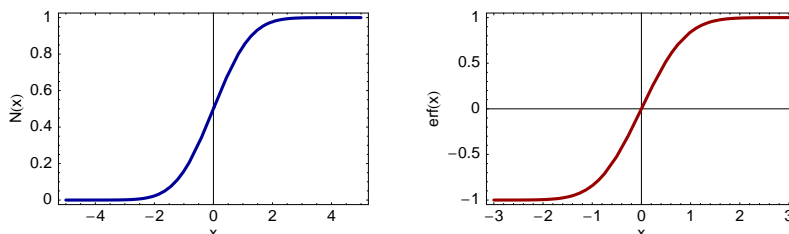
$$V(S, T - \tau) = e^{-\beta\tau} e^{-\alpha \ln S} u(\ln S, \tau),$$

a teda

$$V(S, T - \tau) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} S^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\ln S - s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\alpha s} \bar{V}(e^s) ds. \quad (3.5)$$

Pre európsky typ call opcie platí  $\bar{V}(S) = \max(S - E, 0)$ , a teda vzťah (3.5) sa dá ďalej zjednodušiť nasledovne

$$V(S, T - \tau) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} S^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\ln E}^{\infty} e^{-\frac{(\ln S - s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\alpha s} (e^s - E) ds.$$



Obr. 3.1: Graf kumulatívnej distribučnej funkcie  $N(x)$  a zvyškovej funkcie  $\text{erf}(x)$  normálneho rozdelenia.

Po zavedení substitúcie  $y = s - \ln S$  dostaneme

$$V(S, T - \tau) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ln \frac{S}{E}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2\tau}} (S e^{(1+\alpha)y} - E e^{\alpha y}) dy. \quad (3.6)$$

Praktická realizácia výpočtu podľa horeuvedeného vzorca však vyžaduje ďalšiu úpravu tak, aby sme cenu  $V$  vyjadrili pomocou známych a tabelovaných funkcií.

Pripomeňme, že kumulatívna distribučná funkcia  $N(x)$  a zvyšková funkcia  $\text{erf}(x)$  normálneho rozdelenia sú definované pomocou Eulerovho integrálu ako

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad \frac{1 - \text{erf}(x)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.7)$$

a spĺňajú vzťahy  $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$  a

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \text{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi = N(x).$$

Skúmajme teraz integrál

$$I_1 = \frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ln \frac{S}{E}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2\tau} + (1+\alpha)y} dy.$$

Zavedením transformácie  $\xi = \frac{y}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} - \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{2\sigma^2\tau}$  a využitím vzťahov (3.3) dostaneme

$$-\frac{y^2}{2\sigma^2\tau} + (1+\alpha)y = -\xi^2 + (1+\alpha)^2 \frac{\sigma^2\tau}{2} = -\xi^2 + (\beta - D)\tau$$

a teda

$$\begin{aligned}
 I_1 &= e^{-D\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{2\sigma^2\tau} - \frac{\ln \frac{S}{E}}{\sqrt{2\sigma^2\tau}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\
 &= \frac{e^{-D\tau}}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( -\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{2\sigma^2\tau} - \frac{\ln \frac{S}{E}}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} \right) \right] \\
 &= \frac{e^{-D\tau}}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-D + \frac{\sigma^2}{2})\tau + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Podobne sa vypočíta integrál

$$I_2 = \frac{e^{-\beta\tau}}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ln \frac{S}{E}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2\tau} + \alpha y} dy$$

zavedením transformácie  $\xi = \frac{y}{\sqrt{2\sigma^2\tau}} - \frac{\alpha}{2}\sqrt{2\sigma^2\tau}$ . Pomocou vzťahu  $\frac{\alpha^2}{2}\sigma^2 = \beta - r$  transformovaný integrál opäť zjednodušíme pomocou zvyškovej funkcie erf nasledovne

$$I_2 = \frac{e^{-r\tau}}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-D - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right].$$

Využijúc horeuvedené vzťahy pre integrály  $I_1$  a  $I_2$  môžeme vzorec (3.6) pre cenu opcie  $V(S, 0)$  napokon napísať v tvare

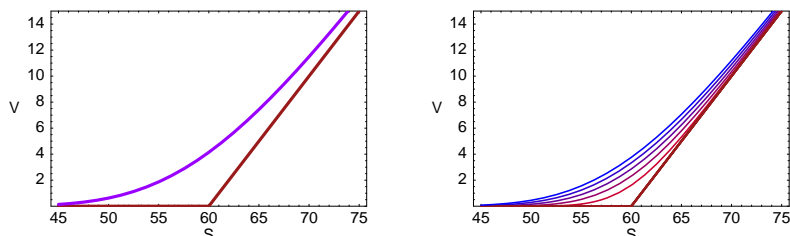
$$\begin{aligned}
 V(S, T - \tau) &= \frac{S e^{-D\tau}}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-D + \frac{\sigma^2}{2})\tau + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{E e^{-r\tau}}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-D - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Využijúc vzťahy medzi funkciami  $N(x)$  a  $\operatorname{erf}(x)$  nakoniec dostávame

$$V(S, t) = S e^{-D(T-t)} N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (3.8)$$

kde

$$d_1 = \frac{(r-D + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (3.9)$$



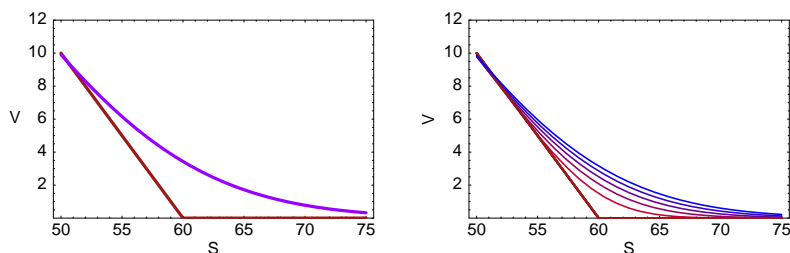
Obr. 3.2: Graf riešenia oceňovania call opcie  $V(S, 0)$  a koncová podmienka opcie  $V(S, T)$  (vľavo). Priebeh riešení  $V(S, t)$  v niekoľkých vybraných časoch  $T - t$  do expirácie je na obrázku vpravo. Parametre boli zvolené nasledovne:  $E = 60$ ;  $\sigma = 0,29$ ;  $r = 0,04$ ;  $D = 0$ ;  $T = 0,3$ .

Formula (3.8) sa nazýva Black–Scholesova formula pre oceňovanie európskej call opcie. Všetky konštanty a parametre vystupujúce vo vzorci by mali byť vopred známe. Štandardný príklad na výpočet ceny opcie je nasledovný:

**Príklad.** Súčasná cena akcie firmy IBM nevyplácajúcej dividendy je  $S = 58,5$  USD. Historická volatilita cien akcie je  $\sigma = 29\%$ , t. j.  $\sigma = 0,29$ . Ročná úroková miera bezkupónových dlhopisov predstavuje  $r = 4\%$ , t. j.  $r = 0,04$ . Uzatvárame opčný obchod typu call na expiračnú cenu akcie  $E = 60$  USD v expiračnej dobe opcie  $T = 0,3$  roku. Dosadením týchto veličín do Black–Scholesovho vzorca dostávame, že cena opcie  $V = V(58,5, 0)$  je 3,348 USD. Obrázky (3.2) a (3.3) zobrazujú vypočítané ceny call a put opcií  $V(S, 0)$  ako funkcie ceny akcie  $S$  firmy IBM.

### 3.2 Oceňovanie put opcií prostredníctvom call opcií a forwardov, put–call parita

Postup odvodenia vzorca riešenia európskej call opcie z predošlej časti by sa dal poľahky upraviť aj na prípad oceňovania európskej put opcie. Elegantnejším východiskom pre odvodenie vzorca oceňovania európskej put opcie je tzv. put–call parita. Hlavná myšlienka je jednoduchá. Predstavme si, že v našom portfóliu budeme držať jednu call opciu (tzv. long pozícia) a súčasne budeme dlhovať (vypíšeme) jednu put opciu (tzv. short pozícia). To znamená, že naša kombinovaná opčná



Obr. 3.3: Graf riešenia oceňovania put opcie  $V(S, 0)$  a jej koncová podmienka opcie  $V(S, T)$  (vľavo). Priebeh riešení  $V(S, t)$  v niekoľkých vybraných časoch  $T - t$  do expirácie je na obrázku vpravo. Parametre boli zvolené nasledovne:  $E = 60$ ;  $\sigma = 0,29$ ;  $r = 0,04$ ;  $D = 0$ ;  $T = 0,3$ .

stratégia (označená ako  $V_f$ ) bude mať terminálový pay-off diagram  $V_f(S, T) = V_{ec}(S, T) - V_{ep}(S, T)$ , a teda

$$V_f(S, T) = \max(S - E, 0) - \max(E - S, 0) = S - E. \quad (3.10)$$

Vďaka vlastnosti linearity Black-Scholesovej rovnice dostávame, že rozdiel riešení je opäť riešením (a to jednoznačne určeným), a preto derivát  $V_f$  v každom čase  $t \in (0, T)$  bude spĺňať vzťah

$$V_f(S, t) = V_{ec}(S, t) - V_{ep}(S, t).$$

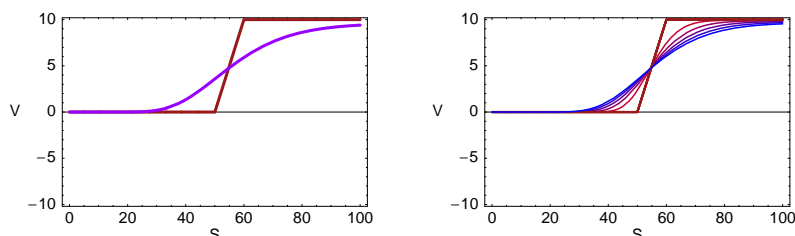
Na druhej strane si uvedomme, že ocenenie derivátu s pay-off diagramom  $V_f(S, T) = S - E$  je jednoduché. Vlastne sa jedná o forward s expiračnou cenou  $E$ , teda právo a súčasne povinnosť kúpiť aktívum za expiračnú cenu  $E$  v expiračnom čase  $T$ . Preto jeho cena je rozdielom ceny akcie  $S$  diskontovanej o vyplácanú dividendovú mieru  $D$ , a expiračnej ceny diskontovanej o úrokovú mieru  $r$ , t. j.

$$V_f(S, t) = Se^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}. \quad (3.11)$$

Tento vzťah sa dá nahliadnuť aj rýdzo matematicky. Dosadením do Black-Scholesovej rovnice sa ľahko vidí, že funkcia  $V_f(S, t)$  je jej riešením, ktoré spĺňa terminálovú podmienku  $V_f(S, T) = S - E$ . Keďže  $V_f = V_{ec} - V_{ep}$ , dostávame nakoniec vzťah medzi európskou call a put opciou v tvare

$$V_{ec}(S, t) - V_{ep}(S, t) = Se^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}, \quad (3.12)$$





Obr. 3.4: Graf riešenia oceňovania opčnej stratégie typu bullish spread. Parametre výpočtu boli zvolené nasledovne:  $E_1 = 50$ ;  $E_2 = 60$ ;  $\sigma = 0,29$ ;  $r = 0,04$ ;  $D = 0$ ;  $T = 0,3$ .

ktorý sa označuje ako put–call parita. Z tohto vzťahu potom už bezprostredne plynie, že európsky put sa dá vyjadriť vzorcom

$$V_{ep}(S, t) = V_{ec}(S, t) - Se^{-D(T-t)} + Ee^{-r(T-t)}, \quad (3.13)$$

ktorý sa dá ďalej upraviť pomocou jednoduchých vlastností kumulatívnej distribučnej funkcie normálneho rozdelenia

$$N(-d) = 1 - N(d)$$

na tvar

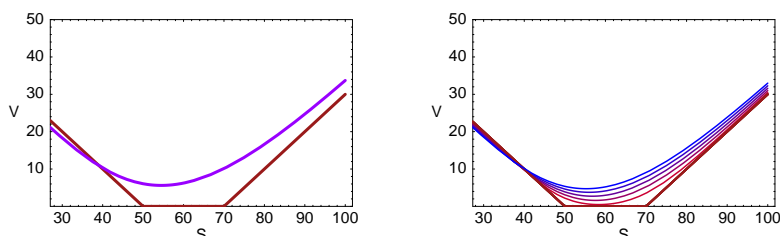
$$V_{ep}(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-D(T-t)}N(-d_1), \quad (3.14)$$

kde koeficienty  $d_1, d_2$  sú dané vzťahom (3.9).

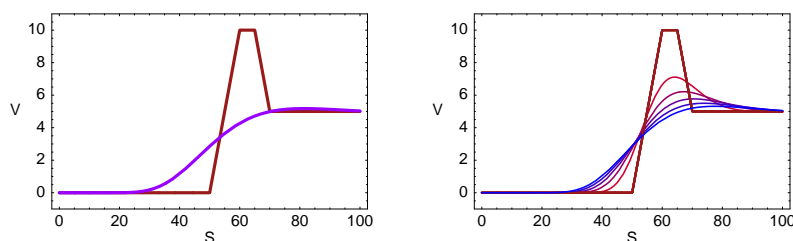
Na koniec tejto časti poznamenajme, že zo vzťahov (3.9) pre koeficienty  $d_1, d_2$  a vzorcov oceňovania call a put opcie plynie zaujímavá symetria medzi európskou call a put opciou. Skutočne, ak si označíme  $V_{ec}(S, t; E, r, D)$  a  $V_{ep}(S, t; E, r, D)$ , riešenia dané vzorcami (3.8) resp. (3.14), tak potom platí vzťah

$$V_{ep}(S, t; E, r, D) = V_{ec}(E, t; S, D, r), \quad (3.15)$$

ktorý sa dá verbálne vysvetliť ako transformácia call na put opciu pri zámene  $S \leftrightarrow E$  aktuálnej ceny  $S$  na expiračnú cenu  $E$  a súčasnej výmene úlohy  $r \leftrightarrow D$  úrokovej sadzby  $r$  a diskontnej miery  $D$ . Tento vzťah je dôsledkom oceňovacích vzorcov (3.8) resp. (3.14) a transformácie  $d_1 \leftrightarrow -d_2$  pri zámene  $S \leftrightarrow E$  a  $r \leftrightarrow D$ .



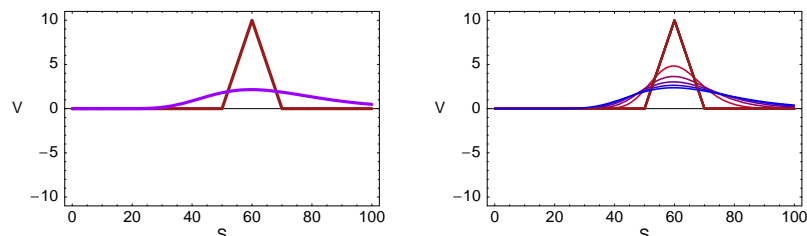
Obr. 3.5: Graf riešenia oceňovania opčnej stratégie typu bought strangle. Parametre boli zvolené nasledovne:  $E_1 = 50$ ;  $E_2 = 70$ ;  $\sigma = 0,29$ ;  $r = 0,04$ ;  $D = 0$ ;  $T = 1$ .



Obr. 3.6: Graf riešenia oceňovania opčnej stratégie typu condor. Parametre boli zvolené nasledovne:  $E_1 = 50$ ;  $E_2 = 60$ ;  $E_3 = 65$ ;  $E_4 = 70$ ;  $\sigma = 0,29$ ;  $r = 0,04$ ;  $D = 0$ ;  $T = 0,3$ .

### 3.3 Oceňovanie vybraných opčných stratégií

Cieľom tejto časti je zobrazit' grafický priebeh riešenia niekoľkých opčných stratégií. Konkrétne sa budeme zaoberat' stratégiami typu bullish spread, bought strangle, condor a butterfly. Pripomeňme, že vďaka linearity Black–Scholesovej rovnice je možná superpozícia riešení, a preto oceňovacie vzorce pre kombinované opčné stratégie, ktorých terminálové pay-off diagramy sú lineárnou kombináciou call, resp. put opcí, budú tou istou lineárnou kombináciou príslušných funkcií vyjadrených vzorcami (3.8), resp. (3.14). Pravdaže s uvažovaním príslušných expiračných cien. Graf výsledného riešenia  $V(S, 0)$  a koncová podmienka opcie  $V(S, T)$  je na obrázkoch vľavo a časový priebeh riešenia  $V(S, t)$  v niekoľkých vybraných časoch  $t$  do expirácie je zobrazený na obrázkoch obr. 3.4–3.7 vpravo.



Obr. 3.7: Graf riešenia oceňovania opčnej stratégie typu butterfly pre parametre:  $E_1 = 50; E_2 = E_3 = 60; E_4 = 70; \sigma = 0,29; r = 0,04; D = 0; T = 0,3$ .

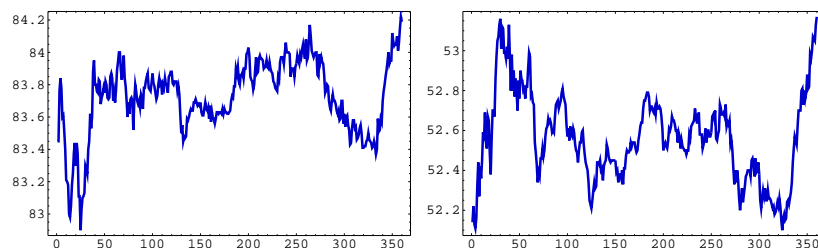
### 3.4 Porovnanie teoretických výsledkov oceňovania s reálnymi trhovými dátami

V tejto časti si ukážeme, ako je možné prakticky porovnať dosiahnuté teoretické výsledky o oceňovaní opcií. Ako vzorky sme vybrali ceny akcií a opcií firiem IBM a Microsoft. Na ich príklade ukážeme, že pomocou znalosti ceny samotnej akcie, parametrov  $r$  (úroková miera dlhopisu) a  $\sigma$  (volatilita cien akcií) budeme vedieť oceniť hodnotu call (resp. put) opcie so známou expiračnou cenou  $E$  a expiračným časom  $T$ .

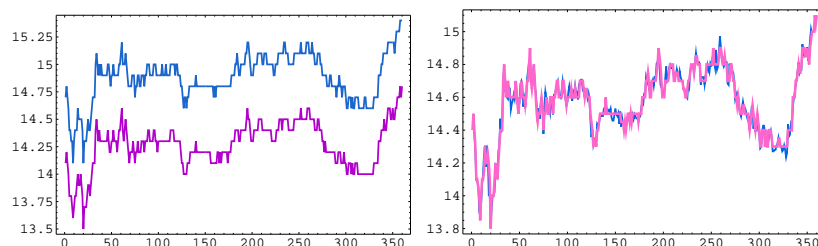
Na obrázku 3.8 je zachytený stochastický priebeh vývoja ceny akcie firmy IBM zo dňa 22. 5. 2002. Horizontálna os zachytáva jednotlivé minúty obchodovania v danom dni. Na obrázku vľavo dole je priebeh bid (ponuka na kúpu) a ask (ponuka na predaj) cien call opcií s expiráciou 2. 6. 2002. Na pravom dolnom obrázku je porovnanie vypočítanej ceny a strednej hodnoty medzi bid a ask cenou opcie. Výpočet teoretickej hodnoty call opcie sme realizovali pre parametre:

- úroková miera dlhopisu  $r = 5\%$ ,
- expiračná cena  $E = 70$ ,
- expiračná doba  $T = 11$  dní,
- historická volatilita  $\sigma = 41\%$ .

O akciách sme uvažovali, že nevyplácajú dividendy. Porovnanie reálnych a trhových dát v prípade firmy Microsoft je znázornené na obr. 3.10. Pre túto firmu sme výpočet realizovali pre trhovú parametre:



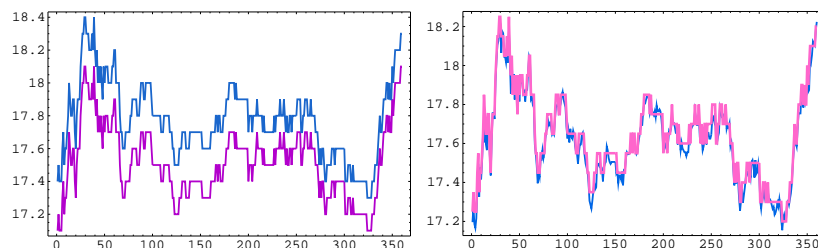
Obr. 3.8: Minútový priebeh vývoja cien akcií firiem IBM (vľavo) a Microsoft (vpravo) zo dňa 22. 5. 2002.



Obr. 3.9: Príklad porovnania teoretického výpočtu ceny call opcie firmy IBM s trhovými dátami. Vývoj bid a ask cien opcií (vľavo) a porovnanie strednej hodnoty s vypočítanou hodnotou (vpravo).

- úroková miera dlhopisu  $r = 5\%$ ,
- expiračná cena  $E = 35$ ,
- expiračná doba  $T = 11$  dní,
- historická volatilita  $\sigma = 61\%$ .

Ako sa môže čitateľ presvedčiť na základe analýzy výsledkov, je vcelku dobre viditeľná zhoda teoretickej hodnoty ceny call opcie a trhovej hodnoty. Treba však zdôrazniť, že citlivým miestom výpočtu bola voľba volatility ceny akcie. Táto volatilita musela byť vybraná oveľa väčšia, ako ju indikovali historické dáta vývoja cien akcií príslušných firiem. Bližšie sa tomuto problému budeme venovať v nasledovných kapitolách. Súvisí to predovšetkým s fenoménom tzv. implikovanej volatility.



Obr. 3.10: Príklad porovnania teoretického výpočtu ceny call opcie firmy Microsoft s trhovými dátami. Vývoj bid a ask cien opcií (vľavo) a porovnanie strednej hodnoty s vypočítanou hodnotou (vpravo).

### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Vypočítajte hodnotu stratégie bought straddle, ktorá spočíva v kúpe jednej call opcie a jednej put opcie vypísaných na tú istú akciu, s rovnakými expiračnými cenami  $E$  a dobou splatnosti ak uvažujeme európske typy opcií. Výpočet ceny stratégie realizujte pre známe trhové dáta: cena akcie neplatiacej dividendy je  $S = 55$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,4$ , úrok bezrizikového dlhopisu  $r = 0,1$ , expiračná doba splatnosti je 3 mesiace (t. j.  $T = 0,25$  roku), expiračná cena je  $E = 50$ .
2. Ako závisí cena európskej call opcie na úrokovej miere dlhopisu? Zobrazte graf závislosti ceny call opcie na úrokovej miere, pričom je známe, že cena akcie neplatiacej dividendy je  $S = 115$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,3$ , expiračná doba splatnosti je 6 mesiacov a expiračná cena je  $E = 110$ .
3. Kontrakt medzi vypisovateľom opcie a kupujúcim opcie znie: Opcia oprávňuje majiteľa jej uplatnením kúpiť akciu za expiračnú cenu  $E_1$  v expiračnom čase  $T$ . V okamihu uplatnenia opcie však musí majiteľ opcie predať vypisovateľovi danú akciu za expiračnú cenu  $E_2$ , pričom  $E_1 < E_2$ . Vypočítajte hodnotu stratégie pre známe trhové dáta: cena akcie neplatiacej dividendy je  $S = 65$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,5$ , úrok bezrizikového dlhopisu  $r = 0,06$ , expiračná doba splatnosti je 6 mesiacov (t. j.  $T = 0,5$  roka), expiračné ceny sú  $E_1 = 50$ ,  $E_2 = 60$ .
4. Vypočítajte hodnotu stratégie bullish spread, t. j. kúpa call opcie s nízkou expiračnou cenou  $E_1$  a predaj call opcie s vyššou expiračnou cenou  $E_2$  s tou istou dobou splatnosti, ak uvažujeme európske typy opcií. Výpočet ceny stratégie realizujte pre známe trhové dáta: cena akcie neplatiacej dividendy je  $S = 55$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,4$ , úrok bezrizikového dlhopisu

$r = 0,1$ , expiračná doba splatnosti je 3 mesiace (t. j.  $T = 0,25$  roka), expiračné ceny sú  $E_1 = 50$ ,  $E_2 = 60$ .

5. Vypočítajte hodnotu stratégie bought straddle, t. j. kúpa call a put opcie s expiračnou cenou  $E$ . Výpočet ceny stratégie realizujte pre známe trhové dáta: cena akcie vyplácajúcej dividendy je  $S = 55$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,4$ , úrok bezrizikového dlhopisu  $r = 0,05$ , miera spojitě vyplácaných dividend je  $D = 0,03$ , expiračná doba splatnosti opcií je 3 mesiace (t. j.  $T = 0,25$  roka), expiračná cena  $E = 60$ .
6. Ako závisí cena európskej put opcie od volatility  $\sigma$  ceny akcie? Nájdiť vzťah pre faktor Vega, t. j. deriváciu európskej put opcie podľa volatility. Je to závislosť rastúca alebo klesajúca? Aká je limita ceny Európskej put pre hodnoty volatility blížiac sa k nule?
7. Dokážte, že graf európskej call opcie na akciu vyplácajúcu spojitě dividendy vždy pretne pay-off diagram pre dostatočne veľké hodnoty ceny akcie, t. j.  $V_{ec}(S, t) < S - E$  pre  $S$  dostatočne veľké. Ako je to v prípade európskej put opcie platiacej resp. neplatiacej dividendy a jej vzťahu k pay-off diagramu put opcie?

---

## Kapitola 4

### *Kvalitatívna analýza rizika*

---

Cieľom tejto kapitoly je študovať rôzne faktory citlivosti finančných derivátov. Pomocou týchto faktorov sme schopní hlbšie analyzovať trh finančných derivátov. V prvej časti sa sústreďíme na odhad volatility stochastického procesu pre vývoj ceny samotného podkladového aktíva. Rozoberieme metódu výpočtu tzv. historickej volatility a na praktických trhových dátach určíme jej hodnoty. Ďalej sa zameriame na zavedenie nového pojmu, tzv. implikovanej volatility získanej kalibráciou cien opcií na trhovú dáta. Napokon priblížime rozhodujúce faktory citlivosti cien opcií na zmeny parametrov. Tieto faktory (často slangovo označované podľa gréckeho alfabetu aj ako *greeks*) nám poskytujú komplexnejší obraz o správaní sa cien derivátov a ich závislosti na parametroch modelu.

## 4.1 Historická volatilita akcií

V tejto časti sa zameriame na získanie odhadu parametra volatility  $\sigma$  charakterizujúceho veľkosť náhodných fluktuácií cien podkladového aktíva - akcie. Tento odhad vypočítaný na základe známych historických trhových cien podkladového aktíva je známy pod pojmom historická volatilita.

Predpokladajme, že cena akcie  $S = S_t$  sleduje geometrický Brownov pohyb s driftom  $\mu$  a volatilitou  $\sigma$ , t. j.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw. \quad (4.1)$$

Na základe Itóovej lemy vieme, že stochastický proces  $X_t = \ln S_t$  je Brownov pohyb s driftom  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  a volatilitou  $\sigma$ , t. j.

$$dX = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dw.$$

Náš cieľ je určiť odhad pre parameter historickej volatility  $\sigma$  stochastického procesu (4.1). Predpokladajme, že na danom časovom intervale  $[0, T]$  sú známe historické hodnoty cien aktíva  $S_{t_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , v časových okamihoch  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , pričom časové intervaly sú ekvidistantné, t. j.  $t_{i+1} - t_i = \tau$  pre každé  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Potom pre diferencie  $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$  dostávame

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau + \sigma (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}).$$

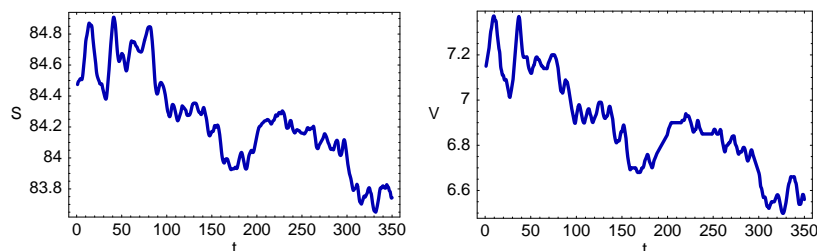
Keďže  $X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \ln(S_{t_{i+1}}/S_{t_i})$  a pre prírastky Wienerovho procesu  $w_t$  platí  $w_{t_{i+1}} - w_{t_i} = \Phi \sqrt{\tau}$ , kde  $\Phi \sim N(0, 1)$  je normalizovaná normálne rozdelená náhodná premenná, tak potom disperzia náhodného vektora nezávislých výnosov  $\{\ln(S_{t_{i+1}}/S_{t_i}), i = 0, 1, \dots, n - 1\}$  je nevychýleným odhadom pre parameter  $\sigma^2 \tau$ . Teda odhad historickej volatility  $\sigma_{hist}$  môže byť vyjadrený vzťahom

$$\sigma_{hist}^2 = \frac{1}{\tau} \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(S_{t_{i+1}}/S_{t_i}) - \gamma)^2, \quad (4.2)$$

kde  $\gamma$  je odhad strednej hodnoty náhodného vektora výnosov, t. j.

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(S_{t_{i+1}}/S_{t_i}).$$





Obr. 4.1: Minútový priebeh ceny akcie firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002 (vľavo) a priebeh jej call opcie na expiračnú cenu  $E = 80$  s expiráciou 2. 7. 2002, t. j.  $T - t = 43/365$  roku (vpravo).

Nakoniec poznamenajme, že hodnota parametra volatility  $\sigma$  je závislá od zvolenej časovej škály. Ak napríklad vyjadrujeme všetky časové údaje (tým pádom aj časový rozdiel  $\tau$ ) v jednotkách rokov, tak získaný odhad historickej volatility je tiež vyjadrený na ročnej báze, t. j. v percentách *per annum* (p.a.).

Na obr. 4.1 je vľavo znázornený priebeh ceny akcie firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002. V prvej časti je priebeh call opcie vypísanej na túto akciu s expiráciou 2. 7. 2007 a expiračnou cenou  $E = 80$ . Časový rad cien akcie i opcie je zachytený na minútovej báze, t. j. časový interval je  $\tau = 1/(24 \times 60 \times 365)$  roka. Dáta boli vyhladené pomocou klzavého spriemerovania údajov za päťminútový časový interval. Prostredníctvom vzorca (4.2) bola historická volatilita odhadnutá ako  $\sigma_{hist} = 0,2306$  p.a.

Vo zvyšnej časti tohto odseku pripomenieme vzorce oceňovania európskych call a put opcií. Navyiac, ukážeme niektoré užitočné matematické vlastnosti, ktoré nám v ďalšom pomôžu študovať ceny derivátov z pohľadu analýzy ich citlivosti na zmeny rôznych parametrov.

Pripomeňme, že na základe výsledkov odvodzovania explicitných vzorcov pre európske call a put opcie sú ich ceny  $V^{ec}$  a  $V^{ep}$  dané vzorcami (3.8) a (3.14), teda

$$V^{ec}(S, t) = Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (4.3)$$

$$V^{ep}(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-D(T-t)}N(-d_1), \quad (4.4)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (4.5)$$

Vzhľadom na to, že ceny európskej call i put opcie závisia nielen na aktuálnej cene akcie  $S$  a čase  $t$ , ale aj na parametroch Black–Scholesovho modelu  $E, T, r, D, \sigma$ , môžeme písať

$$\begin{aligned} V^{ec}(S, t) &= V^{ec}(S, t; E, T, r, D, \sigma), \\ V^{ep}(S, t) &= V^{ep}(S, t; E, T, r, D, \sigma). \end{aligned}$$

V nasledovných riadkoch odvodíme jednu dôležitú identitu, ktorú neskôr viackrát použijeme pri odvodzovaní vzťahov pre parciálne derivácie ceny opcie vzhľadom na cenu akcie, resp. vzhľadom na niektorý z parametrov.

Začnime s určením rozdielu  $(d_1^2 - d_2^2)/2$ . Keďže platí  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ , tak potom dostávame

$$\begin{aligned} \frac{d_1^2 - d_2^2}{2} &= \frac{(d_1 + d_2)(d_1 - d_2)}{2} = \frac{2 \ln \frac{S}{E} + 2(r - D)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \\ &= \ln \frac{S}{E} + (r - D)(T - t), \end{aligned}$$

a teda

$$\frac{d_1^2}{2} = \frac{d_2^2}{2} + \ln \frac{S}{E} + (r - D)(T - t).$$

Pre deriváciu kumulatívnej distribučnej funkcie  $N'(d)$  normálneho rozdelenia platí

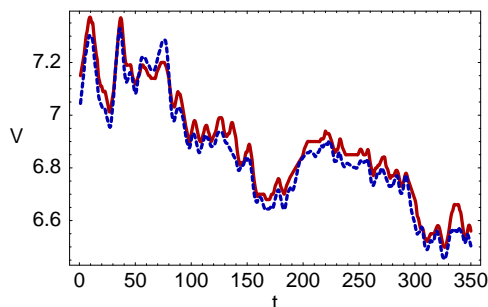
$$N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-d^2/2).$$

Využitím predchádzajúceho vzťahu pre rozdiel  $(d_1^2 - d_2^2)/2$  napokon po krátkej úprave dostávame dôležitú identitu:

$$S e^{-D(T-t)} N'(d_1) - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0. \quad (4.6)$$

## 4.2 Implikovaná volatilita

Na obr. 4.2 je znázornené porovnanie reálnych trhových cien call opcií a cien vypočítaných pomocou vzorca (4.3) pre oceňovanie európskej call opcie, pričom parameter volatility  $\sigma$  bol určený ako historická volatilita cien podkladového aktíva - akcie firmy IBM. Z obrázka je zrejme podcenenie trhovej hodnoty ceny opcie výpočtom jej teoretickej hodnoty



Obr. 4.2: Porovnanie minútového priebehu vypočítanej ceny európskej call opcie  $V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{hist})$  (prerušovaná čiara) a reálnej ceny  $V_{real}(t)$  (plná čiara), kde  $\sigma_{hist} = 0,2306$ .

(prerušovaná čiara) oproti reálnej trhovej hodnote (plná čiara). Vzhľadom na to, že cena opcie je rastúcou funkciou volatility  $\sigma$  to ale znamená, že hodnota historickej volatility  $\sigma_{hist}$  je nízka na to, aby teoretická cena európskej call opcie  $V^{ec}$  mohla zachytiť trhové ceny opcií. Toto pozorovanie nás privádza k zavedeniu pojmu tzv. implikovanej volatility.

Implikovaná volatilita  $\sigma_{impl} > 0$  je taká hodnota parametra volatility, pre ktorú teoretická cena európskej call (put) opcie  $V(S, t; \sigma)$  je v danom čase  $t$  a pre danú hodnotu ceny aktíva  $S = S_{real}(t)$  zhodná s reálnou hodnotou ceny opcie  $V_{real}(t)$ . To znamená, že úloha nájsť implikovanú volatilitu  $\sigma_{impl}$  pre danú opciu (s danou splatnosťou  $T$  a expiračnou cenou  $E$ ) spočíva v riešení implicitnej rovnice

$$V_{real}(t) = V(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}). \quad (4.7)$$

V nasledovnom texte sa zamyslíme nad otázkou existencie implikovanej volatility  $\sigma_{impl} > 0$ , ktorá vyhovuje rovnici (4.7). V prvom kroku ukážeme, že cena call alebo put opcie je rastúca funkcia v závislosti od volatility  $\sigma$ . Toto je intuitívne zrejмый fakt, keďže so zvyšujúcou sa volatilitou akcie stúpa úloha, a tým prirodzene aj cena zaistovacieho inštrumentu, akým je call alebo put opcia. Analyticky túto vlastnosť dokážeme tak, že derivujeme funkciu  $V^{ec}$ , resp.  $V^{ep}$  podľa parametra  $\sigma$

a ukážeme, že táto derivácia je kladná. Zo vzťahu (4.3) dostávame

$$\begin{aligned}\frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} &= Se^{-D(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= \left(Se^{-D(T-t)}N'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \\ &\quad + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t},\end{aligned}$$

pretože  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ . Podľa (4.6) je však výraz  $Se^{-D(T-t)}N'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)$  identicky rovný nule, a teda platí:

$$\frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}.$$

Pre európsku put opciu dostávame analogickým postupom vyjadrenie

$$\frac{\partial V^{ep}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(-d_2)\sqrt{T-t}.$$

Keďže  $N'(-d_2) = N'(d_2) = \exp(-d_2^2/2)/\sqrt{2\pi}$ , tak potom platí

$$\frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}. \quad (4.8)$$

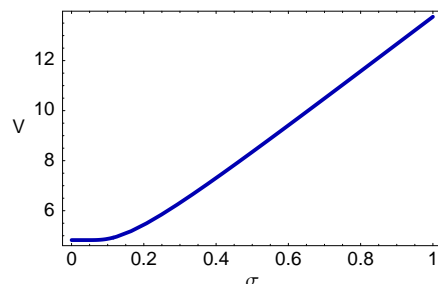
Poznamenajme, že tento vzťah pre put opciu poľahky vyplýva aj z put-call parity. To ale znamená, že  $\frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial \sigma} > 0$ , a teda cena európskej call i put opcie je rastúcou funkciou vzhľadom na parameter volatility  $\sigma > 0$ . Graf závislosti ceny opcie od volatility pre parametre  $E = 80$ ,  $r = 0,04$ ,  $D = 0$  a čas do expirácie  $T - t = 43/365$  roku je znázornený na obr. 4.3.

V druhom kroku určíme interval pre cenu opcie, v ktorom budeme mať zaručenú existenciu riešenia  $\sigma_{impl}$  rovnice (4.7). Východiskom pre určenie takéhoto intervalu bude výpočet limity ceny opcie pre  $\sigma \rightarrow 0$  a  $\sigma \rightarrow \infty$ . Zrejme platí

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} d_2 = \begin{cases} -\infty & \text{pre } \ln(S/E) + (r-D)(T-t) < 0, \\ +\infty & \text{pre } \ln(S/E) + (r-D)(T-t) > 0. \end{cases}$$

Vzhľadom na to, že pre distribučnú funkciu  $N$  platí  $N(-\infty) = 0$ ,  $N(+\infty) = 1$ , tak potom dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma \rightarrow 0} V^{ec}(S, t; \sigma) &= \max(Se^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}, 0), \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} V^{ep}(S, t; \sigma) &= \max(Ee^{-r(T-t)} - Se^{-D(T-t)}, 0).\end{aligned} \quad (4.9)$$



Obr. 4.3: Priebeh ceny európskej call opcie v závislosti od volatility  $\sigma$  pre parametre  $E = 80, S = 84,45, r = 0,04, D = 0, T - t = 43/365$ .

Na druhej strane  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_1 = +\infty, \lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_2 = -\infty$ , a teda

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} V^{ec}(S, t; \sigma) &= S e^{-D(T-t)}, \\ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} V^{ep}(S, t; \sigma) &= E e^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ak využijeme už dokázaný poznatok, že cena opcie je rastúca funkcia od volatility  $\sigma$ , tak sme ukázali nasledovné tvrdenie:

**Veta 4.1.** Ak reálna cena európskej call opcie  $V_{real}^{ec}$  splňa nerovnosti:

$$\max(S_{real} e^{-D(T-t)} - E e^{-r(T-t)}, 0) < V_{real}^{ec} < S_{real} e^{-D(T-t)},$$

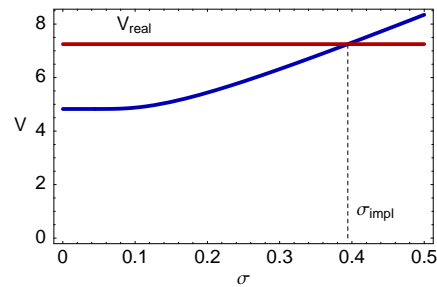
kde  $S_{real}$  je reálna cena akcie, tak potom existuje jediná implikovaná volatilita  $\sigma_{impl}^{ec} > 0$  taká, že  $V_{real}^{ec} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{impl}^{ec})$ .

Ak reálna cena európskej put opcie  $V_{real}^{ep}$  splňa nerovnosti:

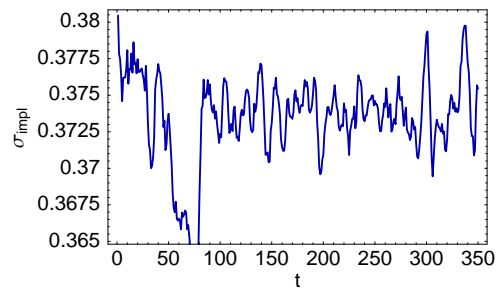
$$\max(E e^{-r(T-t)} - S_{real} e^{-D(T-t)}, 0) < V_{real}^{ep} < E e^{-r(T-t)},$$

tak potom existuje jediná  $\sigma_{impl}^{ep} > 0$  taká, že  $V_{real}^{ep} = V^{ep}(S_{real}, t; \sigma_{impl}^{ep})$ .

Uvedomme si, že predpoklad na interval hodnôt, v ktorom sa môže pohybovať reálna cena opcie, nie je veľmi reštriktívny. Pre call opciu je horná medza  $S_{real} e^{-D(T-t)}$  väčšia ako hodnota terminálovej podmienky pay-off diagramu  $\max(S - E, 0)$  call opcie, v blízkosti ktorého je možné očakávať cenu call opcie. Analogická úvaha sa dá previesť v prípade intervalového obmedzenia na put opciu.



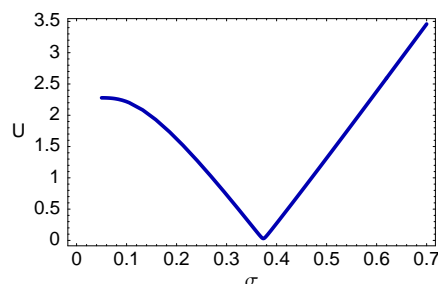
Obr. 4.4: Grafické znázornenie riešenia rovnice  $V_{real} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{impl})$  pre trhové hodnoty ceny akcie  $S_{real} = 84,45$  a call opcie  $V_{real} = 7,25$  a parametre  $E = 80, r = 0,04, D = 0, T - t = 43/365$ .



Obr. 4.5: Minútový priebeh implikovanej volatility  $\sigma_{impl}$  pre opciu firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002. Stredná hodnota  $\bar{\sigma}_{impl} = 0,3733$  p.a.

Príklad grafického riešenia rovnice  $V_{real} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{impl})$  pre prípad určovania implikovanej volatility call opcie na akciu firmy IBM je znázornený na obr. 4.4.

Iný spôsob výpočtu implikovanej volatility môže byť založený na uvažovaní dlhšieho časového intervalu hodnôt opcií. V takom prípade už nie je možné očakávať, že sa podarí nájsť jednu spoločnú hodnotu implikovanej volatility. Môžeme však hľadať implikovanú volatilitu pomocou minimalizácie súčtu kvadrátov odchýliek reálnych cien opcií a teoreticky získaných cien opcií. Táto myšlienka nás vedie na úlohu



Obr. 4.6: Priebeh funkcie  $U = U(\sigma)$  pre call opciu firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002. Hodnota parametra  $\sigma$ , v ktorom funkcia  $U$  nadobúda minimum, je  $\sigma_{impl} = 0,3734$  p.a.

minimalizovať funkciu  $U : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  definovanú predpisom:

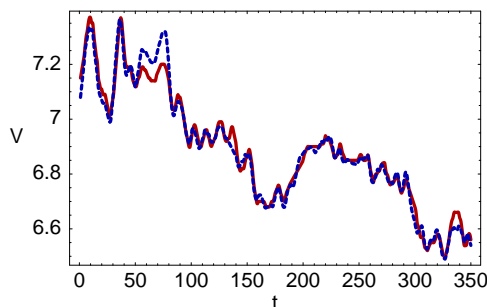
$$U(\sigma) = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |V_{real}(t_i) - V(S_{real}(t_i), t_i; \sigma)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde  $V(S, t; \sigma)$  je cena európskej call (put) opcie,  $S_{real}(t)$  je reálna trhová cena akcie v čase  $t$  a  $V_{real}(t)$  je reálna trhová cena call (put) opcie v čase  $t$ . Parameter  $\sigma$  zodpovedá volatilitie stochastického procesu ceny akcie. Argument minima tejto funkcie mozeme potom považovať za odhad implikovanej volatility ziskany na základe časového radu cien opcií a akcií, t. j.

$$\sigma_{impl} = \arg \min_{\sigma > 0} U(\sigma).$$

Poznamenajme, že v prípade  $m = 1$  sa nulové minimum funkcie  $U$  nadobúda práve v hodnote implikovanej volatility  $\sigma_{impl} > 0$  zodpovedajúcej riešeniu rovnice (4.7) v danom čase  $t$ .

Na obr. 4.7 vidíme výsledok pouzitia parametra volatility  $\sigma$  ziskaneho na základe implikovanej volatility  $\sigma_{impl} = 0,3733$ , ktorá bola určena minimalizaciu funkcie  $U$  na celom uvazovanom časovom intervale 360 minút, t. j.  $m = 360$ . Oproti dosiahnutému výsledku pri pouziti historickej volatility na obr. 4.2 je zreteľné, že pri pouziti implikovanej volatility je zhoda medzi teoretickými a reálnymi trhovými dátami lepšia.



Obr. 4.7: Porovnanie minútového priebehu vypočítanej ceny európskej call opcie  $V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl})$  (prerušovaná čiara) a reálnej ceny  $V_{real}(t)$  (plná čiara), kde  $\sigma_{impl} = 0,3733$  p.a.

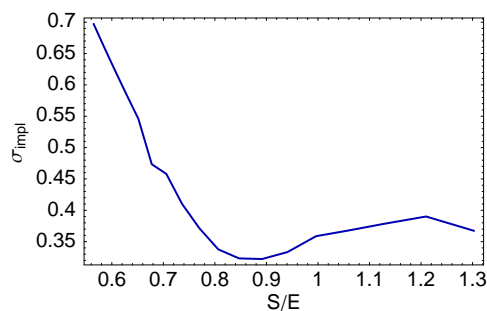
### 4.3 Volatility smile

V krátkosti sa zmienime o zaujímavom fenoméne, ktorý je úzko spätý s pojmom implikovanej volatility. V danom časovom okamihu máme síce k dispozícii len jednu aktuálnu hodnotu ceny aktíva, ale viacero cien opcií (s rovnakou splatnosťou) vypísaných na rôzne expiračné ceny. Ku každej takejto opcii môžeme spočítať hodnotu implikovanej volatility. Ukazuje sa, že táto hodnota nemusí byť rovnaká pre opcie s rôznymi expiračnými cenami. V praxi často nájdeme príklady, keď závislosť implikovanej volatility od hodnoty pomeru  $S/E$  ceny akcie a expiračnej ceny je konvexná funkcia v okolí  $S/E \approx 1$ . Na obr. 4.8 vidíme praktickú ukážku tohto javu pre priebeh závislosti implikovanej volatility od pomeru  $S/E$  pre call opcie firmy IBM dňa 21. 5. 2002 so splatnosťou 2. 7. 2002 a expiračnými cenami  $E = 65, 70, 75, \dots, 150$ . V okolí pomeru  $S/E \approx 1$  je globálne minimum implikovanej volatility a priebeh v okolí minima je konvexný. Slangové označenie *volatility smile* pochádza z tvaru grafu funkcie implikovanej volatility, ktorý pripomína úsmev (smile) v okolí  $S/E \approx 1$ .

### 4.4 Delta opcie

Základným faktorom citlivosti, ktorý vyhodnocujeme pri analyzovaní trhových dát, je závislosť zmeny ceny derivátu - opcie na zmene ceny





Obr. 4.8: Volatility smile implikovanej volatility pre opcie firmy IBM dňa 21. 5. 2002 so splatnosťou 2. 7. 2002.

podkladového aktíva - akcie. V infinitezimálnom vyjadrení sa teda tento faktor dá vyjadriť ako:

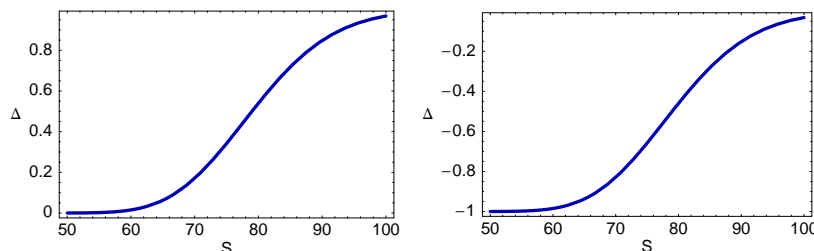
$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (4.11)$$

Význam faktora  $\Delta$  spočíva najmä v jeho úzkom prepojení na konštrukciu bezrizikového portfólia zloženého z  $Q_S$  kusov danej akcie v jednotkovej cene  $S$ ,  $Q_V$  kusov opcií v jednotkovej cene  $V$  vypísaných na danú akciu a obnosu bezrizikových dlhopisov. Pri odvodzovaní Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice sme eliminovaním stochastickej časti v konštruovanom portfóliu dospeli k podmienke (2.14) na pomer medzi počtom akcií a opcií držaných v portfóliu, t. j.

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta.$$

To znamená, že faktor citlivosti  $\Delta$  nám napovedá, aký pomer medzi akciami a opciami vedie ku konštrukcii rizikovo neutrálneho portfólia. Napríklad, ak faktor  $\Delta$  pre call opciu sa rovná hodnote 0,7, tak na dosiahnutie rizikovo neutrálneho portfólia obsahujúceho  $Q_S = 7$  akcií treba v portfóliu mať predaných (vypísaných)  $Q_V = -10$  call opcií na danú akciu.

Pre európsku call a put opciu sme schopní odvodiť explicitnú formulu pre faktor  $\Delta$ . Zderivujeme funkciu  $V^{ec}$ , resp.  $V^{ep}$  podľa premennej  $S$ . Zo vzťahu (4.3), faktu  $\partial d_1 / \partial S = \partial d_2 / \partial S$  a využitím identity (4.6) na-



Obr. 4.9: Závislosť faktora  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  call (vľavo) a put opcie (vpravo) na cene akcie  $S$ .

pokon dostávame:

$$\begin{aligned} \Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} &= S e^{-D(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &\quad + e^{-D(T-t)} N(d_1) = e^{-D(T-t)} N(d_1). \end{aligned}$$

Pre európsku put opciu analogickým spôsobom dostávame:

$$\begin{aligned} \Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} &= S e^{-D(T-t)} N'(-d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - E e^{-r(T-t)} N'(-d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &\quad - e^{-D(T-t)} N(-d_1) = -e^{-D(T-t)} N(-d_1). \end{aligned}$$

Súhrnne potom dostávame nasledovné vzťahy:

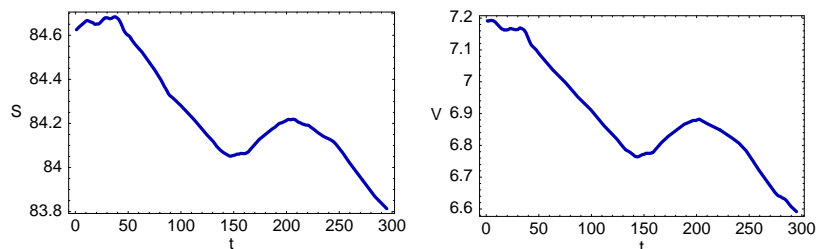
$$\begin{aligned} \Delta^{ec} &= e^{-D(T-t)} N(d_1), \\ \Delta^{ep} &= -e^{-D(T-t)} N(-d_1). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Graf závislosti faktora  $\Delta$  od ceny akcie  $S$  pre parametre  $E = 80$ ,  $r = 0,04$ ,  $D = 0$ ,  $T - t = 43/365$  je znázornený na obr. 4.9.

Experimentálne môžeme parameter  $\Delta$  získať aj z reálnych dát tým spôsobom, že aproximujeme deriváciu  $\frac{\partial V}{\partial S}$  v čase  $t_i$  pomocou diferencného podielu zmien ceny opcie vzhľadom na zmenu ceny podkladového aktíva, t. j.

$$\Delta_{t_i} = \frac{\partial V}{\partial S}(S_{t_i}, t_i) \approx \frac{V_{t_i} - V_{t_{i-1}}}{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}. \quad (4.13)$$

Je však nevyhnutné poznamenať, že bezprostredné použitie vzorca (4.13) pri uvažovaní reálnych nevyhladených dát z opčnej burzy bude často viesť k nepoužiteľným výsledkom, nakoľko malé cenové rozdiely



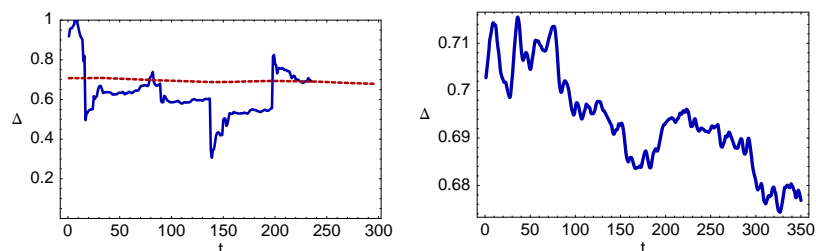
Obr. 4.10: Vyhladený minútový priebeh funkcie ceny akcie firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002 (vľavo) a priebeh jej call opcie na expiračnú cenu  $E = 80$  s expiráciou 2. 7. 2002, t. j.  $T - t = 43/365$ . Na vyhladenie bol použitý aritmetický priemer dĺžky 60 min.

$S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$  v menovateli pravej strany rovnosti (4.13) budú mať za následok vysoké hodnoty samotného parametra  $\Delta$ . Preto je v praxi potrebné použiť vyhladenie časových radov cien opcií a akcií, ako aj vyhladenie získaného časového radu vypočítaných hodnôt parametra  $\Delta$ . Na vyhladenie môžeme napr. použiť jednoduché aritmetické priemerovanie hodnôt časového radu za nejaké stanovené obdobie. Na obr. 4.10 sú znázornené vyhladené časové priebehy cien akcií i opcií firmy IBM (porovnajme s nevyhladenými dátami z obr. 4.1!). Na vyhladenie bol použitý aritmetický priemer dĺžky 60min. Praktický výpočet faktora  $\Delta$  zo vzorca (4.13) pri použití takto vyhladených časových radov cien akcií a opcií je znázornený na obr. 4.11 (vľavo).

Faktor  $\Delta$  môžeme však experimentálne určiť aj pomocou využitia explicitného vyjadrenia ceny európskej call resp. put opcie (pozri (4.3) resp. (4.4)). Na obr. 4.11 (vpravo) je znázornený priebeh časového radu faktora  $\Delta$  určeného vzťahom  $\Delta_{t_i}^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{t_i}, t_i; \sigma_{impl})$ . Poznamenajme, že na obr. 4.11 vpravo je zachytený priebeh faktora  $\Delta^{ec}$  v škále 0.67 – –0.72. Tieto hodnoty zodpovedajú prerušovanej čiare na obrázku vľavo.

## 4.5 Gama opcie

Ďalším nemenej dôležitým faktorom citlivosti, ktorý vyhodnocujeme pri analyzovaní trhových dát, je závislosť zmeny faktora  $\Delta$  príslušného derivátu (napr. opcie) na zmene ceny podkladového aktíva (napr. akcie). V diferenciálnom vyjadrení sa teda tento faktor, označovaný ako Gama



Obr. 4.11: Vľavo je zobrazený vyhladený minútový priebeh funkcie  $\Delta$  ceny akcie firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002 použitím vyhladených dát z obr. 4.10. Na vyhladenie funkcie  $\Delta$  bol opäť použitý aritmetický priemer dĺžky 60 min. Pre-rušovaná čiara v ľavom obrázku a zväčšený graf na obrázku vpravo zodpovedá hodnote  $\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl})$ .

opcie  $\Gamma$ , dá vyjadriť ako:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \quad (4.14)$$

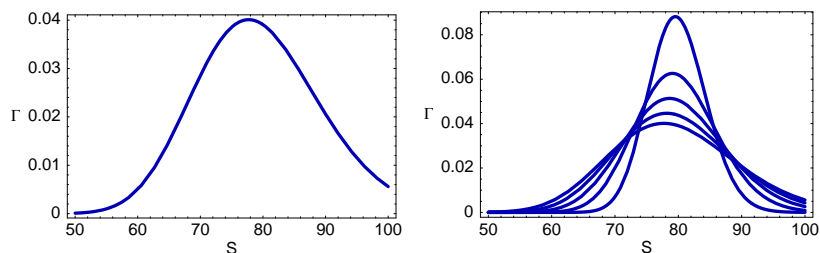
Keďže samotný faktor  $\Delta$  je deriváciou ceny opcie vzhľadom na cenu akcie, tak faktor  $\Gamma$  je vlastne druhá derivácia ceny derivátu vzhľadom na cenu podkladového aktíva.

Faktor  $\Gamma$  nám indikuje veľkosť zmeny faktora  $\Delta$ . Pripomeňme, že samotný faktor  $\Delta$  reprezentuje pomer medzi počtom akcií a počtom opcií v rizikovo neutrálnom portfóliu zloženého z akcií, opcií a bezrizikových dlhopisov. Preto ak na reálnom trhu s opciami dochádza k zmene faktora  $\Delta$ , môžeme to interpretovať tak, že dochádza k predávaniu, resp. nakupovaniu týchto opcií. To znamená, že zvýšenie hodnoty faktora  $\Gamma$  môže znamenať indikáciu pohybu v objeme predaných, resp. kúpených opcií daného typu.

Podobne ako pre faktor  $\Delta$  pre európsku call a put opciu sme schopní odvodiť explicitnú formulu pre faktor  $\Gamma$ . Derivovaním vzťahov (4.12) pre faktor  $\Delta$  call resp. put opcie dostávame

$$\begin{aligned} \Gamma^{ec} = \Gamma^{ep} &= \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = e^{-D(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= e^{-D(T-t)} \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)} S}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Graf závislosti faktora  $\Gamma$  na cene akcie  $S$  pre parametre  $E = 80, r =$



Obr. 4.12: Závislosť faktora  $\Gamma^{ec} = \Gamma^{ep} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$  call a put opcie na cene akcie  $S$  pre jednu hodnotu času  $T - t$  do expirácie (vľavo) a niekoľko grafov faktora Gama pre rôzne časy  $T - t$  do expirácie (vpravo).

0,04,  $D = 0$ ,  $T - t = 43/365$  je znázornený na obr. 4.12 (vľavo). Na pravom obrázku je zachytený časový vývoj závislosti faktora  $\Gamma$  na  $S$  pre rôzne časy do expirácie. Platí, že čím je čas do expirácie  $T - t$  menší, tým je graf faktora  $\Gamma$  vyšší a štíhlejší, majúci svoje maximum v blízkosti expiračnej ceny  $E$ .

## 4.6 Ostatné faktory: Théta, Vega, Ró

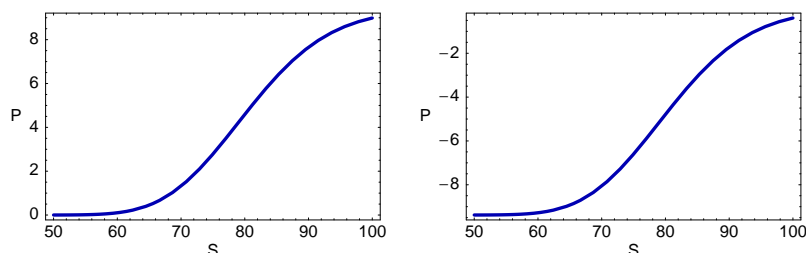
### 4.6.1 Citlivosť na zmenu úrokovej miery – faktor P (Ró)

Faktor  $P$  (z gréckeho veľkého písmena  $Ró$ ) nám poukazuje na citlivosť derivátu vzhľadom na zmenu úrokovej sadzby bezrizikového dlhopisu  $r > 0$ . Faktor  $P$  je teda definovaný ako derivácia

$$P = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Analytické vyjadrenie faktora  $P$  môžeme získať derivovaním explicitných vzťahov pre cenu európskej call a put opcie (4.3) a (4.4). S ohľadom na identitu (4.6) a fakt, že platí  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ , dostávame:

$$\begin{aligned} P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} &= S e^{-D(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} \\ &\quad + E(T-t) e^{-r(T-t)} N(d_2) = E(T-t) e^{-r(T-t)} N(d_2), \\ P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} &= -E e^{-r(T-t)} N'(-d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + S e^{-D(T-t)} N'(-d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} \\ &\quad - E(T-t) e^{-r(T-t)} N(-d_2) = -E(T-t) e^{-r(T-t)} N(-d_2). \end{aligned}$$



Obr. 4.13: Závislosť faktora  $P = \frac{\partial V}{\partial r}$  call (vľavo) a put opcie (vpravo) na cene akcie  $S$ .

Na obr. 4.13 je znázornený priebeh faktora  $P$  pre call i put opciu v závislosti na cene akcie  $S$ . Dôležité je poznamenať, že vždy platí  $P^{ec} > 0$  a  $P^{ep} < 0$ , t. j. cena európskej call opcie sa zvyšuje so zvyšovaním úrokovej miery dlhopisov a naopak, v prípade európskej put opcie sa znižuje.

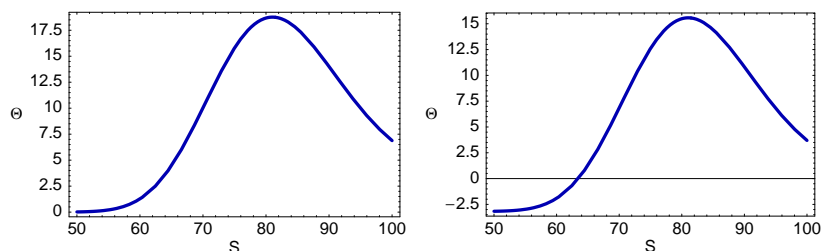
#### 4.6.2 Citlivosť na čas do expirácie – faktor Théta

Faktor  $\Theta$  nám poukazuje na citlivosť derivátu vzhľadom na expiračný čas derivátu  $T$  a je definovaný ako derivácia  $\Theta = -\frac{\partial V}{\partial T}$ . Vzhľadom na fakt, že cena derivátu v čase  $t \in [0, T]$  závisí len od rozdielu  $T - t$ , môžeme faktor  $\Theta$  vyjadriť ako:

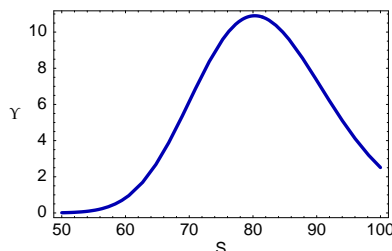
$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Analytické vyjadrenie faktora  $\Theta$  môžeme opäť získať derivovaním explicitných vzťahov pre cenu európskej call a put opcie (4.3) a (4.4) podľa času  $t$ . Po krátkych úpravách a s využitím faktu  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ , a teda  $\partial d_2/\partial t = \partial d_1/\partial t + \sigma/(2\sqrt{T-t})$ , napokon dostávame:

$$\begin{aligned} \Theta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial t} &= SDe^{-D(T-t)}N(d_1) - Ere^{-r(T-t)}N(d_2) \\ &\quad - \frac{E\sigma}{2\sqrt{T-t}}e^{-r(T-t)}N'(d_2), \\ \Theta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial t} &= Ere^{-r(T-t)}N(-d_2) - SDe^{-D(T-t)}N(-d_1) \\ &\quad - \frac{E\sigma}{2\sqrt{T-t}}e^{-r(T-t)}N'(-d_2). \end{aligned}$$



Obr. 4.14: Závislosť faktora  $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$  call (vľavo) a put opcie (vpravo) na cene akcie  $S$ , pričom parameter  $E = 80$ .

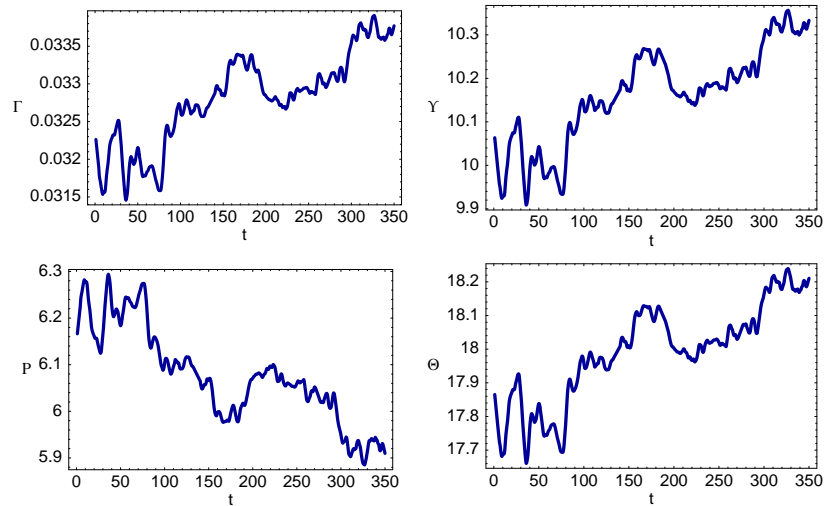


Obr. 4.15: Závislosť faktora  $\Upsilon = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$  call (vľavo) a put opcie (vpravo) na cene akcie  $S$  pričom parameter  $E = 80$ .

Na obr. 4.14 je znázornený priebeh faktora  $\Theta$  pre call i put opciu v závislosti od ceny akcie  $S$ . Cena európskej call opcie neplatiacej dividendy ( $D = 0$ ) je vždy klesajúca funkcia pre rastúci čas  $t$ , pričom limita pre  $t \rightarrow T$  je daná pay-off diagramom call opcie. To znamená, že platí  $\Theta^{ec} < 0$ , ak  $D = 0$ . Na druhej strane pre európsku put opciu je jej hodnota pre nulovú hodnotu akcie  $S = 0$  vždy rovná výrazu  $Ee^{-r(T-t)}$ , a teda  $V^{ep}(0, t) < E$ . To ale znamená, že funkcia  $V^{ep}(0, t)$  rastie pre  $t \rightarrow T$ , a teda  $\Theta^{ep} > 0$  pre  $S \approx 0$ . Avšak pre hodnoty  $S > E$  hodnota put opcie klesá pre  $t \rightarrow T$ , t. j.  $\Theta^{ep} < 0$ . Tento jav je badateľný aj z obr. 4.14 (vpravo).

### 4.6.3 Citlivosť na zmenu volatility – faktor Vega

Faktor Vega  $\Upsilon$  (Vega však nie je grécke písmeno) nám poukazuje na citlivosť derivátu vzhľadom na zmenu volatility podkladového aktíva



Obr. 4.16: Postupne zobrazené minútové časové priebehy faktorov  $\Gamma_{t_i}^{ec}$ ,  $\Upsilon_{t_i}^{ec}$ ,  $P_{t_i}^{ec}$ ,  $\Theta_{t_i}^{ec}$  call opcie firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002 s expiračnou cenou  $E = 80$  a časom do expirácie  $T - t = 43/365$  roka.

a je teda definovaný ako derivácia

$$\Upsilon = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Analytické vyjadrenie faktora  $\Upsilon$  bolo už vlastne odvodené vo vzorci (4.8), a teda

$$\Upsilon^{ec} = \Upsilon^{ep} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}. \quad (4.16)$$

To ale znamená, že  $\Upsilon^{ec} = \Upsilon^{ep} > 0$ , a teda cena európskej call i put opcie je rastúcou funkciou vzhľadom na parameter volatility  $\sigma > 0$ . Graf závislosti ceny opcie na volatilitě pre parametre  $E = 80$ ,  $r = 0,04$ ,  $D = 0$  a čas do expirácie  $T - t = 43/365$  roku je znázornený na obr. 4.15.

### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Súčasná trhovú cenu akcie firmy IBM je 68,86 USD. Hodnota európskej call opcie s expiračnou cenou 70 USD s dobou splatnosti 2 mesiace je 3,5 USD. Úroková miera bezrizikového dlhopisu je 2% p.a.



- a) Vypočítajte implikovanú volatilitu  $\sigma_{impl}$  z ceny akcie a opcie.
  - b) Výpočet implikovanej volatility zopakujte pre tú istú akciu, avšak ako východisko pre výpočet uvažujte call opciu s expiračnou cenou 75 USD s dobou splatnosti 2 mesiace, ktorej súčasná trhovú cena je 1 USD.
  - c) Diskutujte získané výsledky v bodoch a) a b) z pohľadu rizika pre investora. Ktorú opciu považujete za výhodnejšiu pre investora?
2. Ako závisí cena európskej call a put opcie na expiračnej cene? Je to závislosť rastúca alebo klesajúca?
  3. Súčasná trhovú cena akcie firmy IBM je 64 USD. Hodnota európskej put opcie s expiračnou cenou 70 USD s dobou splatnosti 6 mesiacov je 9,5 USD. Úroková miera bezrizikového dlhopisu je 2% p.a. Vypočítajte implikovanú volatilitu  $\sigma_{impl}$  z ceny akcie a put opcie.
  4. Zobrazte závislosť faktora citlivosti  $\Gamma$  na cene akcie  $S$  a času do expirácie  $t \in (0, T)$ . Výsledky zobrazte pre európsku call opciu na akciu neplatiacu dividendy, pričom  $\sigma = 0,4$ , expiračná cena je  $E = 50$ , doba splatnosti sú 4 mesiace a úrok bezrizikového dlhopisu je  $r = 0,05$ .
  5. Ako závisí cena európskej call a put opcie na úrokovej miere  $r$  dlhopisu? Zobrazte graf závislosti ceny call i put opcie na úrokovej miere, pričom predpokladajte že je známe, že cena akcie neplatiacej dividendy je  $S = 115$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,3$ , expiračná doba splatnosti je 6 mesiacov a expiračná cena call i put opcie je  $E = 110$ .
  6. Odvodte explicitný vzťah a zobrazte graf závislosti faktora lambda  $\lambda$  na cene podkladového aktíva  $S$ . Faktor  $\lambda$  je logaritmická derivácia ceny opcie vzhľadom na cenu akcie, t. j.  $\lambda = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial S}$ .
  7. Odvodte explicitný vzťah a zobrazte graf závislosti faktora Vanna na cene podkladového aktíva  $S$ . Faktor Vanna meria citlivosť faktora  $\Delta$  na zmene volatility  $\sigma$ , a teda  $Vanna = \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}$ .
  8. Odvodte explicitný vzťah a zobrazte graf závislosti faktora Speed na cene podkladového aktíva  $S$ . Faktor Speed meria citlivosť faktora  $\Gamma$  na zmene ceny podkladového aktíva  $S$ , a teda  $Speed = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$ .

---

## Kapitola 5

### *Modelovanie transakčných nákladov a rizika*

---

V tejto časti sa zameriame na doposiaľ nezodpovedanú otázku, ktorá sa týka modelovania transakčných nákladov spojených s obchodovaním na finančnej burze. Pripomeňme, že pri odvodzovaní Black–Scholesovho a Mertonovho modelu sme sformulovali nasledovné predpoklady, ktoré nás viedli k odvodeniu modelu na oceňovanie opcií:

- Cena akcie  $S$  sleduje geometrický Brownov pohyb s daným driftom a volatilitou.
- Úroková miera  $r$  bezrizikového dlhopisu a volatilita akcie  $\sigma$  sú známe počas doby trvania opcie.
- Portfólio je samofinancované, bezrizikové a predpokladáme nulový rast investícií do portfólia.
- Obchodovanie s podkladovým aktívom je kontinuálne.

- Trh s aktívami a opciami je úplne likvidný.
- Transakčné náklady spojené so zaistovaním portfólia prostredníctvom predaja/nákupu akcií alebo opcií sú nulové alebo zanedbateľné.

Poznamenajme, že bezrizikové portfólio sme pri odvodení základného Black–Scholesovho modelu dosiahli prostredníctvom kontinuálneho  $\Delta$  zaistovania portfólia, kde  $\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$ .

Pri analýze praktických trhových dát sa však ukazuje, že ktorýkoľvek z vyššie uvedených predpokladov môže byť narušený. V tejto časti sa predovšetkým zameriame na problematiku modelovania netriviálnych transakčných nákladov, ktoré sú spojené s predajom a kúpou akcií tvoriacich rizikovo neutrálne portfólio. Zároveň poukážeme na možnosť modelovania nie kontinuálneho zaistovania, t. j. transakcie sa môžu prevádzať v diskretných časových okamihoch. Toto východisko je oveľa realistickejšie a približuje výsledný model bližšie ku skutočnosti finančných trhov.

## 5.1 Lelandov model

V práci [41] H. Leland urobil síce jednoduchú, ale veľmi dôležitú modifikáciu Black–Scholesovho modelu pre call a put opcie. Do modelu zahrnul transakčné náklady a diskretné udržiavanie portfólia. Neskôr tento postup pre zložitejšie opčné stratégie zovšeobecnil Hoggard, Whalley a Wilmott v práci [28] a ďalej analyzovali Grandits a Schachinger v [26].

Odvodenie Lelandovho modelu je postavené na nasledovných východiskách:

1. Portfólio zložené z akcií, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov sa môže meniť (prerovnávať) každých  $\Delta t$  časových jednotiek, kde  $\Delta t$  je pevne zadaný časový krok.
2. Cena akcie sleduje geometrický Brownov pohyb s driftom  $\mu$  a volatilitou  $\sigma$ , t. j.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw.$$

V diskretných časových okamihoch  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , kde  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ , pre každé  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  je teda zmena ceny akcie

$\Delta S$  daná diskrétnou formou rovnice geometrického Brownovho pohybu

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Phi \sqrt{\Delta t},$$

kde  $\Phi$  je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti  $\Phi \sim N(0, 1)$ .

3. Predpokladáme, že opcia v cene  $V$  je v tzv. dlhej (long) pozícii, čo znamená, že ju v portfóliu držíme a zaistovanie portfólia prevádzame prostredníctvom nákupu resp. predaja akcií, resp. dlhopisov.
4. Transakčné náklady sú odvodené od objemu transakcie. Možnosť nakupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií za tú istú cenu  $S$  je jedným z predpokladov Black–Scholesovho modelu, ktorý nie je možné na skutočnom (nie úplnom) trhu zabezpečiť. Predpokladáme teda, že na trhu môžeme nakupovať akcie za vyššiu (tzv. ask) cenu  $S_{ask}$  a predávať za nižšiu (tzv. bid) cenu  $S_{bid}$ . Ako cenu akcie  $S$  označíme priemer bid a ask cien  $S_{ask}$  a  $S_{bid}$ . Potom

$$S_{ask} = S(1 + C/2), \quad S_{bid} = S(1 - C/2),$$

kde  $C$  reprezentuje konštantné percentuálne náklady na predaj a kúpu jednej akcie. Teda

$$C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S_{ask} + S_{bid}}. \quad (5.1)$$

To znamená, že ak uvažujeme nákup alebo predaj akcie za cenu  $S$ , tak musíme počítať s dodatočnými nákladmi vo výške  $\frac{C}{2}S$  jednotiek.

5. Podobne ako v pôvodnom Black–Scholesovom modeli, sa očakávaný výnos bezrizikového portfólia rovná výnosu bezrizikových dlhopisov.

Odvedenie Lelandovho modelu je veľmi podobné odvedeniu pôvodného Black–Scholes–Mertonovho modelu z kapitoly 3. Budeme syntetizovať derivát  $V$  voľbou portfólia zloženého z  $\delta$  akcií a jedného bezrizikového dlhopisu  $B$  s bezrizikovou mierou výnosu  $r$ , pričom portfólio je zaistované samofinancovanou stratégiou. V čase  $t$  máme

$$V_t = \delta_t S_t + B_t.$$

Ak časový interval medzi dvoma zaistovaniami portfólia označíme  $\Delta t$ , tak pre zmenu hodnoty portfólia od času  $t$  do  $t + \Delta t$  dostávame

$$V_{t+\Delta t} - V_t = \delta_t(S_{t+\Delta t} - S_t) + (B_t e^{r\Delta t} - B_t) + \frac{C}{2} |\delta_{t+\Delta t} - \delta_t| S_{t+\Delta t}.$$

V tejto rovnici prvý člen na pravej strane rovnice predstavuje zisk (resp. stratu) spôsobený zmenou ceny akcie, druhý člen úrok získaný z dlhopisu za obdobie  $\Delta t$  a posledný člen predstavuje transakčné náklady vyplývajúce zo zmeny počtu akcií v portfóliu. Práve tento člen modeluje transakčné náklady, t. j. súčin dodatočných nákladov na nákup alebo predaj jednej akcie a počtu akcií, ktoré nakupujeme alebo predávame. Ak využijeme Itóovu lemu 2.1 aplikovanú na diferenciu  $V_{t+\Delta t} - V_t$  a aproximujeme prírastok finančného objemu dlhopisov  $B_t e^{r\Delta t} - B_t$  pomocou  $rB\Delta t$ , tak potom vyššie uvedenú rovnosť môžeme prepísať do diferenčného tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t = \delta \Delta S + rB\Delta t + \frac{C}{2} S |\Delta \delta|.$$

Podobne ako v prípade odvodenia pôvodného Black–Scholesovho modelu sme schopní eliminovať stochastické členy v tejto rovnici vstupujúce do diferencie  $\Delta S$  pomocou  $\Delta$  zaistovania. Skutočne, voľbou počtu akcií v portfóliu

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (5.2)$$

eliminujeme člen  $\Delta S$ . V rovnici však ešte stále ostáva stochastický člen  $\Delta \delta$ , teda

$$rB\Delta t + \frac{C}{2} S |\Delta \delta| = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad (5.3)$$

Podľa (5.2) je množstvo akcií v portfóliu funkciou aktuálnej ceny akcie  $S$  a času. Aplikovaním Itóovej lemy na člen  $\frac{\partial V}{\partial S}$  dostávame

$$\Delta \delta \approx \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta w,$$

až na členy rádu  $\Delta t$  a vyšších rádov v  $\Delta t$ . Keďže pre očakávanú hodnotu  $|\Delta w|$  platí

$$E(|\Delta w|) = E(|\phi|) \sqrt{\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta t,$$

kde  $\phi \sim N(0, 1)$  je normálne rozdelená náhodná premenná, tak s prihliadnutím na štatistický zákon veľkých čísel môžeme pre malé hodnoty  $0 < \Delta t \ll 1$  aproximovať náhodnú premennú  $|\Delta w|$  pomocou jej strednej hodnoty  $E(|\Delta w|)$ . Dostávame tak vyjadrenie

$$\frac{1}{2}CS|\Delta\delta| \approx \frac{1}{2}C\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| E(|\Delta w|) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \Delta t.$$

Následným dosadením do (5.3) napokon získavame Lelandov model na oceňovanie finančných derivátov s uvažovaním transakčných nákladov v tvare parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left( 1 - \text{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) + r \left( S \frac{\partial V}{\partial S} - V \right) = 0, \quad (5.4)$$

pričom sme do rovnice dosadili aj vzťah  $B = V - \delta S$  plynúci z predpokladu o samofinancovanosti portfólia, t. j. financovaní nákupu/predaja akcií, resp. opcií v portfóliu prostredníctvom predaja/nákupu bezrizikových dlhopisov.

Parciálna diferenciálna rovnica (5.4) sa dá kompaktne zapísať v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left( 1 - \text{Le sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (5.5)$$

kde Le je tzv. Lelandovo číslo a je definované ako:

$$\text{Le} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (5.6)$$

Riešenie  $V = V(S, t)$  rovnice (5.5) je definované na množine  $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$ . Koncová (terminálová) podmienka  $V(S, T)$  v čase expirácie opcie  $t = T$  zodpovedá zvolenému typu opcie. Napríklad:

$$\begin{aligned} V(S, T) &= \max(S - E, 0) \quad \text{pre call opciu,} \\ V(S, T) &= \max(E - S, 0) \quad \text{pre put opciu.} \end{aligned}$$

Všimnime si jeden dôležitý fakt. Uvažujme problém oceňovania európskej call alebo put opcie so zahrnutím transakčných nákladov. V prípade call i put opcie je priebeh riešenia Black–Scholesovej rovnice konvexná funkcia v premennej  $S$ . To je dôsledkom konvexnosti termínalovej podmienky pre call i put opciu. Tým pádom riešenie klasickej

Black–Scholesovej rovnice má kladné znamienko druhej derivácie  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ , a teda  $\text{sign}(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) = 1$ . To ale znamená, že riešenie pôvodnej Black–Scholesovej rovnice s pozmenenou volatilitou  $\hat{\sigma}$ , kde

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(1 - \text{Le}),$$

je zároveň aj riešením Lelandovej rovnice (5.5). Keďže riešenie Black–Scholesovej rovnice opisujúce ceny európskej call alebo put opcie je rastúcou funkciou parametra volatility  $\sigma$ , dostávame tak, že pre kladné Lelandovo číslo  $\text{Le} > 0$  platí

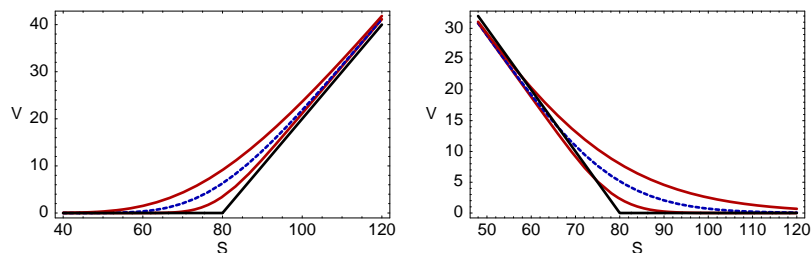
$$V_{lel}^{ec}(S, t) < V_{bs}^{ec}(S, t), \quad V_{lel}^{ep}(S, t) < V_{bs}^{ep}(S, t) \quad \text{pre každé } S > 0, t \in (0, T),$$

kde  $V_{bs}^{ec}(S, t)$ , resp.  $V_{bs}^{ep}(S, t)$  je riešenie Black–Scholesovej rovnice pre oceňovanie call, resp. put opcie a  $V_{lel}^{ec}(S, t)$ , resp.  $V_{lel}^{ep}(S, t)$  je riešením Lelandovej rovnice (5.5).

## 5.2 Modelovanie bid–ask spreadov pomocou Lelandovho modelu

Ako sme už konštatovali, cena call alebo put opcie vypočítaná z Lelandovho modelu (5.5) je nižšia ako cena získaná z riešenia Black–Scholesovho modelu s uvažovaním tých istých parametrov volatility  $\sigma$ , úrokovej a dividendovej miery  $r$  a  $D$  a rovnakej expiračnej ceny  $E$  a expiračného času  $T$ . To je dané tým, že transakčné náklady sú na strane držiteľa opcie, pretože musí zaistiť portfólio predajom alebo nákupom akcií. Tým pádom je cena opcie z pohľadu držiteľa alebo záujemcu o kúpu zaistovacieho nástroja, akým je opcia, tým nižšia, čím sú vyššie transakčné náklady. To znamená, že cena opcie vypočítaná na základe riešenia Lelandovej rovnice (5.5) môže byť stotožnená s cenou zodpovedajúcou ponuke na kúpu opcie. Zrejme ponúkaná cena (bid cena) na kúpu opcie je na finančnom trhu vždy nižšia ako ponuka na jej predaj (ask cena).

Cenu opcie, ktorá bude reprezentovať ponuku na kúpu opcie, t. j. tzv. ask cenu opcie, môžeme taktiež modelovať pomocou Lelandovej metodológie. Na rozdiel od tzv. dlhej (long) pozície opcie budeme teraz uvažovať o situácii, v ktorej tento derivát dlhujeme, t. j. opcia je v krátkej



Obr. 5.1: Zobrazenie grafov riešenia Lelandovho modelu pre európsku call (vľavo) a put opciu (vpravo). Znázornené sú plnou čiarou nižšie (bid) ceny, vyššie (ask) ceny opcií a riešenie Black-Scholesovej rovnice s volatilitou  $\sigma$  (prerušovaná čiara). Parametre výpočtu:  $E = 80$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $Le = 0,15$ ,  $r = 0,04$ ,  $D = 0$ ,  $T - t = 43/365$ .

(short) pozícii. Budeme sa teda snažiť o syntetizovanie jedného dlhového derivátu v cene  $V_t$  pomocou nákupu, resp. predaja  $\delta_t$  akcií v cene  $S_t$  a dlhopisov  $B_t$ , t. j.

$$-V_t = -\delta_t S_t - B_t.$$

Pre zmenu portfólia medzi dvoma zaistovaniami od času  $t$  do  $t + \Delta t$  dostávame

$$-(V_{t+\Delta t} - V_t) = -\delta_t(S_{t+\Delta t} - S_t) - (B_t e^{r\Delta t} - B_t) + \frac{C}{2} |\delta_{t+\Delta t} - \delta_t| S_{t+\Delta t}.$$

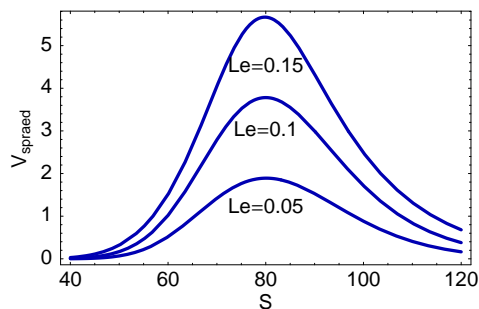
Postupom analogickým ako v prípade opcie v dlhej pozícii nakoniec dospejeme k Lelandovej rovnici pre ocenenie opcie v krátkej pozícii

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left( 1 + Le \operatorname{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (5.7)$$

kde  $Le$  je Lelandovo číslo definované vzťahom (5.6). Riešenie  $V = V(S, t)$  je opäť definované na množine  $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$  a reprezentuje vyššiu cenu opcie - ponuku na predaj alebo aj ask cenu opcie.

Na obr. 5.1 sú znázornené riešenia Lelandovho modelu oceňovania európskej call (vľavo) a put opcie (vpravo) s uvažovaním transakčných nákladov vyjadrených prostredníctvom Lelandovho čísla  $Le$ . Dolný graf zodpovedá ponuke na kúpu opcie (bid cena) vyjadrenej funkciou  $V(S, t; \sigma(1 - Le)^{\frac{1}{2}})$ , stredná prerušovaná čiara zodpovedá riešeniu





Obr. 5.2: Zobrazenie grafov rozdielov (spreads) medzi ask a bid cenami európskej call opcie  $V^{ec}(S, t; \sigma(1 + Le)^{\frac{1}{2}}) - V^{ec}(S, t; \sigma(1 - Le)^{\frac{1}{2}})$  pre hodnoty Lelandovho čísla  $Le = 0, 15, 0, 1, 0, 05$ . Parametre výpočtu:  $E = 80, \sigma = 0, 3, r = 0, 04, D = 0, T - t = 43/365$ .

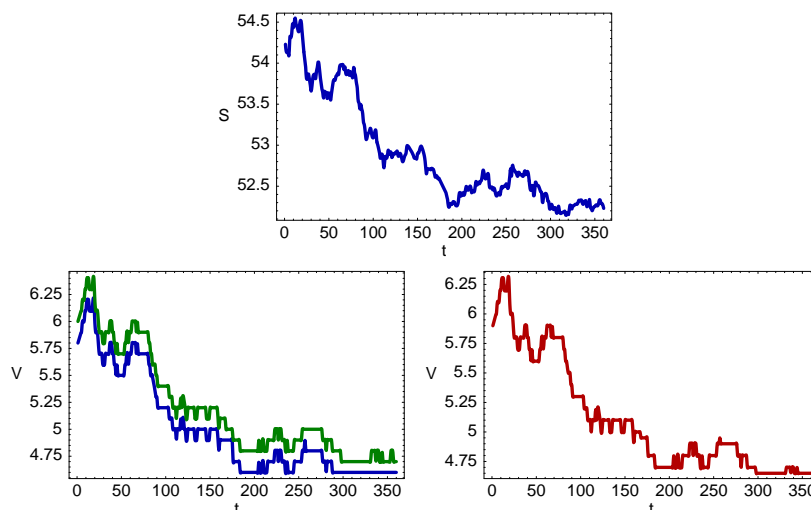
Black–Scholesovej rovnice s nulovým Lelandovým číslom, t. j.  $V(S, t; \sigma)$ , a horný graf zodpovedá ponuke na predaj opcie (ask cena) vyjadrenej funkciou  $V(S, t; \sigma(1 + Le)^{\frac{1}{2}})$ . Na obr. 5.2 sú znázornené rozdiely (spreads) medzi ask a bid cenami európskej call opcie  $V^{ec}(S, t; \sigma(1 + Le)^{\frac{1}{2}}) - V^{ec}(S, t; \sigma(1 - Le)^{\frac{1}{2}})$  pre rôzne hodnoty Lelandovho čísla. Rozdiely (spreads) pre put opciu sú vďaka call–put parite zhodné s rozdielmi pre call opciu.

Lelandov model oceňovania je teda možné použiť na zachytenie rozdielných bid a ask cien derivátov a ich spreadov. Z toho vyplýva možnosť jeho využitia na kalibráciu parametrov získaných z časových dát bid a ask cien opcií. Predpokladajme, že v danom čase  $t$  máme k dispozícii trhovú cenu akcie  $S_{real}$  a bid, resp. ask ceny príslušných call opcií  $V_{real}^{bid}$ , resp.  $V_{real}^{ask}$  s danou splatnosťou  $T$  a expiračnou cenou  $E$ , pričom je známa úroková miera  $r$ , ako aj dividendová miera  $D$ . Zároveň predpokladajme, že poznáme koeficient  $C$  transakčných nákladov daný vzťahom (5.1) na základe bid a ask ceny samotnej akcie v danom čase. Potom parametre  $\sigma$  a  $Le$  Lelandovho modelu (5.5-5.7) môžeme vypočítať z riešenia dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$\sigma^2(1 + Le) = \sigma_{ask}^2, \quad \sigma^2(1 - Le) = \sigma_{bid}^2,$$

kde  $\sigma_{ask}$  a  $\sigma_{bid}$  sú jednoznačne určené implikované volatility Black–Scholesovho modelu, t. j.

$$V_{real}^{ask} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{ask}), \quad V_{real}^{bid} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{bid}).$$



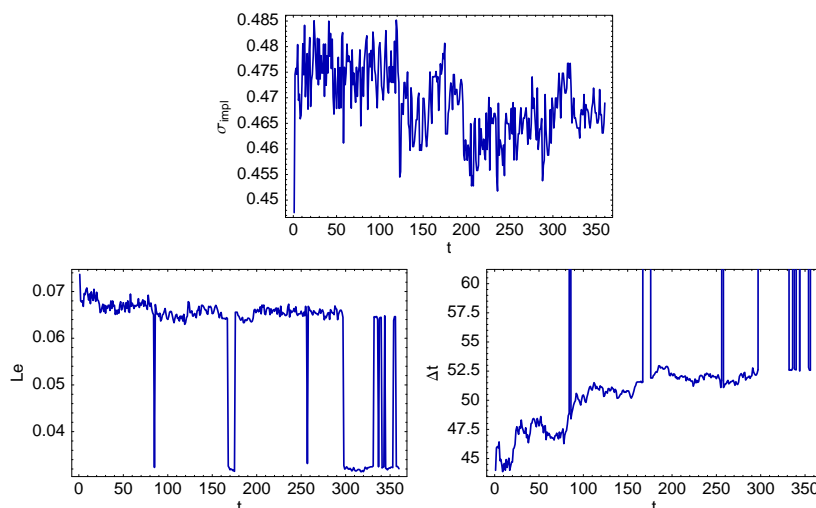
Obr. 5.3: Minútový priebeh ceny akcie firmy Microsoft zo dňa 21. 5. 2002 (hore). Vľavo dole je znázornený priebeh bid a ask cien call opcie na expiračnú cenu  $E = 50$  so splatnosťou 2. 7. 2002 ( $T - t = 43/365$ ). Vpravo dole je priebeh aritmetického priemeru medzi bid a ask cenami call opcie.

Na obr. 5.3 je zobrazený reálny časový priebeh ceny akcie firmy Microsoft zo dňa 21. 5. 2002 a bid resp. ask cien call opcie na expiračnú cenu  $E = 50$  so splatnosťou 2. 7. 2002 ( $T - t = 43/365$ ). Na obr. 5.4 je znázornený minútový časový priebeh počas obchodovacieho dňa 21. 5. 2002 vypočítaných implikovaných volatilit a Lelandovho čísla na základe použitia bid a ask cien call opcie. Zobrazený je aj priebeh času  $\Delta t$  medzi dvomi zaisteniami portfólia, ktorý je vypočítaný zo vzťahu (5.6) ako

$$\Delta t = \frac{2}{\pi} \frac{C^2}{\sigma^2 L e^2}.$$

Koeficient  $C$  sme určili majúci hodnotu 0,02, ktorá je delená expiračnou cenou, t. j.  $C = 0,02/E = 0,0004$ . To zodpovedalo trhovým bid-ask spreadom v cene akcie na úrovni 0,02 USD. Na základe vypočítaných hodnôt časového intervalu  $\Delta t$  počas 21. 5. 2002 môžeme usudzovať, že vzhľadom na trhovú dáta je optimálne voliť čas medzi dvomi zaisteniami (prerovnaniami) portfólia cca 50 minút.

Zaujímavé výsledky je možné získať porovnávaním implikovaných

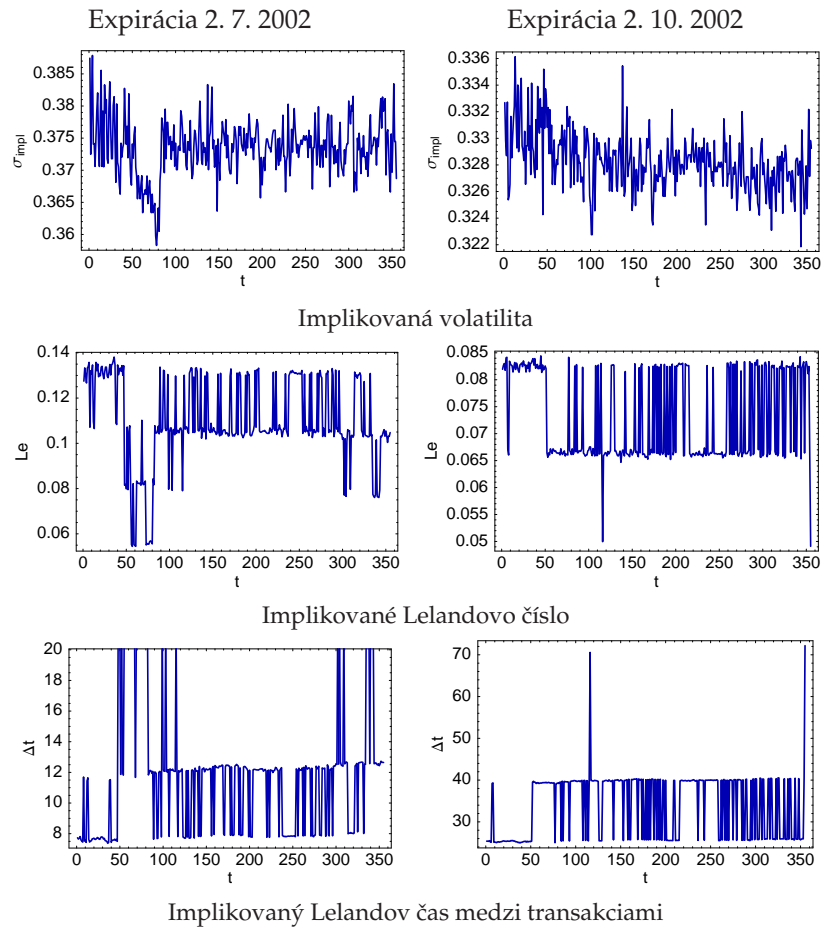


Obr. 5.4: Minútový priebeh implikovanej volatility vypočítanej z cien call opcií firmy Microsoft s expiračnou cenou  $E = 50$  a so splatnosťou 2. 7. 2002 ( $T - t = 43/365$ ). Dole sú zobrazené príslušné priebehy implikovaného Lelandovho čísla a priebeh implikovaného Lelandovho času  $\Delta t$  medzi dvoma transakciami.

volatilit a Lelandových čísel získaných z bid-ask cien opcií s rôznymi dobami expirácie. Príklad takéhoto výpočtu je znázornený na obr. 5.5. Porovnaním časov medzi dvomi zaisteniami  $\Delta t$  je zreteľné, že na zaisťovanie portfólia s opciou s dlhšou splatnosťou postačuje dlhší čas  $\Delta t$  medzi nasledujúcimi zaisteniami (prerovnaniami) portfólia.

### 5.3 Riziko zahrňujúca metodológia a ďalšie nelineárne modely

Cieľom tejto časti je ponúknuť čitateľovi pohľad do modernej teórie oceňovania derivátov, ktorá je založená na riešeniach rôznych zovšeobecnení pôvodnej Black-Scholesovej rovnice. Jedná sa však len o stručný a rozhodne nie úplný prehľad nelineárnych zovšeobecnení klasickej Black-Scholesovej teórie. Detailnejšie východiská odvodzovania nasledovných modelov ako aj ich kvalitatívnu a kvantitatívnu analýzu môže



Implikovaný Lelandov čas medzi transakciami

Obr. 5.5: Porovnanie minútového priebehu implikovanej volatility vypočítanej z cien call opcií firmy IBM zo dňa 21. 5. 2002 s expiračnou cenou  $E = 80$  a so splatnosťou 2. 7. 2002 (vľavo) ( $T - t = 43/365$ ) a so splatnosťou 2. 10. 2002 (vpravo). V strede sú príslušné priebehy implikovaných Lelandových čísel. Dole je znázornený minútový priebeh implikovaného Lelandovho času  $\Delta t$  medzi dvoma transakciami.

čitateľ získať z uvádzaných prameňov literatúry.

Pripomeňme, že prípad, keď koeficient  $\sigma > 0$  Black–Scholesovej rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (5.8)$$

je konštantný, reprezentuje klasickú Black–Scholesovu teóriu prezentovanú Blackom a Scholesom v článku [8]. Na druhej strane, ak pripustíme, že koeficient volatility  $\sigma > 0$  je funkciou samotného riešenia  $V$  a prípadne ceny akcie  $S$ , tak rovnica (5.8) reprezentuje nelineárne zovšeobecnenie Black–Scholesovej rovnice. Naším ďalším cieľom je poukázať na nelineárne modely oceňovania derivátov akcií, ktoré rôznym smerom zovšeobecňujú klasický lineárny Black–Scholesov model. Budeme študovať modely, v ktorých difúzny koeficient  $\sigma^2$  rovnice (5.8) môže závisieť na čase do expirácie  $T - t$ , cene aktíva  $S$  a na druhej derivácii ceny opcie vzhľadom na cenu aktíva, t. j. na Gama faktore opcie  $\Gamma = \partial_S^2 V$ . To znamená, že

$$\sigma = \sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t). \quad (5.9)$$

Motiváciu pre štúdium nelineárnych zovšeobecnení Black–Scholesovej rovnice (5.8) s volatilitou  $\sigma$  v tvare (5.9) pre nás predstavujú modely, ktoré okrem iného berú do úvahy

1. nenulové transakčné náklady (napr. Lelandov model),
2. spätné väzby na trhu a trhy s neúplnou likviditou,
3. riziko plynúce z nezaisteného portfólia

a ďalšie. V poslednom období došlo k vzniku nových modelov oceňovania, ktoré rozširujú klasickú Black–Scholesovu teóriu a nevyžadujú také reštriktívne predpoklady ako mala Black–Scholesova teória. Napríklad už analyzovaný Lelandov model [41] a jeho zovšeobecnenia pre prípad všeobecných opčných stratégií od Hoggarda *et al.* [28], model so skákajúcimi volatilitami od Avellanedu a Parasa [3]. Ďalej sa vyvinuli modely zahrňujúce spätnú väzbu a efekty trhu s neúplnou likviditou a pôsobenia dominantných investorov sledujúcich zvolenú stratégiu obchodovania s akciami (Frey a Patie [22], Frey a Stremme [23], During *et al.* [16], Schönbucher a Wilmott [59]). Efekty neúplnej replikácie a zadanej funkcie investorových preferencií boli študované

Barlesom a Sonerom [5]. Zahnutie možného rizika plynúceho z nezaisťovaného portfólia bolo zohľadnené v modeloch navrhnutých Kratkom [38] a Jandačkom a Ševčovičom v [32, 57]. Keďže pre nelineárne modely je vo všeobecnosti obtiažnejšie explicitné riešenie, výskum v tejto oblasti sa venuje najmä návrhu efektívnych numerických schém na riešenie problému oceňovania derivátov, ktoré sú riešeniami nelineárnych modelov Black–Scholesovho typu. Čitateľ sa môže viac o problematike riešenia nelineárnych modelov dozvedieť napr. v prácach Durlinga a kol. [16], Ankudinovej a Ehrhardta [2], Ševčoviča [57].

Okrem už predstaveného Lelandovho modelu, populárnym nelineárnym zovšeobecnením Black–Scholesovho modelu sa stal model navrhnutý Avellanedom, Levym a Parasom [4], v ktorom sa na opis neúplných trhov používa iba ohraničenie na rozsah volatility. Ich model predpokladá, že volatilita má tvar

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, \tau) = \begin{cases} \hat{\sigma}_1^2, & \text{ak } \partial_S^2 V < 0, \\ \hat{\sigma}_2^2, & \text{ak } \partial_S^2 V > 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

kde  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  reprezentujú dolný a horný odhad pre inak bližšie nešpecifikovanú volatilitu stochastického vývoja akcie.

V prípade, že uvažujeme netriviálne transakčné náklady, tak ako už bolo spomenuté pri Lelandovom modeli, nie je možné dosiahnuť perfektnú (kontinuálnu) replikáciu portfólia, pretože náklady na transakcie by rástli cez všetky medze. V prípade, že investorove preferencie sú charakterizované exponenciálnou funkciou užitočnosti, Barles a Soner v práci [5] odvodili nelineárne zovšeobecnenie Black–Scholesovej rovnice, v ktorom volatilita  $\sigma$  má tvar

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 (1 + \Psi(a^2 e^{r\tau} S^2 \partial_S^2 V)), \quad (5.11)$$

kde funkcia  $\Psi$  je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice:  $\Psi'(x) = (\Psi(x) + 1)/(2\sqrt{x\Psi(x)} - x)$ ,  $\Psi(0) = 0$ , a  $a > 0$  je daný koeficient investorovej averzie k riziku. Dá sa ukázať, že  $\Psi(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$  pre  $x \rightarrow 0$  a  $\Psi(x) = O(x)$  pre  $x \rightarrow \infty$ .

Na záver uvedieme ešte jedno zovšeobecnenie Black–Scholesovej rovnice. Model RAPM riziko zahrňujúcej metodológie oceňovania derivátov bol navrhnutý Kratkom v [38] a upravený Jandačkom a Ševčovičom v práci [32]. Myšlienka odvodenia modelu je jednoduchá. V snahe vykonávať (nie úplne perfektnú) replikáciu portfólia prostredníctvom

$\Delta$  zaistovania v časových intervaloch dĺžky  $\Delta t$  musí zaistovateľ portfólia dbať na to, že príliš časté zaistovanie (prerovnávanie) portfólia, keď  $\Delta t$  je malé, bude viesť k enormnému nárastu transakčných výdavkov. Na druhej strane však sporadické zaistovanie, keď  $\Delta t$  je, naopak, veľké, vedie k zvyšovaniu rizika plynúceho z nezaisteného portfólia. Hlavná myšlienka odvodenia modelu teda spočíva v navrhnutí mier rizika spojených s transakčnými nákladmi a s nezaisteným portfóliom, ktoré sú funkciami času  $\Delta t$  medzi dvomi zaisteniami. Optimalizácia výberu tohto časového intervalu dĺžky  $\Delta t$  potom vedie na nelineárne zovšeobecnenie Black–Scholesovej rovnice, kde volatilita má tvar

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, \tau) = \hat{\sigma}^2 \left( 1 + \mu(S \partial_S^2 V)^{\frac{1}{3}} \right), \quad (5.12)$$

pričom  $\hat{\sigma}^2 > 0$  predstavuje konštantnú historickú volatilitu akcie a pre koeficient  $\mu$  platí:  $\mu = 3(C^2 R / 2\pi)^{\frac{1}{3}}$ , kde  $C, R \geq 0$  sú nezáporné konštanty reprezentujúce mieru transakčných nákladov (pozri (5.1)) a mieru rizika plynúceho z nezaisteného portfólia. Čitateľa odkazujeme aj na články [38, 32], v ktorých sú uvedené ďalšie detaily odvodenia a kvalitatívne vlastnosti modelu.

Nakoniec poznamenajme, že všetky doposiaľ uvedené nelineárne zovšeobecnenia pôvodnej Black–Scholesovej rovnice sú s ňou konzistentné v takom zmysle, že v prípade, že niektorý z dodatočných parametrov modelu je nulový (napr. číslo  $Le$  v Lelandovom modeli alebo parameter  $a$  v Barles a Sonerovom modeli, resp.  $\mu$  v RAPM modeli), tak výsledná rovnica je totožná s lineárnou Black–Scholesovou rovnicou.

V nelineárnych modeloch oceňovania derivátov sa vo všeobecnosti nedajú použiť výsledky ako napríklad put–call parita, ktorá je dôsledkom linearity základného Black–Scholesovho modelu. Táto metóda vychádzala z rozdelenia derivátu na dva subderiváty tak, aby v čase expirácie dávali spolu požadovaný derivát. Každý z týchto subderivátov sme potom syntetizovali samostatne, čím mohol nastať prípad, že sme z jedného portfólia akcie predávali a do druhého sme akcie nakupovali, pričom by postačovalo presunúť akcie z jedného portfólia do druhého bez toho, aby sme museli platiť transakčné náklady.

## Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Bid, resp. ask cena akcie firmy IBM je 118 USD, resp. 119 USD. Známa je historická volatilita  $\sigma_{hist}$  ceny akcie a bola 20% p.a. Hodnota európskej

call opcie s expiračnou cenou 115 USD s dobou splatnosti 6 mesiacov je 6 USD. Úroková miera bezrizikového dlhopisu je 2% p.a.

- a) Uvažovaním základného Black–Scholesovho modelu vypočítajte implikovanú volatilitu na základe strednej hodnoty akcie.
  - b) Vypočítajte hodnotu koeficientu  $C$  v Lelandovom modeli oceňovania opcií s uvažovaním transakčných nákladov. Ak uvažujeme, že transakčné náklady sú na strane držiteľa opcie, určite časový krok  $\Delta t$ , pomocou ktorého treba riadiť zaistovanie vášho portfólia. Návod: Uvedomte si, že v prípade call opcie sa Lelandov model dá redukovať na základný Black–Scholesov model s inou volatilitou, akou je historická volatilita. Tú porovnajte s implikovanou volatilitou vypočítanou podľa bodu a).
2. Podrobne odvodte Lelandov model pre prípad oceňovania derivátu v tzv. krátkej (short) pozícii, t. j. pre derivát, ktorý dlhujeme. Uvedomte si, že v takom prípade sú transakčné náklady na strane držiteľa opcie, pretože on musí prevádzať zaistovanie portfólia.
  3. Ukážte, že pre normálne rozdelenú náhodnú premennú  $\Phi \sim N(0, 1)$  platí pre strednú hodnotu jej absolútnej hodnoty  $E(|\Phi|) = \sqrt{2/\pi}$ .
  4. Ako závisí cena európskej call a put opcie držanej v dlhej (alebo long) pozícii na intervale medzi jednotlivými zaisteniami portfólia  $\Delta t$ ? Je to závislosť rastúca alebo klesajúca?
  5. Ako závisí rozdiel medzi ask a bid cenou európskej call opcie, vyjadrených pomocou Lelandovho modelu, na Lelandovom čísle a na intervale medzi jednotlivými zaisteniami portfólia  $\Delta t$ ? Nájdite hodnotu  $S$ , v ktorej sa nadobúda maximálny rozdiel.
  6. Pomocou call–put parity ukážte, že rozdiel medzi ask a bid cenou európskej call opcie vyjadrených pomocou Lelandovho modelu sa zhoduje s rozdielom medzi ask a bid cenou európskej put opcie.



---

## Kapitola 6

### *Modelovanie exotických finančných derivátov*

---

Cieľom tejto kapitoly je aspoň čiastočne čitateľovi priblížiť problematiku oceňovania exotických typov derivátov. Prívlastok „exotický“ má pôvod v geografickom postavení opčných búrz, na ktorých sa s týmito derivátmi začalo obchodovať. Označenie pre ázijské opcie je toho príkladom. Väčšina exotických typov derivátov nejakým spôsobom zohľadňuje historický vývoj ceny podkladového aktíva. V prvej časti kapitoly sa preto zameriame na analýzu dráhovo závislých (tzv. path-dependent) opcií, ktoré závisia na hodnotách podkladového aktíva na nejakom časovom intervale. Do tejto skupiny patria ázijské opcie, bariérové opcie, lookback opcie, ruské opcie a iné. Jedným z hlavných dôvodov zavedenia opcií závisiacich na histórii vývoja ceny podkladového aktíva bola snaha investorov znížiť riziko plynúce z okamžitých

výkyvov ceny aktíva v blízkosti, ktoré boli často spôsobované špekulatívnymi zámermi. V druhej časti kapitoly v krátkosti priblížime aj ďalšie typy exotických derivátov, akými sú napríklad binárne opcie, košíkové opcie alebo zložené opcie na opcie.

## 6.1 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú typom derivátových obchodov, ktoré závisia nielen od aktuálnej ceny aktíva, ale aj od historického vývoja ceny aktíva, na ktoré je opcia vypisovaná. Tieto opcie sú teda špeciálnym prípadom tzv. path-dependent opcií. To znamená opcií, ktorých pay-off diagram závisí nielen od koncovnej ceny akcie, ale aj od jej vývoja do expirácie. V prípade ázijských opcií výplatná funkcia pay-off diagramu závisí od historického priemeru ceny aktíva. Ázijské opcie sú veľmi užitočným nástrojom finančného manažmentu. Môžu byť použité na zaistovanie špecifických typov aktív, akými sú napríklad kontrakty na dodávky ropných produktov. Obvykle je zaistovanie prostredníctvom ázijských opcií lacnejšie ako konštrukcia portfólia obyčajných call alebo put opcií s rôznymi splatnosťami. Navyše, ázijské typy derivátov majú výhodu oproti obyčajným call alebo put opciám v tom ohľade, že ich cena nie je príliš závislá od okamžitej hodnoty podkladového aktíva, ale od jeho spriemerovanej ceny za dané obdobie. Tým spôsobom je čiastočne možné znižovať riziko plynúce z možnej cenovej manipulácie zo strany vypisovateľa v čase expirácie.

Klasifikácia ázijských opcií je trochu komplikovanejšia kvôli nasledovným faktorom, na základe ktorých rozdeľujeme typy ázijských opcií:

1. Podľa typu spriemerovania cien podkladového aktíva. V zásade rozoznávame dva typy spriemerovania - aritmetické a geometrické spriemerovanie. Spojitý variant vyjadrenia spriemerovanej ceny  $A_t$  podkladového aktíva v čase  $t$  sa dá vyjadriť v integrálnom tvare

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau, \quad \ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau. \quad (6.1)$$

V diskretnom prípade môžeme priemery vyjadriť ako:

$$A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}, \quad \ln A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S_{t_i}, \quad (6.2)$$

kde  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , pričom  $t_{i+1} - t_i = 1/n$ .

2. Podľa pozície spriemerovanej veličiny vstupujúcej do výplatnej pay-off funkcie. Rozoznávame dva spôsoby, ako spriemerovaná veličina vstupuje do pay-off diagramu opcie:

- *Average rate call resp. put opcia* – ak je spriemerovaná hodnota v pozícii ceny aktíva, t. j.

*call opcia*                      *put opcia*

$$V^{arc}(S, A, T) = \max(A - E, 0), \quad V^{arp}(S, A, T) = \max(E - A, 0). \quad (6.3)$$

- *Average strike call resp. put opcia* – ak je spriemerovaná hodnota v pozícii expiračnej ceny opcie.

$$V^{asc}(S, A, T) = \max(S - A, 0), \quad V^{asp}(S, A, T) = \max(A - S, 0), \quad (6.4)$$

kde  $E$  je daná expiračná cena a  $S = S_T, A = A_T$  sú cena a spriemerovaná cena podkladového aktíva v čase expirácie  $T$ .

To znamená, že môžeme napríklad uvažovať o ázijskej aritmeticky spriemerovanej average strike call opcii alebo o ázijskej geometricky spriemerovanej average rate put opcii. Celkove je teda podľa vyššie uvedenej klasifikácie možných 8 druhov ázijských opcií.

Poznamenajme, že v diskretnom tvare sa vyjadrenie geometrického priemeru (6.2) dá vyjadriť ako

$$A_{t_n} = \left( \prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (6.5)$$

ktorý predstavuje skutočne geometrický priemer z nezáporných cien akcie  $S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}$ .

### 6.1.1 Parciálna diferenciálna rovnica pre ázijské opcie

V tejto časti sa sústreďíme na odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice Black-Scholesovho typu na oceňovanie ázijských typov opcií. Podobne ako v prípade klasickej Black-Scholesovej teórie budeme predpokladať,

že vývoj ceny akcie má stochastický charakter, ktorý môžeme opísať pomocou rovnice geometrického Brownovho pohybu

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma Sdw,$$

kde  $w$  je Wienerov proces,  $\mu$  je drift procesu,  $D$  je miera spojite vyplácaných dividend na akciu a  $\sigma$  je volatilita vývoja ceny akcie.

Hodnota  $V$  ázijskej opcie je funkcia, ktorá je závislá nielen od ceny podkladového aktíva  $S$  a času  $t \in [0, T]$ , ale aj od spriemerovanej ceny  $A$  na intervale  $[0, T]$ , t. j.  $V = V(S, A, t)$ . Cena derivátu  $V$  má teda vďaka závislosti od  $S$  a  $A$  tiež stochastický charakter. Skôr ako vypočítame diferenciál  $dV$  ceny opcie, zamyslime sa nad zmenou - diferenciálom spriemerovanej ceny  $A$ . Dostávame:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{t^2} \int_0^t S_\tau d\tau + \frac{1}{t} S_t = \frac{S_t - A_t}{t}$$

v prípade aritmetického priemeru, resp.

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{d \ln A}{dt} = -\frac{1}{t^2} \int_0^t \ln S_\tau d\tau + \frac{1}{t} \ln S_t = \frac{\ln S_t - \ln A_t}{t}$$

v prípade geometrického priemeru. To ale znamená, že diferenciál priemeru  $dA$  je v prvom ráde aproximácie rádu  $dt$  a platí:

$$\begin{array}{cc} \text{aritmetický priemer} & \text{geometrický priemer} \\ dA = \frac{S - A}{t} dt, & dA = A \frac{\ln S - \ln A}{t} dt. \end{array} \quad (6.6)$$

Pre oba typy spriemerovania však platí, že diferenciál  $dA$  sa dá vyjadriť v tvare:

$$dA = A f\left(\frac{S}{A}, t\right) dt, \quad (6.7)$$

kde funkcia  $f(x, t) = (x - 1)/t$  v prípade aritmetického spriemerovania a  $f(x, t) = (\ln x)/t$  v prípade geometrického spriemerovania.

Ak teraz použijeme Itóovu lemu 2.1 na výpočet diferenciálu funkcie  $V = V(S, A, t)$  a zohľadníme fakt, že  $dA$  je toho istého rádu ako  $dt$ , tak dostávame stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial A} dA + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\ &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial A} A f\left(\frac{S}{A}, t\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Ďalší postup odvodu parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu  $V = V(S, A, t)$  ázijského derivátu je temer zhodný s postupom odvodu Black–Scholesovej rovnice pre európske typy opcií opísaným v kapitole 3. Skutočne, vytvorením samofinancovaného portfólia s nulovým rastom investícií a požiadavkou na bezrizikovosť investície do daného portfólia, t. j. eliminovaním stochastických členov z rovnice pre diferenciál samofinancovaného portfólia napokon dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre oceňovanie ázijských typov derivátov pre aritmetické alebo geometrické spriemerovanie cien podkladového aktíva v tvare:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + Af\left(\frac{S}{A}, t\right) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \quad (6.8)$$

ktorej riešenie  $V = V(S, A, t)$  je definované na oblasti  $(S, A, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, T)$  a spĺňa terminálovú podmienku (pay-off diagram) podľa zvoleného typu opcie. Ak napríklad uvažujeme o ázijskej aritmeticky spriemerovanej average strike call opcii, tak jej pay-off diagram má tvar:

$$V(S, A, T) = \max(S - A, 0), \quad (6.9)$$

pričom funkcia  $f$  v rovnici (6.8) má tvar  $f(x, t) = (x - 1)/t$ . V prípade geometrického spriemerovania máme  $f(x, t) = (\ln x)/t$ . Ak uvažujeme o ázijskej aritmeticky spriemerovanej average rate call opcii, jej pay-off diagram má tvar:

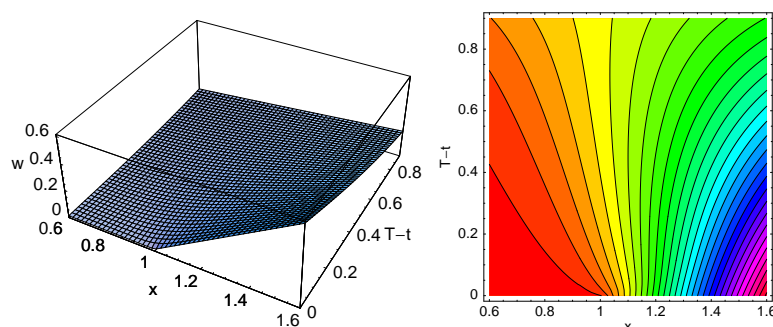
$$V(S, A, T) = \max(A - E, 0), \quad (6.10)$$

kde  $E$  je zadaná expiračná cena v expiračnom čase  $T$ .

Poznamenajme, že PDR (6.8) nie je celkom vhodná na numerickú aproximáciu vzhľadom na to, že v nej vystupuje iba prvá parciálna derivácia funkcie  $V$  podľa stavovej premennej  $A$ . V prípade ázijskej average strike call alebo put opcie je však možné, s ohľadom na štruktúru rovnice (6.8) a terminálovej podmienky (6.9), uskutočniť rozumnú transformáciu závislých a nezávislých premenných:

$$V(S, A, t) = AW(x, t), \quad \text{kde } x = \frac{S}{A}, \quad x \in (0, \infty). \quad (6.11)$$

Ak dosadíme tieto transformované premenné do rovnice (6.8) a terminálovej podmienky (6.9), tak po krátkych úpravách dostávame, že



Obr. 6.1: Zobrazenie riešenia  $W(x, t)$  rovnice (6.12) prostredníctvom 3D perspektívy (vľavo) a úrovňových množín (vpravo). Parametre výpočtu  $\sigma = 0,4, r = 0,04, D = 0, T = 1$ .

transformovaná funkcia  $W = W(x, t)$  je riešením parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice:

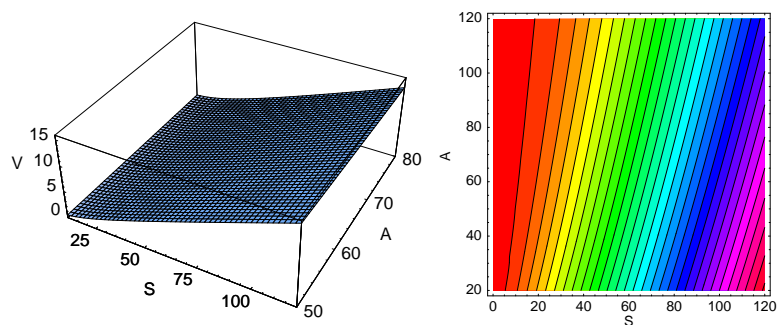
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - D)x \frac{\partial W}{\partial x} + f(x, t) \left( W - x \frac{\partial W}{\partial x} \right) - rW = 0, \quad (6.12)$$

kde riešenie  $W = W(x, t)$  je definované na oblasti  $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$ . Terminálový pay-off diagram pre transformovanú funkciu  $W$  má pre ázijskú average strike call alebo put opciu tvar:

$$W^{call}(x, T) = \max(x - 1, 0), \text{ resp. } W^{put}(x, T) = \max(1 - x, 0). \quad (6.13)$$

V súčasnosti je známe, že v prípade geometrického spriemerovania majú average rate a average strike call, resp. put opcie riešenie, ktoré môže byť vyjadrené explicitným vzorcom (pozri aj príklady 7 a 8). Na druhej strane, riešenie rovnice (6.12) v jednoduchom explicitnom tvare nie je v prípade aritmetického spriemerovania doposiaľ známe.

Na obr. 6.1 je znázornený priebeh riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (6.12). Na obr. 6.2 je zachytený priebeh funkcie  $V(S, A, t)$  vyjadrenej prostredníctvom transformácie (6.11), t. j.  $V(S, A, t) = AW(S/A, t)$  pre čas do expirácie  $T - t = 0,9$ . Pre úplnosť uvádzame aj jednoduchý zdrojový kód v systéme Mathematica, pomocou ktorého môžeme vypočítať aritmeticky spriemerovanú average strike call opciu (pozri tab. 6.1).



Obr. 6.2: Zobrazenie ceny ázijskej call average strike opcie  $V(S, A, t) = AW(S/A, t)$  v čase  $t = 0,1$  (t. j.  $T - t = 0,9$ ) - riešenia rovnice (6.8) prostredníctvom 3D perspektívy (vľavo) a úrovňových množín (vpravo). Parametre výpočtu sú ako na obr. 6.1.

Tabuľka 6.1: Výpis programu Mathematica pre oceňovanie ázijských opcií.

```

sigma=0.4; r=0.04; d=0; T=1; t=0.9; xmax=8;

PayOff[x_] := If[x - 1 > 0, x - 1, 0];

riesenie = NDSolve[{
  D[w[x, tau], tau] == (sigma^2/2) x^2 D[w[x, tau], x, x]
  + (r - d)*x * D[w[x, tau], x]
  + ((x - 1)/(T - tau))*(w[x, tau] - x*D[w[x, tau], x])
  - r*w[x, tau],
  w[x, 0] == PayOff[x],
  w[0, tau] == 0,
  w[xmax, tau] == PayOff[xmax]},
  w, {tau, 0, t}, {x, 0, xmax}
];

w[x_, tau_] := Evaluate[w[x, tau] /. riesenie[[1]] ];
V[tau_, S_, A_] := A w[S/A, tau];
Plot3D[ V[t, S, A], {S, 10, 120}, {A, 50, 80}];

```

## 6.2 Bariérové opcie

Bariérové opcie sa považujú za jedny z najjednoduchších opcií, ktorých hodnota závisí od časovej histórie vývoja podkladového aktíva. Predstavujú vlastne klasické call a put opcie, ktoré majú navyše tú vlastnosť, že ak cena akcie dosiahne niekedy v období trvania opcie vopred zadanú bariérovú hodnotu  $B$ , tak strácajú svoju platnosť a vypisovateľ opcie vyplatí jej držiteľovi vopred dohodnutý rabat. Týmto typom bariérových opcií sa hovorí *down-and-out* alebo *up-and-out* opcie, podľa toho, z ktorej strany sa dosiahla bariéra. Down-and-out opcie sú dostupné na trhu od roku 1967.

Môžeme klasifikovať nasledovné typy bariér, pri dosiahnutí ktorých opcia predčasne vyprší v čase  $t \in (0, T)$  medzi vypísaním a terminálovým vypršaním opcie v čase  $T$ :

- *down-and-out* bariéra  
v prípade, že cena akcie dosiahne v čase  $t$  zadanú bariéru  $B(t)$  zhora,
- *up-and-out* bariéra  
v prípade, že cena akcie dosiahne v čase  $t$  zadanú bariéru  $B(t)$  zdola.

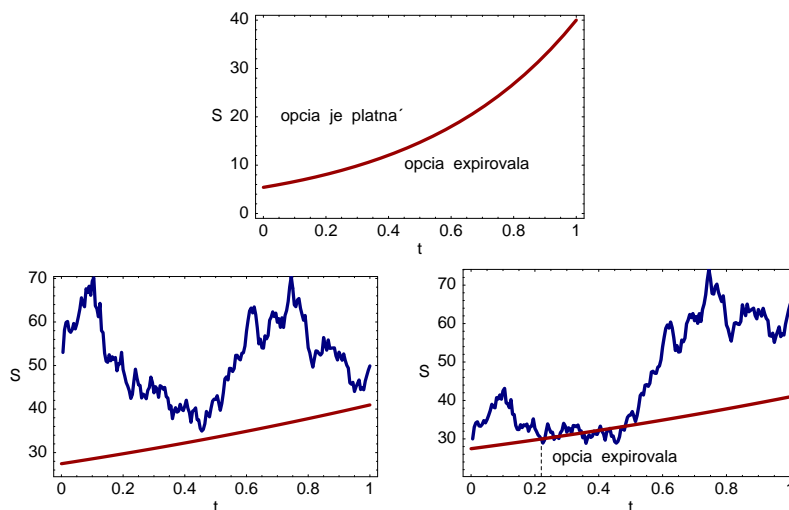
Terminálová podmienka v čase terminálového vypršania opcie  $T$  je daná pay-off diagramom call, resp. put opcie. Podľa toho rozlišujeme down-and-out call opciu alebo up-and-out put opciu atď. V každom prípade, ak opcia predčasne vyprší, tak držiteľ opcie získava od vypisovateľa opcie vopred stanovený rabat  $R = R(t) \geq 0$ . Dojednaný rabat môže byť aj nulový.

Typickým príkladom vopred dohodnutej bariérovej funkcie je exponenciálna bariérová funkcia

$$B(t) = bEe^{-\alpha(T-t)}, \quad (6.14)$$

kde  $0 < b \leq 1, \alpha \geq 0$  sú zvolené konštanty. Príklad bariérovej funkcie pre down-and-out call alebo put opciu je znázornený na obr. 6.3. Zároveň je na tomto obrázku zachytený význam bariéry pre dva prípady časového vývoja podkladového aktíva. Na ľavom dolnom obrázku je bariéra neaktívna počas celej doby trvania opcie. Na obrázku vpravo došlo v čase  $t \approx 0,21$  k dosiahnutiu exponenciálnej bariéry zhora, a tým





Obr. 6.3: Príklad exponenciálnej bariéry pre down-and-out opciu (hore). Vľavo dole je ukážka neaktívnej bariéry počas celej doby existencie opcie  $[0, T]$ . Vpravo je ukážka aktivizácie bariéry v čase  $t \approx 0, 21$ .

pádnom opcia typu down-and-out predčasne vypršala v tomto časovom okamihu. Držiteľ tejto opcie získava stanovený rabat  $R(t) \geq 0$ . Ako príklad funkcie rabatu  $R$  môžeme uvažovať napríklad funkciu

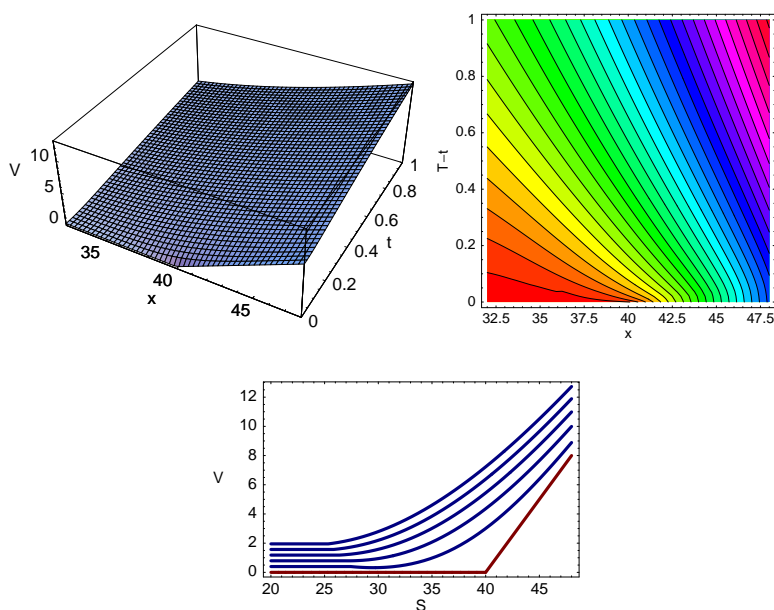
$$R(t) = E \left( 1 - e^{-\beta(T-t)} \right), \quad (6.15)$$

kde  $\beta \geq 0$ . Všimnime si, že takáto funkcia rabatu  $R(t) \geq 0$  vždy spĺňa prirodzenú terminálovú podmienku  $R(T) = 0$ , ktorá by mala byť splnená pri terminálovom vypršaní bariérovej opcie v čase  $t = T$ .

Keďže down-and-out opcia je platná iba v oblasti, kde  $S > B(t)$ , môžeme uplatniť Black-Scholesovu teóriu na zaistovanie portfólia pomocou tejto opcie a dostávame, že cena down-and-out opcie musí pre  $S > B(t)$  vyhovovať parciálnej diferenciálnej rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (6.16)$$

pre  $t \in (0, T)$ ,  $S > B(t)$ . Riešenie ako cena down-and-out opcie musí byť na okraji regiónu platnosti opcie (t. j. pre  $S = B(t)$ ) totožné so zadanou



Obr. 6.4: Graf riešenia rovnice (6.20) na oceňovanie down-and-out bariérovej opcie pomocou trojrozmerného grafu (vľavo hore) a grafu úrovňových množín funkcie  $w$  (vpravo hore). Ceny opcie  $V$  pre rôzne časy do expirácie (dole).

hodnotou rabatu  $R(t)$ . To znamená, že pre všetky  $t \in (0, T)$  musí platiť okrajová podmienka

$$V(B(t), t) = R(t). \quad (6.17)$$

Napokon, podľa typu terminálovej podmienky pre call alebo put opciu musí byť riešenie  $V(S, t)$  pre  $t = T$  dané pay-off diagramom call, resp. put opcie, t. j.

$$V^{call}(S, T) = \max(S - E, 0), \quad \text{resp.} \quad V^{put}(S, T) = \max(E - S, 0), \quad (6.18)$$

kde  $E$  je expiračná cena opcie v expiračnom čase  $T$ .

Rovnicu (6.16) je možné jednoduchou transformáciou

$$V(S, t) = W(x, t), \quad \text{kde} \quad x = \ln\left(\frac{S}{B(t)}\right), \quad x \in (0, \infty), \quad (6.19)$$

Tabuľka 6.2: Výpis programu Mathematica pre oceňovanie bariérových opcii.

```

b = 0.7; alfa = 0.1; beta = 0.05; X = 40;
sigma = 0.4; r = 0.04; d = 0; T = 1;

xmax = 2;

Bariera[t_] := X b Exp[-alfa (T - t)];
Rabat[t_] := X (1 - Exp[-beta(T - t)]);

PayOff[x_] := X*If[b Exp[x] - 1 > 0, b Exp[x] - 1, 0];

riesenie = NDSolve[{
  D[w[x, tau], tau] == (sigma^2/2)D[w[x, tau], x, x]
  + (r - d - sigma^2/2 - alfa )* D[w[x, tau], x]
  - r *w[x, tau] ,

  w[x, 0] == PayOff[x],
  w[0, tau] == Rabat[T - tau],
  w[xmax, tau] == PayOff[xmax]},

  w, {tau, 0, T}, {x, 0, xmax}
];

w[x_, tau_] := Evaluate[w[x, tau] /. riesenie[[1]] ];
Plot3D[w[x, tau], {x, 0, xmax}, {tau, 0, T}];

V[S_, tau_] :=
  If[S > Bariera[T - tau],
    w[ Log[S/Bariera[T - tau]], tau],
    Rabat[T - tau]
  ];

Plot[
  {V(S,0.2 T),V(S,0.4 T), V(S,0.6 T), V(S,0.8 T), V(S,T)},
  {S,20,50}];

```

previesť na parciálnu diferenciálnu rovnicu pre transformovanú funkciu

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left( r - D - \frac{\sigma^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial W}{\partial x} - rW = 0 \quad (6.20)$$

definovanú na pevnej oblasti  $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$ . Okrajová podmienka (6.17) a terminálová podmienka (6.18) sa potom transformujú nasledovne:

$$W(0, t) = R(t), \quad (6.21)$$

$$W^{call}(x, T) = E \max(be^x - 1, 0), \text{ resp. } W^{put}(x, T) = E \max(1 - be^x, 0). \quad (6.22)$$

Na obr. 6.4 je znázornený priebeh riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (6.20) s rabatom definovaným pomocou funkcie (6.15). Opäť uvádzame aj jednoduchý zdrojový kód v systéme Mathematica, pomocou ktorého môžeme vypočítať cenu bariérovej down-and-out call opcie (pozri tab. 6.2).

Poznamenajme, že rovnicu (6.20) spolu s terminálovou podmienkou (6.22) a okrajovou podmienkou (6.21) je možné explicitne vyriešiť. Jej explicitné riešenie získané metódou Duhamelovho integrálu je uvedené v príkladoch na samostatné riešenie. Vzorec riešenia je však dosť zložitý aj s ohľadom na praktickú numerickú implementáciu. Uvádzame preto príklad použitia numerickej schémy v tab. 6.2.

### 6.3 Košíkové opcie a opcie na indexy

Košíkové (basket) sú opcie, ktorých cena závisí na hodnote viacerých podkladových aktív. Typickým príkladom košíkovej opcie môže byť derivát naviazaný na vývoj dvoch podkladových aktív, pričom jeho výplatný diagram je call opcia na súčet cien jednotlivých aktív, t. j.

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1 + S_2 - E, 0),$$

kde  $E$  je dohodnutá expiračná cena v expiračnom čase  $T$ . Jedná sa o veľmi populárny typ derivátov. Ďalším príkladom košíkovej opcie je opcia na index. Známe sú napríklad call a put opcie na index Standard & Poor S&P500, s ktorými obchodujú drobní investori. V tomto príklade je počet akcií vchádzajúcich do košíka (indexu) S&P500 rovný číslu  $n = 500$ .

Poznamenajme, že pomocou viacrozmerného variantu Itóovej lemy (2.1) je možné odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu na oceňovanie košíkových (indexových) derivátov. Problém potom vedie na počítanie vysokorozmerných integrálov. Efektívny algoritmus aproximácie vysokorozmerných opcií na indexy je v súčasnosti stále predmetom intenzívneho výskumu.

## 6.4 Binárne opcie

Binárne opcie, tiež nazývané digitálne, predstavujú najjednoduchšie typy exotických opcií. Výplatný pay-off diagram binárnej opcie bol predstavený v kapitole 2 a je zobrazený na obr. 2.14. To znamená, že terminálová podmienka je definovaná ako:

$$V^{bin}(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{ak } S \in [E_1, E_2], \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

kde  $0 < E_1 < E_2$ . Vzorec oceňovania binárnej opcie v čase  $t \in [0, T]$  má tvar

$$V^{bin}(S, t) = e^{-r(T-t)}(N(d_2^{E_1}) - N(d_2^{E_2})),$$

kde  $d_1^E = (\ln(S/E) + (r - D + \sigma^2/2)(T - t)) / (\sigma\sqrt{T - t})$ . Tento vzorec môžeme poľahky odvodiť z faktu, že terminálový pay-off diagram binárnej opcie je aproximovaný rozdielom

$$V^{bin}(S, T) \approx \frac{(-V^{ec}(S, t; E_1 + \varepsilon) + V^{ec}(S, t; E_1))}{\varepsilon} - \frac{(-V^{ec}(S, t; E_2 + \varepsilon) + V^{ec}(S, t; E_2))}{\varepsilon}$$

pre  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Teda  $V^{bin}(S, t) = -\frac{\partial V^{ec}}{\partial E}(S, t; E_1) + \frac{\partial V^{ec}}{\partial E}(S, t; E_2)$  a vzorec riešenia plynie z fundamentálnej identity (4.6).

## 6.5 Zložené opcie

Zložené opcie (compound options) predstavujú opcie na aktívum, ktorým je opäť opcia. V prípade, že sa obmedzíme iba na triedu jednoduchých call alebo put opcií na aktíva, ktoré sú opäť call alebo put opcie,

tak dostávame štyri typy zložených opcií – call na call, call na put, put na call a put na put. Ich oceňovanie si objasníme na jednom prípade (call na call) vzhľadom na to, že ostatné prípady sú úplne analogické.

Uvažujme teda zloženú opciu A, ktorá má expiračný čas  $T_A$  a expiračnú cenu  $E_A$ , pričom jej podkladové aktívum je opcia B, ktorá expiruje v čase  $T_B > T_A$  a má expiračnú cenu  $E_B$ . Terminálový pay-off takejto opcie A je potom daný vzťahom:

$$V_A^{ec}(S, T_A) = \max(V_B^{ec}(S, T_A) - E_A, 0).$$

Cena podkladového aktíva, t. j. opcie B, je však v čase  $T_A$  určená explicitným vzorcom (4.3) pre oceňovanie európskej call opcie a platí:

$$V_B^{ec}(S, T_A) = S e^{-D(T_B - T_A)} N(d_1^B) - E_B e^{-r(T_B - T_A)} N(d_2^B),$$

kde

$$d_1^B = \frac{\ln\left(\frac{S}{E_B}\right) + (r - D + \frac{\sigma^2}{2})(T_B - T_A)}{\sigma\sqrt{T_B - T_A}}, \quad d_2^B = d_1^B - \sigma\sqrt{T_B - T_A}.$$

Tým pádom ocenenie zloženej opcie  $V_A^{ec}(S, t)$  v čase  $0 < t < T_A$  je opäť dané vzorcom (4.3), t. j.

$$V_A^{ec}(S, t) = V_B^{ec}(S, T_A) e^{-D(T_A - t)} N(d_1^A) - E_A e^{-r(T_A - t)} N(d_2^A).$$

## 6.6 Lookback opcie

Lookback opcie sú ďalším príkladom derivátov, ktorých cena závisí nielen od aktuálnej ceny podkladového aktíva, ale aj od ďalšej hodnoty získanej z celého priebehu cien aktíva za sledované obdobie. V prípade lookback opcií je táto hodnota určená ako maximum alebo ako minimum ceny aktíva za dané obdobie.

V zásade rozoznávame dva typy lookback opcií:

- Lookback opcie s pohyblivou expiračnou cenou danou ako maximum  $M = M_{T_0}^T = \max(S_t, t \in [T_0, T])$  ceny aktíva v časovom intervale  $[T_0, T]$ , kde  $T_0 \geq 0$ . To znamená, že terminálová podmienka je daná vzťahom:

*call opcia*                      *put opcia*

$$V^{lc}(S, M, T) = \max(S - M, 0), \quad V^{lp}(S, M, T) = \max(M - S, 0), \quad (6.23)$$

kde  $S = S_T$  je cena podkladového aktíva v čase expirácie  $T$ .

- Lookback opcie s pevnou expiračnou cenou  $E$ , pričom termínová podmienka je daná vzťahom:

$$V^{lc}(S, M, T) = \max(M - E, 0), \quad V^{lp}(S, M, T) = \max(E - M, 0). \quad (6.24)$$

Vo všeobecnosti, podobne ako ázijské opcie, sú aj lookback opcie žiadané investormi, ktorí majú predstavu o rozsahu, v ktorom sa bude pohybovať podkladové aktívum, ale nechcú byť viazaní na vopred stanovenú expiračnú cenu.

### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Pomocou transformácií premenných a použijúc metódu Duhamelovho integrálu v rovnici (6.20) odvodte explicitný vzorec (pre  $D = 0$ ):

$$\begin{aligned} w(x, t) = & E \frac{e^{\lambda x + q(T-t)}}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\ln b}^{\infty} \left( b e^{-(\lambda-1)\xi} - e^{-\lambda\xi} \right) \\ & \times \left( e^{-(x-\xi)^2/(2\sigma^2(T-t))} - e^{-(x+\xi)^2/(2\sigma^2(T-t))} \right) d\xi \\ & + \frac{x e^{\lambda x}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{T-t} \frac{e^{qs} e^{-x^2/(2\sigma^2 s)}}{s^{\frac{3}{2}}} R(T-t-s) ds, \end{aligned}$$

kde  $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\alpha-r}{\sigma^2}$ ,  $q = -\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} - r$ , pre oceňovanie bariérovej down-and-out opcie so zadanou funkciou rabatu  $R(t)$ .

2. Numericky vypočítajte hodnotu ázijskej aritmeticky spriemerovanej call opcie s parametrami ako v tab. 6.1 a pre spriemerovanú cenu  $A$  totožnú s cenou aktíva  $S$  ju porovnajte s cenou európskej call opcie s tými istými parametrami. Ktorá cena je vyššia?
3. Znázornite graf riešenia zloženej call na call opcie.
4. Podrobne odvodte vzorec riešenia pre oceňovanie binárnej opcie a znázornite graf riešenia binárnej opcie pre rôzne časy do expirácie opcie.

5. Ukážte, že maximum z nezáporných čísel  $S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}$  sa dá vyjadriť ako limita  $\max_{i=1, \dots, n} S_{t_i} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Pre spojitú funkciu  $S_\tau, \tau \in [0, T]$  analogickým spôsobom ukážte, že platí:  $\max_{\tau \in [0, t]} S_\tau = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$ .
6. Pomocou predošlého príkladu nájdite aproximáciu lookback opcie s pohyblivou expiračnou cenou danou ako maximum cien aktíva. Návod: uvažujte funkciu  $f(x, t) = \frac{1}{p} \frac{x^p - 1}{t}$  pre veľké hodnoty  $p \gg 1$ . Zobraďte riešenie pomocou algoritmu z tab. 6.1.
7. Predpokladajte, že cena akcie sleduje geometrický Brownov pohyb, t. j.  $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ . Ukážte, že spojitý geometrický priemer akcie  $\ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau$  opäť vyhovuje rovnici geometrického Brownovho pohybu  $dA = \tilde{\mu} A dt + \tilde{\sigma} A dw$ , kde  $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \tilde{\sigma}^2)$  a  $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ .
8. Pomocou predošlého príkladu nájdite explicitné riešenie oceňovania ázijského typu call alebo put geometricky spriemerovanej average rate opcie.



---

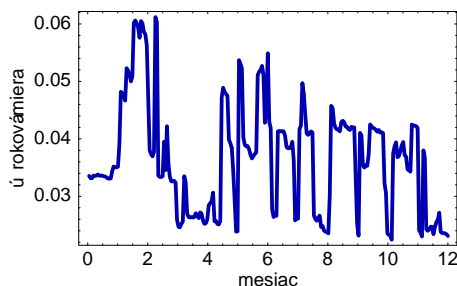
## Kapitola 7

### *Modelovanie okamžitej úrokovej miery*

---

V nasledujúcich dvoch kapitolách sa budeme zaoberať modelovaním úrokových mier a ich derivátov. V kapitole 7 uvidíme tzv. short-rate modely pre opis okamžitej úrokovej miery. Okamžitú (alebo aj krátkodobú) úrokovú mieru budeme opisovať prostredníctvom riešení stochastickej diferenciálnej rovnice. V závislosti od tvaru koeficientov tejto rovnice budeme rozlišovať jednotlivé typy modelov úrokovej miery. V tejto kapitole ďalej odvodíme pravdepodobnostné rozdelenie stochastických procesov opisujúcich okamžitú úrokovú mieru. V závere kapitoly odvodíme, ako sa toto rozdelenie dá použiť pri kalibrácii modelov.

Predstavu o charaktere časového priebehu okamžitej úrokovej miery si môže čitateľ urobiť z obr. 7.1, na ktorom predkladáme ukážku prie-



Obr. 7.1: Denný časový priebeh okamžitej úrokovej miery BRIBOR v roku 2007.

behu okamžitej úrokovej miery pre slovenský medzibankový trh BRIBOR (BRatislava Interbank Offered Rate). Z obrázka je zrejмый stochastický charakter vývoja úrokovej miery, ktorá sa v danom období pohybovala medzi hodnotami 2% až 6% p.a.

## 7.1 Jednofaktorové modely

V jednofaktorových modeloch sa predpokladá, že okamžitá úroková miera  $r$  je charakterizovaná pomocou riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá môže mať vo všeobecnosti tvar

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw. \quad (7.1)$$

Deterministická časť procesu  $dr = \mu(t, r)dt$  určuje trend (alebo drift) vo vývoji úrokovej miery, volatilita  $\sigma(t, r)$  určuje charakter náhodných fluktuácií úrokovej miery v okolí trendovej, t. j. deterministickej zložky.

Obvyklou voľbou driftovej funkcie je  $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$ , kde  $\kappa, \theta$  sú kladné konštanty. Parameter  $\theta$  nazývame limitnou úrokovou mierou a  $\kappa$  rýchlosťou reverzie alebo aj rýchlosťou návratu k limitnej úrokovj mieri. Stochastické procesy s touto formou deterministickej časti sa zvyknú označovať aj ako Ornstein–Uhlenbeckov mean reversion procesy. Podstata driftu v tvare  $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$  spočíva v tom, že stredná hodnota úrokovej miery je potom priťahovaná k rovnovážnej hodnote  $\theta$ , pričom sila tohto priťahovania je daná parametrom  $\kappa$ . Skutočne, pre strednú hodnotu  $E(r_t)$  platí

$$dE(r_t) = E(dr_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt + E(\sigma(t, r)dw) = \kappa(\theta - E(r_t))dt,$$

nakoľko, s ohľadom na konštrukciu Itóovho integrálu z kapitoly 2, platí  $E(\sigma(t, r)dw) = 0$ . Zrejme riešenie diferenciálnej rovnice  $\frac{d}{dt}E(r_t) = \kappa(\theta - E(r_t))$  má tvar

$$E(r_t) = \theta + (E(r_0) - \theta)e^{-\kappa t}. \quad (7.2)$$

To ale znamená, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \theta$ .

V nasledovnom texte sa zameriame na Orstein–Uhlenbeckove procesy typu mean reversion. V závislosti na tvare funkcie volatility  $\sigma(r, t)$  budeme rozlišovať jednotlivé modely okamžitej úrokovej miery. Ak budeme uvažovať konštantnú volatilitu, t. j.  $\sigma(t, r) = \sigma$ , tak dostaneme tzv. Vašíčkov model

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw, \quad (7.3)$$

ktorý bol odvodený Vašíčkom v práci [61]. Vašíčkov model patrí medzi historicky prvé a najjednoduchšie modely vývoja okamžitej úrokovej miery. Medzi nevýhody Vašíčkovho modelu však patrí fakt, že pripúšťa aj záporné úrokové miery. Ak je úroková miera blízka nule, volatilita je stále rovná tej istej konštante a proces sa môže s nenulovou pravdepodobnosťou dostať aj do záporných hodnôt.

Cox–Ingersoll–Rossov model (skrátene CIR model), ktorý bol odvodený v práci [13], odstraňuje možnosť výskytu záporných hodnôt okamžitej úrokovej miery. Model ponecháva predpoklad o drifte  $\kappa(\theta - r)$  v tvare mean reversion procesu. Na rozdiel od Vašíčkovho modelu však už volatilita nie je konštantná, ale je úmerná odmocnине z  $r$ , t. j.

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw. \quad (7.4)$$

Stochastickému procesu pre vývoj nejakej náhodnej veličiny, v ktorom stochastický člen  $dw$  je násobený odmocninou danej veličiny, hovoríme aj Besselov odmocninový proces. To znamená, že pri malých úrokových mierach je volatilita malá a ak by sa dosiahla nulová hodnota, volatilita má tiež nulovú hodnotu. Ďalší vývoj je potom deterministický a je určený driftom, ktorý je pre  $r = 0$  kladný. To znamená, že úroková miera sa zvýši a znovu nadobudne kladnú hodnotu.

V prípade, že pre koeficienty CIR procesu platí nerovnosť  $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ , tak dosiahnutie hodnoty  $r = 0$  má nulovú pravdepodobnosť. Intuitívne sa dá táto vlastnosť nahliadnuť aj pomocou zavedenia transformácie  $x = \ln r$ . Nulovej hodnote  $r = 0$  potom zodpovedá  $x = -\infty$  pre premennú  $x$ . Z Itóovej lemy dostávame

$$dx = (2e^{-x}(2\kappa\theta - \sigma^2) - \kappa)dt + e^{-x/2}\sigma dw.$$

Tabuľka 7.1: Prehľad jednofaktorových modelov okamžitej úrokovej miery v tvare  $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw$ .

Model	Stochastická rovnica pre $r$
Vašíček	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$
Dothan	$dr = \sigma r dw$
Brennan–Schwarz	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r dw$
Cox–Ingersoll–Ross	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma \sqrt{r} dw$
Cox–Ross	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dw$

Ak by bolo  $2\kappa\theta < \sigma^2$ , tak pre  $x \rightarrow -\infty$  aj drift procesu má limitu  $-\infty$ , čím sa proces ešte viac približuje k  $-\infty$ . Podmienkou  $2\kappa\theta \geq \sigma^2$  túto možnosť vylúčime.

Existujú viaceré ďalšie modely, ktoré sú zovšeobecnením uvedených dvoch modelov. Populárny model vývoja úrokovej miery bol navrhnutý Chan, Karolyi, Longstaff a Sandersom v práci [31]. Ich model má tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (7.5)$$

kde  $\gamma \geq 0$  je konštanta. Ich stručný prehľad so zahrnutím už spomenutých Vašíčkovho a CIR modelu je uvedený v tab. 7.1.

Poznamenajme, že existujú aj iné možnosti, ako dosiahnuť nezápornosť úrokovej miery. Ak použijeme proces typu (7.3) pre  $x_t$  a definujeme úrokovú mieru  $r_t = e^{x_t}$ , výsledkom je model označovaný ako exponenciálny Vašíčkov model okamžitej úrokovej miery

$$d \ln r = \kappa(\ln \theta - \ln r)dt + \sigma dw,$$

v ktorom je úroková miera  $r$  vždy kladná.

Ak parametre  $\kappa, \theta, \sigma$  nie sú konštanty, ale deterministické funkcie času, tak dostaneme model Blacka a Karasinského pre vývoj okamžitej úrokovej miery:

$$dr = \kappa(t)(\theta(t) - r)dt + \sigma(t)r^\gamma dw.$$

Podrobný prehľad kvalitatívnych a kvantitatívnych vlastností modelov vývoja úrokovej miery môže čitateľ nájsť v knihách Brigo a Mercuria [9] a Kwoka [40].

## 7.2 Hustota rozdelenia Itóovho stochastického procesu a Fokker–Planckova rovnica

V nasledovných riadkoch sa zamyslíme nad otázkou pravdepodobnostného rozloženia náhodnej premennej  $x = x(t)$ , ktorá je riešením všeobecného stochastického Itóovho procesu v tvare:

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw, \quad (7.6)$$

ktorý má drift  $\mu(x, t)$  a volatilitu  $\sigma(x, t)$ . Označme kumulatívnu distribučnú funkciu  $G = G(x, t) = \text{Prob}(x(t) < x | x(0) = x_0)$  procesu  $x(t), t \geq 0$ , ktorý spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu (7.6) a začína takmer isto z počiatočnej podmienky  $x_0$ . Potom kumulatívna distribučná funkcia  $G$  môže byť vypočítaná pomocou funkcie hustoty  $g = \partial G / \partial x$ , ktorá je riešením tzv. Fokker–Planckovej rovnice:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu g), \quad g(x, 0) = \delta(x - x_0). \quad (7.7)$$

Pomocou  $\delta(x - x_0)$  sme označili tzv. Diracovu delta funkciu lokalizovanú v bode  $x_0$ . Diracova delta funkcia nie je funkciou v klasickom zmysle, ale predstavuje distribúciu. Pre naše potreby si ju môžeme reprezentovať ako takú funkciu, pre ktorú platí:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \neq x_0, \\ +\infty & \text{ak } x = x_0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (7.8)$$

V našom prípade to znamená, že pre distribučnú funkciu  $G(x, 0)$  v čase  $t = 0$  platí:

$$G(x, 0) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi - x_0) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{ak } x < x_0, \\ 1 & \text{ak } x \geq x_0, \end{cases}$$

čiže proces  $x(t)$  sa v čase  $t = 0$  takmer isto nachádza v bode  $x_0$ .

Intuitívny dôkaz faktu, že funkcia hustoty  $g$  spĺňa Fokker–Planckovu rovnicu, sa dá previesť nasledovne: nech  $V = V(x, t)$  je ľubovoľná hladká funkcia s kompaktným nosičom, t. j.  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ . To znamená, že pre každú takú funkciu  $V$  existuje kompaktná množina  $[-R, R] \times [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \times (0, T)$  taká, že  $V = 0$  mimo tejto kompaktnej množiny. Podľa Itóovej lemy máme

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt + \sigma \frac{\partial V}{\partial x} dw.$$

Vzhľadom na to, že diferenciál Wienerovho procesu  $dw_{t_i} \approx w_{t_{i+1}} - w_{t_i}$  a premenná  $\sigma(x_i, t_i) \frac{\partial V}{\partial x}(x_i, t_i)$  sú v čase  $t_i$  navzájom nezávislé, tak potom s ohľadom na konštrukciu Itóovho integrálu z kapitoly 2 dostávame  $E_t(\sigma(\cdot, t) \frac{\partial V}{\partial x}(\cdot, t) dw_t) = 0$ , kde  $E_t$  je stredná hodnota náhodnej premennej vzhľadom na hustotu  $g(\cdot, t)$ . Potom

$$dE_t(V(\cdot, t)) = E_t(dV(\cdot, t)) = E_t\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) dt.$$

Poznamenajme, že funkcia  $V(x, t) \in C_0^\infty$  je nulová pre  $t = 0$  a  $t = T$  a pre  $|x| > R$ , kde  $R > 0$  je dostatočne veľké. Ak využijeme tento fakt a metódu integrovania *per-partes* v  $x$  a  $t$ -premenných, tak dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{d}{dt} E_t(V(\cdot, t)) dt = \int_0^T E_t\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) g(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} V(x, t) \left(-\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu g)\right) dx dt. \end{aligned}$$

Pripomeňme, že funkcia  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$  bola ľubovoľná, a preto diferenciálny výraz pre funkciu  $g$  v zátvorkách sa musí identicky rovnať nule. Tým pádom funkcia  $g$  vyhovuje Fokker–Planckovej rovnici (7.7). Ako sme už spomenuli, počiatočná podmienka  $g(x, 0) = \delta(x - x_0)$  je ekvivalentná s faktom, že proces  $x(t)$  takmer isto spĺňa  $x(0) = x_0$  v počiatočnom čase  $t = 0$ .

V krátkosti si rozoberme prípad, keď nás zaujíma rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej  $x(t)$  pre veľký čas  $t \rightarrow \infty$ . V takom prípade očakávame, že hustota  $g(x, t)$  náhodnej premennej  $x(t)$  sa stabilizuje na limitnej hustote  $\tilde{g}(x)$ , ktorá zodpovedá limitnému rozdeleniu premennej  $x(t)$  pre  $t \approx \infty$ . Z faktu, že  $g(x, t) \rightarrow \tilde{g}(x)$  pre  $t \rightarrow \infty$  dostávame  $\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \rightarrow 0$  pre  $t \rightarrow \infty$ . To znamená, že limitná hustota  $\tilde{g}(x)$  musí vyhovovať stacionárnej Fokker–Planckovej rovnici:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 \tilde{g}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \tilde{g}) = 0 \quad (7.9)$$

a podmienke na hustotu rozdelenia pravdepodobnosti:  $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x) dx = 1$ .

Ako príklad použitia Fokker–Planckovej rovnice nájdeme podmienené rozdelenie Vašíčkovho stochastického procesu  $r(t)$  v čase  $t$  pri

danej štartovacej hodnote  $r_0$  v čase  $t = 0$ . Fokker-Planckova rovnica pre tento proces má tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\kappa(\theta - r)f) \quad (7.10)$$

so začiatočnou podmienkou  $f(r, 0) = \delta(r - r_0)$ . Jej riešením je hustota  $f(r, t)$  náhodnej premennej  $r(t)$  za predpokladu, že  $r(0) = r_0$  takmer isto. Namiesto hustoty budeme hľadať charakteristickú funkciu  $\phi(s, t)$  tejto náhodnej premennej. Pripomeňme, že charakteristická funkcia  $\phi(s)$  náhodnej premennej  $X$  je definovaná ako stredná hodnota  $E(e^{isX})$ , kde  $i$  je komplexná jednotka,  $i^2 = -1$ . Teda

$$\phi(s, t) = E\left(e^{isr(t)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} f(r, t) dr.$$

Ďalej pripomeňme, že charakteristická funkcia normálneho rozdelenia  $N(\mu, \sigma^2)$  je  $\exp\left(i\mu s - \frac{\sigma^2}{2} s^2\right)$ . Rovnicu (7.10) teraz vynásobíme výrazom  $e^{isr}$  a budeme ju integrovať podľa premennej  $r$  od  $-\infty$  do  $\infty$ . Dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \frac{\partial f}{\partial t} dr = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} dr - \kappa\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \frac{\partial f}{\partial r} dr + \kappa \int_{-\infty}^{\infty} r e^{isr} \frac{\partial f}{\partial r} dr.$$

O funkcii hustoty  $f$  môžeme predpokladať, že má nulové limity:  $f(r, t) \rightarrow 0$  a  $\frac{\partial f}{\partial r}(r, t) \rightarrow 0$  pre  $r \rightarrow \pm\infty$ . Môžeme teda využiť vzťahy

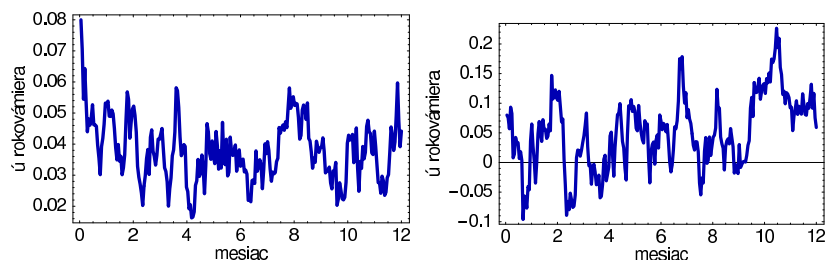
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \frac{\partial f}{\partial t} dr &= \frac{\partial \phi}{\partial t}, & \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \frac{\partial f}{\partial r} dr &= -is\phi, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} dr &= -s^2\phi, & \int_{-\infty}^{\infty} r e^{isr} \frac{\partial f}{\partial r} dr &= -\left(\phi + s \frac{\partial \phi}{\partial s}\right). \end{aligned}$$

Dostávame rovnicu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \kappa s \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 - \kappa\theta is\right) \phi,$$

ktorá predstavuje kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Metódou charakteristík (pozri napr. Ševčovič [58]) nájdeme jej všeobecné riešenie  $\phi$  v implicitnom tvare

$$F\left(se^{-\kappa t}, \ln \phi + \frac{\sigma^2}{4\kappa} s^2 - \theta is\right) = 0. \quad (7.11)$$



Obr. 7.2: Simulácia ročného vývoja denných dát úrokovej miery podľa Vašíčkovho modelu. Vľavo: parametre odhadnuté z dát z roku 2007 metódou maximálnej vierohodnosti, vpravo: 5-krát väčšia volatilita.

Pre čas  $t = 0$  máme

$$\phi(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isr} \delta(r - r_0) dr = e^{isr_0},$$

a teda dosadením do (7.11) nájdeme implicitný vzťah, t. j. funkciu  $F$ :

$$F(\xi_1, \xi_2) = ir_0\xi_1 + \frac{\sigma^2}{4\kappa}\xi_1^2 - \theta i\xi_1 - \xi_2.$$

To znamená, že riešenie  $\phi$  má tvar

$$\phi(s, t) = \exp\left(-\frac{s^2}{2} \left[\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right] + is[\theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}]\right).$$

Zrejme táto funkcia  $\phi(s, t)$  je charakteristická funkcia normálneho rozdelenia  $N(\bar{r}_t, \bar{\sigma}_t^2)$ , kde

$$\bar{r}_t = \theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}, \quad \bar{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}).$$

Ukázali sme teda, že stredná hodnota je váženým priemerom počiatkovej  $r_0$  a limitnej hodnoty  $\theta$ . Poznamenajme, že váha štartovacej hodnoty  $r_0$  je tým menšia, čím silnejší je efekt mean-reversion procesu, t. j. čím väčší je parameter  $\kappa$ .

Uvažujúc limitu pre  $t \rightarrow \infty$  dostaneme limitné rozdelenie úrokovej miery

$$r_{lim} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right).$$



Inou možnosťou, ako získať túto limitnú hustotu, je riešenie stacionárnej Fokker-Planckovej rovnice, ktorá v prípade Vašíčkovho modelu má tvar

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\kappa(\theta - r)\tilde{g}) = 0.$$

Jej riešenie sa dá poľahky nájsť v explicitnom tvare

$$\tilde{g}(r) = C \exp\left(-\frac{\kappa}{\sigma^2}(r - \theta)^2\right), \quad C = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi\sigma^2}}, \quad (7.12)$$

kde  $C > 0$  je renormalizačná konštanta taká, že  $\tilde{g}$  je hustota rozdelenia pravdepodobnosti, t. j.  $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(r) dr = 1$ . Všimnime si, že funkcia hustoty (7.12) predstavuje hustotu rozdelenia normálne rozdelenej náhodnej premennej so strednou hodnotou  $\theta$  a disperziou  $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$ .

Ako ďalší príklad budeme uvažovať Cox–Ingersoll–Rossov model úrokovej miery, pre ktorý vypočítame hustotu limitného rozdelenia. V CIR modeli predpokladáme, že proces úrokovej sadzby  $r$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici Besselovho odmocninového procesu (7.4). Stacionárna Fokker–Planckova rovnica má tvar

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\tilde{g}) - \frac{\partial}{\partial r} (\kappa(\theta - r)\tilde{g}) = 0. \quad (7.13)$$

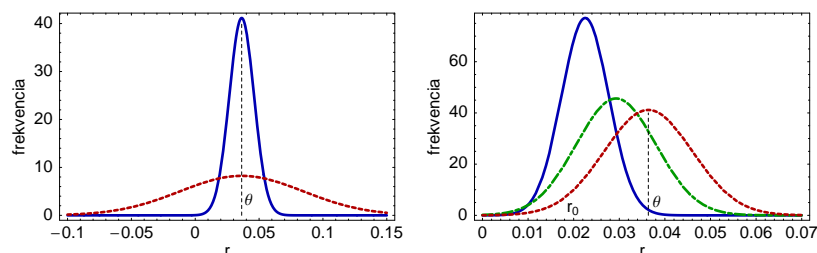
V prípade, že pre parametre procesu platí

$$\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} > 1,$$

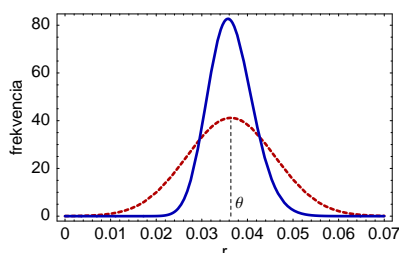
tak integráciou rovnice (7.13) môžeme nájsť riešenie v explicitnom tvare

$$\tilde{g}(r) = \begin{cases} \frac{1}{C} r^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1} \exp(-2\kappa r/\sigma^2), & r > 0, \\ 0, & r \leq 0, \end{cases} \quad (7.14)$$

kde  $C = \left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \Gamma\left(\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}\right)$  je renormalizačná konštanta a  $\Gamma$  je Gama funkcia. V tomto prípade limitná hustota (7.14) predstavuje hustotu rozdelenia náhodnej premennej s Gama rozdelením. Proces  $r$  takmer iste nenadobúda záporné hodnoty. To je jeden z hlavných dôvodov, prečo Cox–Ingersoll–Rossov model je realistickejším modelom v porovnaní s Vašíčkovým modelom úrokovej miery.



Obr. 7.3: Vľavo: limitné rozdelenie úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli pre parametre odhadnuté v tabuľke 7.2 a pre model s päťkrát väčšou volatilitou (prerušovaná čiara). Vpravo: Rozdelenie úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli pre parametre odhadnuté z dát a začiatočnú hodnotu úrokovej miery  $r_0 = 0,02$  - o 1 deň, o 1 týždeň a limitné rozdelenie (prerušovaná čiara).



Obr. 7.4: Limitné rozdelenie úrokovej miery vo Vašíčkovom (prerušovaná čiara) a CIR modeli s parametrami odhadnutými z dát v tabuľke 7.2.

Na obr. 7.3 vľavo je znázornené limitné rozdelenie úrokovej miery, ktorá sa riadi Vašíčkovým procesom. Hustoty zodpovedajú parametrom, pomocou ktorých boli generované simulácie na obr. 7.2. Vidíme, že pre príliš veľkú hodnotu volatility dostávame rozdelenie, ktoré s vysokou pravdepodobnosťou nadobúda aj záporné hodnoty úrokovej miery. Na obr. 7.3 vpravo uvažujeme parametre procesu odhadnuté z dát (pozri tabuľku 7.2). Predpokladajme, že súčasná hodnota úrokovej miery je 0,02. Znázornili sme rozdelenie úrokovej miery pre nasledujúce časy: 1 deň a 1 týždeň. Spolu s týmito hustotami je zakreslená limitná hustota. Na obr. 7.4 je porovnané limitné rozdelenie úrokovej miery podľa Vašíčkovho a CIR modelu, pričom parametre oboch modelov boli odhadnuté z tých istých dát (pozri opäť tabuľku 7.2).

### 7.3 Dvojfaktorové modely

Základnou myšlienkou dvoj- a viac faktorových modelov úrokovej miery je predstava, že okamžitá úroková miera  $r$  je funkciou dvoch faktorov, ktoré vo všeobecnosti označíme ako  $x$ ,  $y$ . To znamená, že  $r = r(x, y)$ , pričom stochastická rovnica pre faktor  $x$  môže závisieť aj od faktora  $y$  a naopak. Do tejto triedy dvojfaktorových modelov patria o.i. modely, v ktorých

- okamžitá úroková miera je súčtom dvoch faktorov  $x$  a  $y$ . Tieto faktory sa dajú interpretovať ako systematická a špekulatívna zložka. V tomto prípade  $r(x, y) = x + y$ ;
- stochastická rovnica pre okamžitú úrokovú mieru závisí od iných veličín na trhu. Napríklad  $r$  je úroková miera v nejakom štáte, pričom predpokladáme, že stochastická diferenciálna rovnica pre  $r$  závisí aj od celoeurópskej úrokovej miery  $r_e$ , ktorá má opäť stochastický charakter;
- niektorý parameter z jednofaktorového modelu nie je konštantný, ale náhodný. Príkladom sú modely so stochastickou volatilitou, kde  $r = x$  a pomocou premenej  $y$  je opísaná stochasticky závislá volatilita procesu  $r$ .

Vo všeobecnom prípade dvojfaktorového modelu teda budeme predpokladať, že faktory  $x$ ,  $y$  vyhovujú nasledovným stochastickým diferenciálnym rovniciam:

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2, \end{aligned}$$

pričom korelácia prírastkov  $dw_1$  a  $dw_2$  Wienerových procesov  $w_1$  a  $w_2$  je konštanta  $\rho$ , t. j.  $E(dw_1dw_2) = \rho dt$ . Uvedieme niekoľko konkrétnych príkladov.

V dvojfaktorovom Vašíčkovom a CIR modeli je okamžitá úroková miera súčtom dvoch nezávislých faktorov. Každý z nich je popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou rovnakého typu ako úroková miera v príslušnom jednofaktorovom modeli. Teda  $r = r_1 + r_2$ , kde  $r_1$  a  $r_2$  sú dané nasledovnými procesmi:

- v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

- v dvojfaktorovom CIR modeli

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dw_2. \end{aligned} \quad (7.16)$$

V konvergenčnom modeli, ktorý navrhli Corzová a Schwartz v [12], sa pomocou jednofaktorovej stochastickej diferenciálnej rovnice modeluje európska úroková miera. O domácej úrokovej miere sa predpokladá, že jej vývoj je opäť stochastický a závisí aj od európskej úrokovej miery. Pre európsku úrokovú mieru sa uvažuje Vašíčkov model

$$dr_e = c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e.$$

Proces pre domácu úrokovú mieru<sup>1</sup> je opísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_d = (a + b(r_e - r_d))dt + \sigma_d dw_d,$$

ktorá sa dá prepísať do tvaru

$$dr_d = b\left(\frac{a}{b} + r_e - r_d\right)dt + \sigma_d dw_d. \quad (7.17)$$

Ako sa dá vidieť z tvaru procesu (7.17), domáca úroková miera  $r_d$  je priťahovaná k hodnote  $\frac{a}{b} + r_e$ . O prírastkoch Wienerových procesov  $w_1$  a  $w_2$  predpokladáme, že môžu byť korelované s konštantnou koreláciou  $\rho$ , t. j.  $E(dw_1 dw_2) = \rho dt$ .

V modeloch so stochastickou volatilitou je prvým faktorom samotná okamžitá úroková miera a druhý faktor definuje jeho volatilitu. Existuje viacero možností pre voľbu druhého faktora. Jedným z nich je tzv. Fong-Vašíčkov model. V tomto modeli je okamžitá úroková miera a jej stochastická volatilita definovaná pomocou systému dvoch stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dw_1, \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dw_2. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>V modeli Corzovej a Schwartz je to španielska úroková miera pred prijatím eura.

To znamená, že stochastická volatilita okamžitej úrokovej miery  $r$  je odmocninou z druhého faktora  $y$ . Aj v tomto modeli prírastky Wienerových procesov  $w_1$  a  $w_2$  môžu byť korelované,  $E(dw_1 dw_2) = \rho dt$ .

## 7.4 Kalibrácia modelov

V nasledovných riadkoch ukážeme jeden z možných prístupov ku kalibrácii modelov úrokovej miery tvaru (7.5). Najskôr odvodíme odhady parametrov  $\kappa, \theta, \sigma$  Vašíčkovho modelu metódou maximálnej vierohodnosti. Potom tento postup zovšeobecníme tak, že pre všeobecný model tvaru (7.5) získame aproximáciu vierohodnostnej funkcie.

### 7.4.1 Metóda maximálnej vierohodnosti odhadu parametrov Vašíčkovho modelu

Podmienené rozdelenie úrokových mier vo Vašíčkovom modeli sme vypočítali riešením Fokker-Planckovej parciálnej diferenciálnej rovnice. Poznáme teda rozdelenie  $r_{t+\Delta t}$  pri danej štartovacej hodnote  $r_t$ . Teraz odvodíme tento výsledok iným spôsobom, ktorý bude užitočný aj pri odhadovaní parametrov modelov s nekonštantnou volatilitou.

Rovnicu vyjadrujúcu vývoj úrokovej miery  $dr_s = \kappa(\theta - r)ds + \sigma dw_s$  vynásobíme výrazom  $e^{\kappa s}$ . Využitím Itóovej lemy pre  $f(s, t) = e^{\kappa s} r$  po krátkych úpravách získame vzťah pre diferenciál

$$d(e^{\kappa s} r_s) = \kappa \theta e^{\kappa s} ds + \sigma e^{\kappa s} dw_s.$$

Po integrovaní posledného výrazu od času  $t$  po čas  $t + \Delta t$  dostaneme

$$\begin{aligned} e^{\kappa(t+\Delta t)} r_{t+\Delta t} - e^{\kappa t} r_t &= \kappa \theta \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s \\ &= (e^{\kappa(t+\Delta t)} - e^{\kappa t}) \theta + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s. \end{aligned}$$

Dostávame  $r_{t+\Delta t} = e^{-\kappa \Delta t} r_t + (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \theta + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s$ . Podmienené rozdelenie  $r_{t+\Delta t}$  pri danom  $r_t$  je normálne a jeho prvé dva

momenty sa dajú vyjadriť:

$$\begin{aligned} E(r_{t+\Delta t}|r_t) &= e^{-\kappa\Delta t}r_t + (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta, \\ \text{Var}(r_{t+\Delta t}|r_t) &= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} \text{Var}\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s\right) \\ &= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} E\left(\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s\right]^2\right) \\ &= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} (e^{\kappa s})^2 ds = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}), \end{aligned}$$

kde sme využili Itóovu izometriu z kapitoly 2. Teda

$$r_{t+\Delta t}|r_t \sim N\left(e^{-\kappa\Delta t}r_t + (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})\right).$$

Majme štatistické dáta úrokovej miery  $r_0, r_{\Delta t}, \dots, r_{N\Delta t}$  namerané v časových okamihoch  $0, \Delta t, \dots, N\Delta t$  a definujme

$$\nu_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t}), \quad \varepsilon_t = r_t - \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) - e^{-\kappa\Delta t}r_{t-\Delta t}. \quad (7.18)$$

Potom funkcia vierohodnosti  $L = L(\kappa, \theta, \sigma^2)$  náhodného vektora  $\varepsilon$  je súčinom hustôt normálnych rozdelení (pozri [52])

$$f(\varepsilon_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_t^2}} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2\nu_t^2}}.$$

Až na konštantu neovplyvňujúcu bod, v ktorom sa nadobúda maximum, sa logaritmus funkcie  $L$  dá vyjadriť ako

$$\ln L = -\frac{1}{2} \sum_{t=\Delta t}^{N\Delta t} \ln \nu_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu_t^2}. \quad (7.19)$$

Maximalizáciou tejto funkcie vzhľadom na  $\kappa, \theta, \sigma^2$  dostaneme odhady parametrov  $\kappa, \theta, \sigma^2$ .

Tabuľka 7.2: Odhady parametrov  $\alpha, \beta$  a  $\sigma$  modelu (7.20) okamžitej úrokovej miery pre rôzne hodnoty  $\gamma$ . Dáta reprezentovali BRIBOR z roku 2007.

$\gamma$	$\theta$	$\kappa$	$\sigma$
0	0,0364	41,9624	0,0888
0,5	0,0364	44,9889	0,4917
1	0,0362	49,0323	2,8446
1,5	0,0359	54,2752	17,0548

### 7.4.2 Gauss–Nowmanove odhady parametrov

V tejto časti sa budeme zaoberať tzv. Gauss–Nowmanovými odhadmi parametrov modelu okamžitej úrokovej miery

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (7.20)$$

ktoré boli navrhnuté v práci Nowmana [49]. Poznamenajme, že v prípade  $\gamma = 0$  dostávame Vašíčkov model z predchádzajúcej časti. Pre tento model sa odhady budú zhodovať s uvedenou metódou maximálnej vierohodnosti rozobratej v predchádzajúcom odseku. Pre ostatné parametre  $\gamma$  spravíme aproximáciu stochastického Itóovho integrálu.

Označme volatilitu procesu  $\sigma(r)$ . Rovnako ako v predchádzajúcej časti dostávame

$$\begin{aligned} e^{\kappa(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{\kappa t}r_t &= \kappa\theta \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s)e^{\kappa s} dw_s \\ &= (e^{\kappa(t+\Delta t)} - e^{\kappa t})\theta + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s)e^{\kappa s} dw_s. \end{aligned}$$

Pripomeňme, že v prípade Vašíčkovho modelu sme vedeli posledný integrál upraviť ako

$$\int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s)e^{\kappa s} dw_s = \int_t^{t+\Delta t} \sigma e^{\kappa s} dw_s = \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s,$$

čo nám potom následne umožnilo explicitne vypočítať jeho rozdelenie. Pre  $\sigma(r) = \sigma r^\gamma$ ,  $\gamma \neq 0$  môžeme tento integrál iba aproximovať. Budeme predpokladať, že volatilita  $\sigma(r_s)$  je na intervale  $[t, t + \Delta t)$  konštantná

Tabuľka 7.3: Okamžitá úroková miera z augusta 2003.

PRIBOR	BUBOR	BRIBOR	EURIBOR
5,1	9,42	5,21	2,08
5,16	9,41	5,15	2,07
5,12	9,38	5,27	2,07
5,07	9,36	6,51	2,06
4,94	9,21	6,48	2,06
5,1	8,74	6,41	2,06
5,2	8,73	6,45	2,06
5,28	8,75	6,38	2,06
5,45	9,19	5,73	2,06
5,7	9,33	5,35	2,06
5,34	9,94	5,295	2,07
5,22	10,00	5,575	2,07
5,16	9,99	5,65	2,07
5	10,33	5,22	2,09
4,95	10,50	5,14	2,15
4,65	10,53	5,16	2,45
4,28	10,51	5,12	2,1
4,23	9,82	5,13	2,1
4,08	10,48	6,9	2,09
5	10,57	7,385	2,09

a rovná sa hodnote na začiatku tohto intervalu, t. j.  $\sigma(r_s) \approx \sigma r_t^\gamma$  pre  $s \in [t, t + \Delta t)$ . Teda

$$\int_t^{t+\Delta t} \sigma(r_s) e^{\kappa s} dw_s \approx \sigma r_t^\gamma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s.$$

Ďalej už môžeme postupovať rovnako ako vo Vašíčkovom modeli. Výsledkom bude aproximácia funkcie vierohodnosti, ktorá má opäť tvar (7.19), pričom výrazy  $\nu_t, \varepsilon_t$  vystupujúce v (7.19) sa zmenia nasledovne

$$\nu_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}) r_{t-\Delta t}^{2\gamma}, \quad \varepsilon_t = r_t - \theta (1 - e^{-\kappa\Delta t}) - e^{-\kappa\Delta t} r_{t-\Delta t}.$$

Maximalizáciou dostaneme odhady parametrov  $\kappa, \theta, \sigma^2$ . Praktický príklad odhadu parametrov na základe maximalizácie funkcie vierohodnosti je v tab. 7.2.

### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Uvažujme Vašíčkov model s hodnotami parametrov z tab. 7.2 ( $\gamma = 0$ ). Nájdite hustotu okamžitej úrokovej miery o jeden mesiac, ak jej teraj-



šia hodnota je 3,5% p.a. Čomu sa rovná stredná hodnota a štandardná odchýlka? Nájdite 95% interval spoľahlivosti odhadu strednej hodnoty.

2. Riešením stacionárnej Fokker–Planckovej rovnice nájdite limitné rozdelenie Chan, Karolyi, Longstaff a Sandersovho modelu úrokovej miery, v ktorom  $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw$  pre  $\gamma > 0, \gamma \neq 1/2$ .
3. Metódou maximálnej vierohodnosti odhadnite parametre  $\kappa, \theta, \sigma$  Vašíčkovho a CIR modelu pre dáta okamžitej úrokovej miery rôznych európskych časových štruktúr PRIBOR – Česká republika, BUBOR – Maďarsko, BRIBOR – Slovensko a EURIBOR – Európa), ktoré sú v tabuľke 7.3. Porovnajte hodnoty parametra dlhodobej úrokovej miery  $\theta$ .

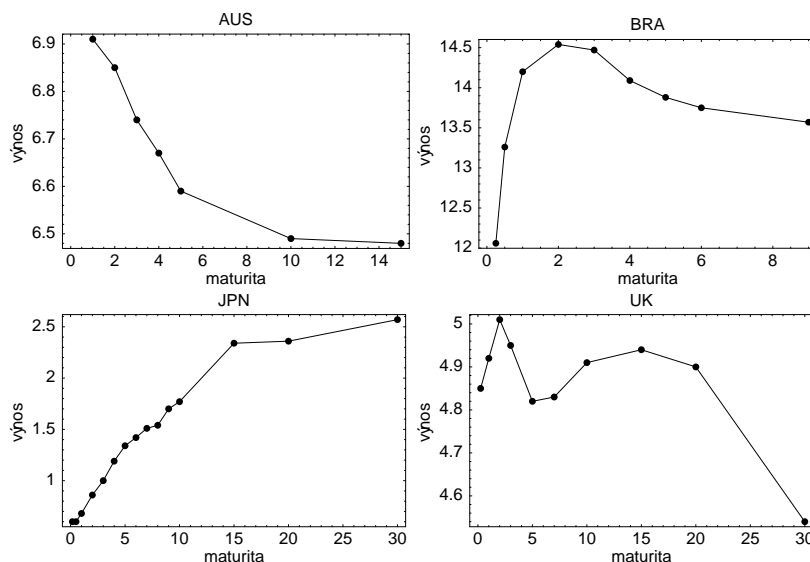
---

## Kapitola 8

# *Oceňovanie derivátov úrokovej miery*

---

V tejto kapitole sa budeme zaoberať metódami oceňovania derivátov odvodených od úrokovej miery. V súčasnosti tieto deriváty pravdepodobne patria medzi najpredávanejšiu triedu finančných derivátov. Medzi najjednoduchšie deriváty patria dlhopisy, deriváty typu swap, cap, floor, opcie na dlhopisy a ďalšie. Pri analýze derivátov úrokovej miery je potrebné zohľadniť okrem samotného podkladového aktíva (okamžitá úroková miera) aj celú výnosovú krivku (yield-curve), ktorá opisuje časovú štruktúru úrokových mier pre jednotlivé dĺžky doby splatnosti. Deriváty úrokovej miery sú charakterizované vlastnosťou, že ich výplata (pay-off) je závislá od hodnoty okamžitej úrokovej miery a doby do splatnosti. Kontrakt, na základe ktorého v stanovenom čase  $T$  dostaneme stanovenú čiastku  $X$ , nazývame bezkupónový dlhopis alebo aj diskontná obligácia. Hodnotu  $X$  nazývame menovitá hodnota



Obr. 8.1: Časová štruktúra  $R(t, T)$  výnosov štátnych dlhopisov v percentách za rok zo dňa  $t = 27. 5. 2008$ , v závislosti od maturity  $T$  (uvádzanej v rokoch) pre rôzne krajiny: Austrália, Brazília, Japonsko a Veľká Británia.

a čas  $T$  doba splatnosti. Ak dlhopis v stanovených časových intervaloch vypláca stanovené čiastky, tak taký dlhopis sa nazýva kupónový a pravidelne vyplácané čiastky sa nazývajú kupóny. Keďže kupónový dlhopis je ekvivalentný portfóliu bezkupónových dlhopisov s vhodnými parametrami, tak v ďalšom texte budeme študovať iba bezkupónové dlhopisy (pozri napr. Melicherčík [47, 45, 46]).

## 8.1 Dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier

Bezcupónový dlhopis predstavuje jeden zo základných kontraktov naviazaných na podkladový proces, ktorým je okamžitá úroková miera. Dlhopis je dohoda zaplatiť určitú čiastku v súčasnosti oproti prísľubu obdržania vyššej sumy v budúcnosti. Čas splatnosti (maturity) dlhopisu zvyčajne označujeme  $T$ . Cena dlhopisu  $P(t, T)$  je teda funkcia okamžitého času  $t$  a doby splatnosti  $T$ . Samozrejme závisí aj na podkladovom

aktíve - úrokovej miere. Najjednoduchším derivátom úrokovej miery je teda dlhopis, ktorý v čase splatnosti  $T$  vyplatí jeho vlastníkovi jednotkovú sumu. Cenami dlhopisov je určená časová štruktúra úrokových mier  $R(t, T)$ , ktorá je definovaná vzťahom:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

kde  $P(t, T)$  je cena dlhopisu,  $R(t, T)$  je úroková miera dlhopisu v dnešnom dni  $t$  a so splatnosťou v expiračnom čase  $T$ . To znamená, že časová štruktúra úrokových mier sa z ceny dlhopisu dá vyjadriť ako:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}.$$

Okamžitá úroková miera (short rate)  $r_t$  v čase  $t$  je potom úroková miera  $R(t, T)$  s okamžitou splatnosťou  $T = t$ , t. j.

$$r_t = R(t, t).$$

Na obr. 8.1 sú ukážky časovej štruktúry úrokových mier pre rôzne krajiny zo dňa 27. 5. 2008. Dôležité je všimnúť si, že časová štruktúra môže mať rôzny priebeh, čo sa týka rastu, resp. klesania výnosov, v závislosti na dobe splatnosti dlhopisu.

V tab. 8.1, prevzatej z práce Urbánovej Csajkovej [60], je ukážka deskriptívnej štatistiky okamžitých úrokových mier a úrokových mier dlhopisov so splatnosťou jeden rok pre rôzne európske časové štruktúry úrokových mier. Východiskom pre časovú štruktúru úrokových mier v krajinách Eurozóny je EURIBOR so svojou okamžitou úrokovou mierou (overnight alebo aj short-rate) EONIA, ktorá je počítaná ako vážený priemer medzi 48 európskymi bankami. Časové štruktúry úrokových mier stredoeurópskych štátov nesú názvy odvodené od prvých písmen svojich hlavných miest: Bratislava – BRIBOR, Praha – PRIBOR, Varšava – WIBOR, Budapešť – BUBOR. Azda najznámejšie sú Londýnsky LIBOR a európsky EURIBOR, resp. EUROLIBOR. Tieto časové štruktúry sú vo väčšine prípadov tvorené okamžitou úrokovou mierou (nazývanou aj jednodňovou alebo overnight, či short-rate) a úrokovými mierami dlhopisov so splatnosťami od 1,2,3 týždňov až po 1, 3, 6, 12 mesiacov.

Tabuľka 8.1: Kvartálna deskriptívna štatistika rôznych európskych časových štruktúr úrokových mier. Zachytená je stredná hodnota (Stred) a štandardná odchýlka (STD) pre okamžitú úrokovú mieru (on≡over-night) a úrokovú mieru dlhopisu so splatnosťou jeden rok v percentách p.a.

		1/4 2003		2/4 2003		3/4 2003		4/4 2003	
		Stred	STD	Stred	STD	Stred	STD	Stred	STD
BRIBOR	on	5,75	1,041	6,27	1,279	5,63	0,802	5,48	0,992
	1y	5,48	0,205	5,42	0,208	5,80	0,066	5,50	0,033
WIBOR	on	6,65	0,761	5,76	0,359	5,22	0,438	5,17	0,438
	1y	5,95	0,138	5,19	0,255	4,97	0,053	5,79	0,380
BUBOR	on	5,42	1,813	7,08	0,879	9,58	0,547	10,52	1,213
	1y	6,57	0,433	6,76	0,773	8,80	0,207	10,02	1,334
PRIBOR	on	2,52	0,107	2,44	0,045	2,06	0,135	1,94	0,032
	1y	2,43	0,130	2,33	0,084	2,13	0,063	2,19	0,061
EURIBOR	on	2,77	0,188	2,44	0,199	2,07	0,120	2,02	0,169
	1y	2,54	0,140	2,23	0,189	2,20	0,106	2,36	0,081
EUROLIB	on	2,79	0,196	2,47	0,196	2,08	0,101	2,02	0,139
	1y	2,54	0,139	2,23	0,187	2,20	0,105	2,35	0,085

### 8.1.1 Jednofaktorové rovnovážne modely

Pri analýze tzv. jednofaktorových rovnovážnych modelov vychádzame z opisu okamžitej úrokovej miery, ktorá slúži ako podkladové aktívum pre jej derivát – bezkupónový dlhopis. Pre tento opis budeme uvažovať všeobecný jednofaktorový model typu (7.1) opísaný v predošlej kapitole, t. j.

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw.$$

V nasledovných riadkoch odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P$  so splatnosťou v čase  $T$ . Táto cena závisí od času  $t$ , expiračného času  $T$  a od hodnoty okamžitej úrokovej miery  $r$ , t. j.  $P = P(r, t, T)$ . Neskôr nahliadneme, že cena dlhopisu závisí len od času  $\tau = T - t$  ostávajúceho do expirácie. Z Itóovej lemy dostávame

$$\begin{aligned} dP &= \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw \\ &= \mu_B(t, r)dt + \sigma_B(t, r)dw, \end{aligned} \quad (8.1)$$

kde  $\mu_B(r, t)$  a  $\sigma_B(r, t)$  označujú drift a volatilitu ceny dlhopisu. Zostrojíme portfólio z dlhopisov s dvomi maturitami. Portfólio bude pozostávať z jedného dlhopisu s maturitou  $T_1$  a z  $\Delta$  dlhopisov s maturitou  $T_2$ .

Jeho hodnota  $\pi$  teda je:

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2). \quad (8.2)$$

Zmena  $d\pi$  jeho hodnoty je potom daná

$$\begin{aligned} d\pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= (\mu_B(r, t, T_1) + \Delta\mu_B(r, t, T_2)) dt \\ &\quad + (\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta\sigma_B(r, t, T_2)) dw. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ak zvolíme pomer medzi počtami dlhopisov  $\Delta$  tak, že platí

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)}, \quad (8.4)$$

tak náhodná časť v (8.3) sa eliminuje a dostaneme tak bezrizikové portfólio, ktoré má iba deterministickú časť

$$d\pi = \left( \mu_B(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} \mu_B(t, r, T_2) \right) dt.$$

Aby sme vylúčili možnosť arbitráže, výnos takéhoto portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere  $r$ , t. j.  $d\pi = r\pi dt$ . Teda

$$\mu_B(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} \mu_B(t, r, T_2) = r\pi.$$

Po dosadení hodnoty portfólia  $\pi$  z (8.2) a (8.4) dostaneme

$$\begin{aligned} &\mu_B(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} \mu_B(t, r, T_2) \\ &= r \left( P(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} P(t, r, T_2) \right), \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že musí platiť rovnosť

$$\frac{\mu_B(t, r, T_1) - rP(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_1)} = \frac{\mu_B(t, r, T_2) - rP(t, r, T_2)}{\sigma_B(t, r, T_2)}.$$

Keďže maturity  $T_1$  a  $T_2$  boli ľubovoľné, tento výraz nemôže závisieť od maturity dlhopisu, t. j. existuje taká funkcia  $\tilde{\lambda}(r, t)$ , že je splnená identita

$$\tilde{\lambda}(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (8.5)$$

pre ľubovoľnú maturitu  $T$ . Táto funkcia  $\tilde{\lambda}$  sa nazýva trhová cena rizika, lebo vyjadruje oakavany nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Dosadením funkcií  $\mu_B$  a  $\sigma_B$  do (8.5) nakoniec dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu  $P(r, t, T)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \tilde{\lambda}(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (8.6)$$

V okamihu splatnosti je hodnota dlhopisu rovná jednotke, a to bez ohladu na aktuálnu hodnotu okamžitej úrokovej miery. Teda funkcia  $P(r, T, T)$  musí splnat terminálovú podmienku

$$P(r, T, T) = 1 \quad \text{pre každe } r > 0.$$

### Vaııkov model

Východiskom Vaııkovho modelu časovej struktury úrokových mier, ktorý bol navrhnutý českým matematikom a tatistikom O. Vaııkom, je opis okamžitej úrokovej miery prostredníctvom jednofaktorového modelu (7.3), t. j.

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw.$$

Cenu dlhopisu budeme hladat ako funkciu okamžitej úrokovej miery  $r$  a času  $\tau$ , ktorý zostáva do jeho splatnosti, t. j.  $\tau = T - t$ . Funkcia  $P(r, \tau)$  potom splňa parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \tilde{\lambda}(r, t)\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

a zaıatocnu podmienku  $P(r, 0) = 1$  pre každe  $r > 0$ . Pre konštantnú trhovú cenu rizika  $\tilde{\lambda}(r, t) \equiv \lambda$  budeme riešenie hladat v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

pričom funkcie  $A, B$  budú splnat zaıatocne podmienky  $A(0) = 1$ ,  $B(0) = 0$ . Vypoıtame derivácie vystupujúce v rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= e^{-Br}(\dot{A} - A\dot{B}r), \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= -BAe^{-Br}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B^2Ae^{-Br}. \end{aligned}$$

Ak ich následne dosadíme do parciálnej diferenciálnej rovnice, tak dostaneme:

$$(\dot{A} - A\dot{B}r) + \frac{\sigma^2}{2}B^2A - (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)AB - rA = 0.$$

Združíme tie členy, ktoré obsahujú člen  $r$  a tie, ktoré neobsahujú  $r$ :

$$\left(-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB\right) + rA(\dot{B} + \kappa B - 1) = 0.$$

Aby bola táto rovnosť splnená pre všetky  $r$ , obe zátvorky musia byť identicky nulové, teda

$$\begin{aligned} -\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB &= 0, \\ \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Obyčajná diferenciálna rovnica pre  $B$  je lineárna a preto jej riešenie spĺňajúce začiatočnú podmienku  $B(0) = 0$  je možné ľahko nájsť v tvare:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}. \quad (8.7)$$

Keď poznáme funkciu  $B$ , vieme vypočítať  $A$ . Integrovaním rovnice pre  $A$  dostávame

$$\ln A = \int \frac{d \ln A}{d\tau} = \int \frac{\sigma^2}{2}B^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)B d\tau.$$

Dosadením funkcie  $B(\tau)$ , vypočítaním integrálu a využitím podmienky  $A(0) = 1$  napokon dostaneme

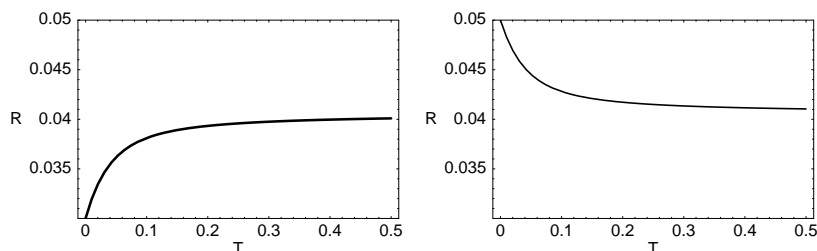
$$\ln A(\tau) = \left[ \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2, \quad (8.8)$$

kde

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}.$$

Ak použijeme zápis  $R(r, t, t + \tau)$  pre časovú štruktúru úrokových mier v čase  $t$  so splatnosťou v čase  $t + \tau$ , pričom okamžitá úroková miera je





Obr. 8.2: Časová štruktúra úrokových mier  $R(r, t, T)$  vypočítaná na základe Vašíčkovho modelu pre dve rôzne hodnoty okamžitej úrokovej miery  $r$  ( $r = 0,03$  a  $r = 0,05$ ) v danom čase  $t$ .

$r$ , tak potom sa  $R(r, t, t + \tau)$  pre Vašíčkov model dá vyjadriť ako

$$\begin{aligned} R(r, t, t + \tau) &= -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau} \\ &= \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) R_\infty + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \frac{(1 - e^{-\kappa\tau})^2}{\tau} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} r \end{aligned}$$

a zrejme platí  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, t, t + \tau) = R_\infty$ .

### Cox–Ingersoll–Ross model

Ďalším jednofaktorovým modelom opisujúcim cenu dlhopisu ako derivátu okamžitej úrokovej miery je Cox–Ingersoll–Ross model, skrátene CIR model. Jeho východiskom je opis okamžitej úrokovej miery pomocou CIR modelu (7.4), t. j.

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw.$$

Pripomeňme, že ak parametre modelu spĺňajú nerovnosť  $2\kappa\theta/\sigma^2 > 1$ , tak okamžitá úroková miera je takmer isto nezáporná. Vašíčkov model okamžitej úrokovej miery túto vlastnosť nemá. Cenu dlhopisu znovu vyjadríme pomocou premennej  $\tau$ , označujúcej čas zostávajúci do expirácie, t. j.  $\tau = T - t$ . Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu  $P = P(r, \tau)$  má potom tvar

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \tilde{\lambda}(r, t)\sigma\sqrt{r})\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (8.9)$$

so začiatočnou podmienkou  $P(r, 0) = 1$ , pre každé  $r > 0$ . Pre trhovú cenu rizika v tvare  $\tilde{\lambda}(r, t) = \lambda\sqrt{r}$ , kde  $\lambda$  je konštanta, budeme riešenie opäť hľadať v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

pričom funkcie  $A, B$  spĺňajú začiatočné podmienky  $A(0) = 1, B(0) = 0$ . Dosadením tohto tvaru riešenia do rovnice (8.9) dostaneme rovnosť

$$\left(-\dot{A} - \kappa\theta AB\right) + \left(\dot{B} + (\kappa + \lambda\sigma)B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 - 1\right)Ar = 0,$$

ktorá musí platiť pre každé  $r > 0, \tau > 0$ . Dostávame tak systém rovníc

$$\begin{aligned}\dot{A} + \kappa\theta AB &= 0, \\ \dot{B} + (\kappa + \lambda\sigma)B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 - 1 &= 0,\end{aligned}$$

ktorý spolu so začiatočnými podmienkami tvorí systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie  $A, B$ . Z druhej rovnice vypočítame funkciu  $B$ . Ide o separovateľnú obyčajnú diferenciálnu rovnicu, a teda platí

$$\frac{dB}{-\frac{\sigma^2}{2}B^2 - (\kappa + \lambda\sigma)B + 1} = d\tau. \quad (8.10)$$

Na zjednodušenie výrazov zaveďme označenie

$$\psi = \kappa + \lambda\sigma, \quad \phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2} = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}. \quad (8.11)$$

Potom

$$\begin{aligned}\frac{1}{-\frac{\sigma^2}{2}B^2 - (\kappa + \lambda\sigma)B + 1} &= -\frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{\left(B + \frac{\psi + \phi}{\sigma^2}\right)\left(B + \frac{\psi - \phi}{\sigma^2}\right)} \\ &= -\frac{1}{\phi} \left( \frac{1}{B + \frac{\psi - \phi}{\sigma^2}} - \frac{1}{B + \frac{\psi + \phi}{\sigma^2}} \right).\end{aligned}$$

Integrovaním rovnice (8.10) potom dostaneme

$$-\frac{1}{\phi} \ln \left( \frac{B + \frac{\psi - \phi}{\sigma^2}}{B + \frac{\psi + \phi}{\sigma^2}} \right) = \tau + c_1,$$

kde  $c_1$  je konštanta. Upravíme ju na tvar

$$\frac{B(\tau) + \frac{\psi + \phi}{\sigma^2}}{B(\tau) + \frac{\psi - \phi}{\sigma^2}} = e^{\phi\tau} c_2,$$

z ktorého nakoniec určíme konštantu  $c_2$  prostredníctvom dosadenia začiatočnej podmienky  $B(0) = 0$  v čase  $\tau = 0$ , t. j.  $c_2 = \frac{\psi + \phi}{\psi - \phi}$ . Dostaneme výraz

$$B(\tau) = \frac{\frac{\psi + \phi}{\sigma^2} (e^{\phi\tau} - 1)}{1 - \frac{\psi + \phi}{\psi - \phi} e^{\phi\tau}},$$

ktorý sa dá ešte upraviť na tvar štandardne uvádzaný v literatúre

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi}. \quad (8.12)$$

Keďže funkcia  $B$  je už známa, tak funkciu  $A$  už ľahko vypočítame integráciou rovnice  $\dot{A} + \kappa\theta AB = 0$ :

$$\ln A(\tau) = - \int_0^\tau \kappa\theta B(s) ds,$$

z čoho po vypočítaní uvedeného integrálu a jednoduchých algebrických úpravách výsledku dostaneme

$$A(\tau) = \left( \frac{2\phi e^{(\phi + \psi)\tau/2}}{(\phi + \psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}. \quad (8.13)$$

Podobne ako v prípade Vašíčkovho modelu je časová štruktúra úrokových mier  $R(r, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau}$  lineárnou funkciou okamžitej úrokovej miery  $r$ . Platí

$$\begin{aligned} R(r, t, t + \tau) &= -\frac{1}{\tau} \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2\phi e^{(\phi + \psi)\tau/2}}{(\phi + \psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \tau. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Limita časovej štruktúry úrokových mier pre dobu do splatnosti  $\tau = T - t$  idúcu do nekonečna nezávisí od okamžitej úrokovej miery. Platí:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\phi+\psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right) = -\frac{\sigma^2}{\phi+\psi},$$

kde sme na výpočet druhej limity použili l'Hospitalovo pravidlo. To znamená, že existuje limita časovej štruktúry úrokových mier pre dobu do splatnosti idúcu do nekonečna. Táto limita sa dá explicitne vyjadriť:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, t, t + \tau) = \frac{2\kappa}{\phi + \psi} \theta.$$

### 8.1.2 Dvojfaktorové rovnovážne modely

Pri odvodzovaní všeobecného dvojfaktorového modelu časovej štruktúry úrokových mier budeme predpokladať, že faktory  $x, y$  vyhovujú nasledujúcim stochastickým diferenciálnym rovniciam:

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2, \end{aligned}$$

pričom korelácia  $dw_1$  a  $dw_2$  je konštanta  $\rho$ , t. j.  $E(dw_1 dw_2) = \rho dt$ . Ako už bolo povedané, o okamžitej úrokovej miere predpokladáme, že je funkciou týchto dvoch faktorov, čiže  $r = r(x, y)$ . V nasledovnom texte odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu príslušného dlhopisu ako derivátu okamžitej úrokovej miery. Budeme postupovať rovnakým spôsobom ako v prípade jednofaktorového modelu. Zostavíme bezrizikové portfólio pozostávajúce z niekoľkých dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti.

Označme  $P = P(x, y, t)$  cenu dlhopisu závislú od faktorov  $x, y$  a času  $t$ . Použitím viacrozmernej Itóovej lemy (pozri kapitolu 2) dostaneme

$$dP = \mu dt + \sigma_1 dw_1 + \sigma_2 dw_2, \quad (8.15)$$

kde  $\mu = \mu(x, y, t)$  a  $\sigma_i = \sigma_i(x, y, t)$  sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_1 &= \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \sigma_2 = \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Zostrojíme portfólio  $\pi$  pozostávajúce z troch dlhopisov s maturitami  $T_1, T_2$  a  $T_3$ . Množstvá dlhopisov označíme  $V_1, V_2$  a  $V_3$ . Teda  $\pi = P(T_1)V_1 +$

$P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3$ , kde prostredníctvom označenia  $P(T_i)$  sme označili cenu dlhopisu s maturitou  $T_i, i = 1, 2, 3$ . Zmena hodnoty portfólia  $\pi$  je potom daná súčtom

$$\begin{aligned} d\pi &= V_1 dP(T_1) + V_2 dP(T_2) + V_3 dP(T_3) \\ &= (V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3)) dt \\ &\quad + (V_1 \sigma_1(T_1) + V_2 \sigma_1(T_2) + V_3 \sigma_1(T_3)) dw_1 \\ &\quad + (V_1 \sigma_2(T_1) + V_2 \sigma_2(T_2) + V_3 \sigma_2(T_3)) dw_2. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Princípom odvedenia modelu pre oceňovanie dlhopisu je opäť konštrukcia bezrizikového portfólia. To znamená, že z vývoja ceny portfólia sa snažíme vylúčiť náhodnosť. Zvoľme preto množstvá dlhopisov  $V_1, V_2, V_3$  tak, že platí

$$\begin{aligned} V_1 \sigma_1(T_1) + V_2 \sigma_1(T_2) + V_3 \sigma_1(T_3) &= 0, \\ V_1 \sigma_2(T_1) + V_2 \sigma_2(T_2) + V_3 \sigma_2(T_3) &= 0. \end{aligned}$$

Bezarbitrážnosť modelu znamená, že výnos takto skonštruovaného portfólia sa musí rovnať bezrizikovej úrokovej miere  $r$ , t. j.  $d\pi = r\pi dt$ . To ale znamená, že musí platiť tretia identita

$$V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3) = \pi r$$

pre množstvá dlhopisov  $V_1, V_2, V_3$ . Posledná rovnosť sa dá napísať aj v tvare

$$V_1(\mu(T_1) - rP(T_1)) + V_2(\mu(T_2) - rP(T_2)) + V_3(\mu(T_3) - rP(T_3)) = 0.$$

Dostávame tak sústavu lineárnych algebraických rovníc pre množstvá dlhopisov  $V_1, V_2, V_3$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(T_1) & \sigma_1(T_2) & \sigma_1(T_3) \\ \sigma_2(T_1) & \sigma_2(T_2) & \sigma_2(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Táto sústava má nenulové riešenie práve vtedy, keď sú riadky matice lineárne závislé. Ak by bol druhý riadok násobkom prvého, tak v modeli by bol vlastne len jeden zdroj náhodnosti a v konečnom dôsledku by sme tak dostali iba jednofaktorový model. Preto musí byť tretí riadok

lineárnou kombináciou predchádzajúcich dvoch. Teda existujú  $\lambda_1, \lambda_2$  také, že platí

$$\mu(T_i) - rP(T_i) = \lambda_1\sigma_1(T_i) + \lambda_2\sigma_2(T_i), \quad \text{pre } i = 1, 2, 3.$$

Keďže doby splatnosti (maturity)  $T_i$  boli ľubovoľné, tak funkcie  $\lambda_1, \lambda_2$  nemôžu závisieť od maturity dlhopisov. Teda

$$\lambda_1 = \lambda_1(x, y, t), \quad \lambda_2 = \lambda_2(x, y, t).$$

Dosadením  $\mu, \sigma_1$  a  $\sigma_2$  napokon dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_1\sigma_x)\frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2\sigma_y)\frac{\partial P}{\partial y} \\ + \frac{\sigma_x^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho\sigma_x\sigma_y\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} - r(x, y)P = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Poznamenajme, že funkcie  $\lambda_1, \lambda_2$  nazývame trhovými cenami rizika jednotlivých faktorov.

### Dvojfaktorový Vašíčkov a CIR model

V tejto časti sa budeme zaoberať dvojfaktorovými modelmi časovej štruktúry úrokových mier, ktoré sú založené na predpoklade o vývoji okamžitej úrokovej miery  $r$ . Vo Vašíčkovom dvojfaktorovom modeli predpokladáme, že  $r = r_1 + r_2$ , kde faktory  $r_1, r_2$  sú riešeniami stochastických diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2dw_2. \end{aligned}$$

Budeme predpokladať nulovú koreláciu  $\rho$  medzi prírastkami  $dw_1, dw_2$ . Odvodíme teraz cenu dlhopisu  $P(r_1, r_2, \tau)$  v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli za predpokladu, že trhové ceny rizika  $\lambda_1, \lambda_2$  sú konštanty. Funkcia  $P$  je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1)\frac{\partial P}{\partial r_1} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2)\frac{\partial P}{\partial r_2} \\ + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - (r_1 + r_2)P = 0, \end{aligned}$$

kde  $\tau = T - t$  reprezentuje dobu do splatnosti (maturity) dlhopisu. Riešenie budeme hľadať v separovanom tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau).$$

Zo začiatočnej podmienky  $P(r_1, r_2, 0) = 1$  pre každé  $r_1, r_2 > 0$  môžeme odvodiť začiatočné podmienky pre funkcie  $P_1$  a  $P_2$ , t. j.  $P_1(r_1, 0) = 1$ ,  $P_2(r_2, 0) = 1$ . Dosadením výrazu  $P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau)$  do rovnice a po krátkych úpravách dostaneme:

$$P_1 \left[ -\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2) \frac{\partial P_2}{\partial r_2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2} - rP_2 \right] \\ + P_2 \left[ -\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1) \frac{\partial P_1}{\partial r_1} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2} - rP_1 \right] = 0.$$

Keďže  $P_1$  závisí len od  $r_1, \tau$  a naopak,  $P_2$  závisí len od  $r_2, \tau$ , tak posledná identita je splnená práve vtedy, keď sa obe zátvorky rovnajú nule, t. j.

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1) \frac{\partial P_1}{\partial r_1} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2} - rP_1 = 0, \\ \frac{\partial P_2}{\partial \tau} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2) \frac{\partial P_2}{\partial r_2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2} - rP_2 = 0.$$

To znamená, že  $P_i, i = 1, 2$ , sú riešenia jednofaktorového Vašíčkovho modelu s parametrami  $\kappa_i, \theta_i, \sigma_i$  a trhovou cenou rizika  $\lambda_i$  pre  $i = 1, 2$ . Teda

$$P(r_1, r_2, \tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}, \quad (8.18)$$

kde funkcie  $A_i(\tau), B_i(\tau)$  sú vyjadrené vzorcami (8.8) a (8.7).

Analogický výsledok dostávame pre dvojfaktorový CIR model, kde jednotlivé faktory  $r_1, r_2$  vyhovujú stochastickej diferenciálnej rovnici (7.16) s nulovou koreláciou prírastkov  $\rho = 0$ . V tomto prípade je cena dlhopisu opäť súčinom riešení z jednofaktorového CIR modelu v tvare (8.18), pričom funkcie  $A_i(\tau), B_i(\tau)$  sú vyjadrené vzorcami (8.13) a (8.12).

Časová štruktúra úrokových mier je potom v oboch modeloch súčtom úrokových mier z príslušných jednofaktorových modelov:

$$R(r_1, r_2, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r_1, r_2, \tau)}{\tau} = -\frac{\ln P_1(r_1, \tau)}{\tau} - \frac{\ln P_2(r_2, \tau)}{\tau}.$$

Špeciálne to znamená, že úroková miera s dobou do splatnosti  $\tau$  je lineárnou funkciou zložiek okamžitej úrokovej miery  $r_1$  a  $r_2$ . Funkcie  $P_1$  a  $P_2$  majú tvar  $P_i = A_i e^{-B_i r_i}$ , a teda

$$R(r_1, r_2, t, t + \tau) = -\frac{\ln A_1 A_2}{\tau} + \frac{B_1}{\tau} r_1 + \frac{B_2}{\tau} r_2.$$

### Konvergenčný model

Pripomeňme, že v konvergenčnom modeli Corzovej a Schwarza [12] sa o domácej úrokovej miere  $r_d$  predpokladá, že jej vývoj je stochastický a spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dr_d = (\alpha + \beta(r_e - r_d))dt + \sigma_d dw_2,$$

pričom koeficient  $r_e$  reprezentuje európsku úrokovú mieru,<sup>1</sup> ktorá sama osebe sleduje stochastický proces

$$dr_e = \gamma(\delta - r_e)dt + \sigma_e dw_e.$$

Ukážeme, že za predpokladu konštantných trhových cien rizika  $\lambda_d, \lambda_e$  sa ceny domácich dlhopisov dajú vyjadriť v explicitnom tvare. Ceny európskych dlhopisov dostávame z jednofaktorového Vašíčkovho modelu tiež v explicitnom tvare. Ceny domácich dlhopisov sú riešeniami parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\alpha + \beta(r_e - r_d) - \lambda_d \sigma_d) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (\gamma(\delta - r_e) - \lambda_e \sigma_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} \\ + \frac{\sigma_d^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d \sigma_e \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0. \end{aligned}$$

Riešenie je možné vyjadriť v tvare

$$P_d(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - r_d B(\tau) - r_e C(\tau)},$$

kde  $\tau = T - t$  a funkcie  $A, B, C$  spĺňajú začiatočné podmienky  $A(0) = 0, B(0) = 0, C(0) = 0$ . Dosadením tohto predpokladaného tvaru do rovnice dostaneme nasledovnú identitu

$$\begin{aligned} r_d (B\dot{\beta} + \dot{B} - 1) + r_e (C\dot{\gamma} - B\dot{\beta} + \dot{C}) - \alpha B + \lambda_d \sigma_d B - \gamma \delta C \\ + \lambda_e \sigma_e C + \frac{\sigma_d^2}{2} B^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} C^2 + \rho \sigma_d \sigma_e BC - \dot{A} = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Napríklad EURIBOR - European Interbank Offered Rate.



Táto identita je pre ľubovoľnú voľbu premenných  $r_d, r_e$  splnená práve vtedy, keď platia rovnice

$$B\beta + \dot{B} - 1 = 0, \quad C\gamma - B\beta + \dot{C} = 0,$$

$$-\alpha B + \lambda_d \sigma_d B - \gamma \delta C + \lambda_e \sigma_e C + \frac{\sigma_d^2}{2} B^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} C^2 + \rho \sigma_d \sigma_e BC - \dot{A} = 0.$$

Riešením tejto sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc sú funkcie

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta}, \quad C(\tau) = \frac{\beta(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma} B(\tau), \\ A(\tau) &= \frac{\tau}{2} [-2\alpha B(\tau) + C(\tau)(-2\gamma\delta + C(\tau)\sigma_e^2 + 2\sigma_e\lambda_e) \\ &\quad + B(\tau)(2C(\tau)\rho\sigma_d\sigma_e + \sigma_d(2\lambda_d + B(\tau)\sigma_d))]. \end{aligned}$$

Časová štruktúra domácich úrokových mier je lineárnou funkciou domácej aj európskej okamžitej úrokovej miery:

$$R(r_d, r_e, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(\tau, r_e, r_d)}{\tau} = \frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} r_d + \frac{C(\tau)}{\tau} r_e.$$

### Fong–Vašíčkov model so stochastickou volatilitou

Pripomeňme, že Fong–Vašíčkov model so stochastickou volatilitou odvodený v práci Fonga a Vašíčka [21] (pozri aj kapitolu 7) opisuje okamžitú úrokovú mieru prostredníctvom stochastickej diferenciálnej rovnice, v ktorej volatilita sama osebe je riešením inej stochastickej diferenciálnej rovnice. Presnejšie,

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dw_1, \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dw_2. \end{aligned}$$

Prírastky  $dw_1, dw_2$  Wienerových procesov  $w_1$  a  $w_2$  môžu byť korelované,  $E(dw_1 dw_2) = \rho dt$ . Ďalej predpokladajme, že trhové ceny rizika sa dajú vyjadriť v tvare:  $\lambda_1\sqrt{y}$ , resp.  $\lambda_2\sqrt{y}$ , kde  $\lambda_1, \lambda_2$  sú konštanty. Potom cena dlhopisu je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} &+ (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P}{\partial r} + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \lambda_2 v y) \frac{\partial P}{\partial y} \\ &+ \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho v y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0, \end{aligned} \quad (8.19)$$

pričom  $P(r, y, 0) = 1$ . Riešenie úlohy hľadáme v separovanom tvare

$$P(\tau, r, y) = A(\tau)e^{-B(\tau)r - C(\tau)y}.$$

Dosadením tohto predpokladaného tvaru riešenia do rovnice dostávame, že funkcie  $A, B, C$  sú riešením nasledovného systému obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -A(\kappa_1\theta_1B + \kappa_2\theta_2C), \\ \dot{B} &= -\kappa_1B + 1, \\ \dot{C} &= -\lambda_1B - \kappa_2C - \lambda_2vC - \frac{B^2}{2} - \frac{v^2C^2}{2} - v\rho BC \quad (8.20) \end{aligned}$$

a vyhovujú začiatočným podmienkam  $A(0) = 1, B(0) = 0, C(0) = 0$ . Tieto funkcie sa potom dajú vyjadriť v nasledovnom tvare:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\tau}), \\ \dot{C} &= -\lambda_1B - \frac{B^2}{2} - (\kappa_2 + \lambda_2v + v\rho B)C - \frac{v^2}{2}C^2, \quad C(0) = 0, \\ A &= \exp\left(-\theta_1\tau + \theta_1B - \kappa_2\theta_2 \int_0^\tau C(s)ds\right). \end{aligned}$$

Diferenciálnu rovnicu pre  $B$  vieme explicitne vyriešiť. Diferenciálnu rovnicu pre  $C$  vyriešime numericky a získané hodnoty dosadíme do integrálu, pomocou ktorého nakoniec integráciou vypočítame  $A$ .

### 8.1.3 Bezarbitrážne modely

Medzi nevýhody rovnovážnych modelov patrí skutočnosť, že nedokážu presne zachytiť súčasnú časovú štruktúru úrokových mier. Voľne povedané, je to spôsobené tým, že parametrov modelu je málo, a tým pádom môžu poskytnúť len približnú aproximáciu súčasnej časovej štruktúry. Tento nedostatok bol podnetom ku konštrukcii tzv. bezarbitrážnych modelov. Tieto modely sú skonštruované tak, aby presne (bezarbitrážne) poskytovali súčasnú časovú štruktúru úrokových mier. Cena za túto vlastnosť sa prejaví v potrebe zavedenia časovo závislých koeficientov do opisu procesu vývoja okamžitej úrokovej miery.

**Ho–Leeho bezarbitrážny model**

Historicky prvý bezarbitrážny model bol navrhli Ho a Lee v roku 1986 v [27]. Cena dlhopisu je opäť vyjadrená pomocou spojitého úročenia

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

pričom okamžitá úroková miera je charakterizovaná stochastickým procesom:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dw. \quad (8.21)$$

To znamená, že tento proces je opísaný štandardnou odchýlkou  $\sigma$  a časovo závislým driftom  $\theta(t)$ , ktorý je určený tak, aby výsledná časová štruktúra úrokových mier  $R(t, T), T \geq 0$  bola v súčasnom čase  $t = 0$  totožná so známou súčasnou časovou štruktúrou  $\{R(0, T), T \geq 0\}$  úrokových mier. Podobne ako v prípade rovnovážnych modelov môžeme aj teraz odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre Ho–Lee model v tvare:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\theta(t) - \lambda(t)\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

s časovo premenlivými koeficientami, pričom  $\lambda(t)$  označuje trhovú cenu rizika. Terminálová podmienka je opäť daná ako:

$$P(r, T, T) = 1.$$

Explicitné riešenie budeme hľadať v tvare

$$P(r, t, T) = A(T-t)e^{-B(T-t)r},$$

pričom  $A(0) = 1, B(0) = 0$ . Dosadením do parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu  $P$  a porovnaním koeficientov pri mocninách premennej  $r$  napokon dostaneme, že  $A, B$  sú riešenia systému obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\dot{B}(\tau) = 1, \quad \dot{A}(\tau) = A(\tau) \left( \frac{\sigma^2}{2} B(\tau)^2 - \phi(T-\tau)B(\tau) \right),$$

kde  $\phi(t) = \theta(t) - \lambda(t)\sigma$  a  $\tau = T - t$  predstavuje dobu do splatnosti (maturity) dlhopisu. Tým pádom  $B(\tau) = \tau$ . Pre funkciu  $A$  potom dostaneme

$$\frac{d \ln A}{d\tau}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \tau^2 - \phi(T-\tau)\tau.$$

Náš cieľ je nájsť takú funkciu  $\phi$  (a tým pádom aj  $\theta$ ), pre ktorú bude súčasná časová štruktúra úrokových mier  $\{R(0, T), T \geq 0\}$  totožná s tou, ktorá zodpovedá cene  $P(r, 0, T)$ . Musí teda platiť

$$e^{-R(0,T)(T-0)} = P(r, 0, T) = A(T-0)e^{-B(T-0)r} = A(T)e^{-R(0,0)T},$$

nakoľko  $r = R(0, 0)$ . Porovnaním členov v tejto identite dostaneme

$$\ln A(T) = (R(0, 0) - R(0, T))T,$$

pre každé  $T > 0$ . Teda

$$\frac{d \ln A}{d\tau}(\tau) = R(0, 0) - R(0, \tau) - \tau \frac{\partial R}{\partial T}(0, \tau).$$

Tým pádom sa funkcia driftu  $\phi(t)$  dá explicitne vyjadriť ako

$$\phi(t) = \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \frac{\partial R}{\partial T}(0, T-t) + \frac{R(0, T-t) - R(0, 0)}{T-t}. \quad (8.22)$$

### Hull a Whiteov bezarbitrážny model

Ďalší bezarbitrážny model časovej štruktúry úrokových sadzieb bol navrhnutý Hullom a Whiteom. Na rozdiel od Ho-Lee modelu predpokladáme, že okamžitá úroková miera sleduje stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dr = \theta(t)(a(t) - r)dt + \sigma(t)r^\gamma dw, \quad (8.23)$$

kde  $\gamma = 0$  alebo  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Aj v tomto modeli je možné nájsť explicitné riešenie príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice tak, aby navyiac súčasná časová štruktúra úrokových mier bola totožná s výstupom tohto modelu.

## 8.2 Ďalšie deriváty úrokovej miery

### Swap

Swap je dohoda medzi dvoma účastníkmi kontraktu. Strana A sa zaviazuje platiť strane B fixný úrok  $r^*$  z dohodnutej sumy, ktorú môžeme považovať za rovnú jednej. Strana B sa zaviazuje platiť strane A z dohodnutej sumy plávajúci úrok  $r$ . Prepodkladajme, že  $r$  sa riadi procesom

(7.1) a že platby prebiehajú kontinuálne. Situáciu si môžeme predstaviť tak, že strana A vlastní dlhopis vyplácajúci kupón  $r - r^*$ , ktorý v čase splatnosti  $T_s$  (t. j. v čase ukončenia platieb swapu) vypláca nulovú hodnotu. Dá sa ukázať (pozri Kwok [40]), že hodnota swapu  $W(r, t)$  je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial W}{\partial r} - rW + r - r^* = 0$$

s koncovou podmienkou  $W(r, T_s) = 0$ . Funkcia  $\lambda = \lambda(t, r)$  opäť vyjadruje trhovú cenu rizika swapu.

### Swaption

Swaption je právo, ale nie povinnosť vstúpiť v čase  $T < T_s$  do swapového kontraktu za cenu  $X$ . Dá sa odvodiť parciálna diferenciálna rovnica pre hodnotu  $V(r, t)$  tohto práva (pozri Kwok [40]). Rovnica je rovnaká ako v prípade oceňovania dlhopisu. Líšia sa len koncovou podmienkou, ktorá sa rovná

$$V(r, T) = \max(W(r, T) - X, 0)$$

v prípade call swaption a

$$V(r, T) = \max(X - W(r, T), 0)$$

v prípade put swaption. Výraz  $W(r, t)$  je hodnota swapového kontraktu v čase  $t \in [0, T)$  a predstavuje vlastne podkladové aktívum pre swaption.

### Futures

Futures kontrakt predstavuje povinnosť kúpiť alebo predať dohodnuté aktívum za vopred stanovených podmienok. Na rozdiel od forwardov sú tieto kontrakty obchodované na burze. Futures kontrakty, ktorých podkladový proces je úroková miera (napr. trojmesačný LIBOR) alebo dlhopis predstavujú v súčasnosti podstatnú časť derivátových obchodov na opčných burzách. Rozdiel medzi forwardovými a futures kontraktami je najmä v procese každodenného vyrovnávania ziskov a strát. Ďalší rozdiel je aj v čase dodania podkladového aktíva. V prípade forwardov je dátum dodania presne stanovený. Na druhej strane, pre určité druhy futures je stanovený iba časový interval, počas ktorého je

možné dodať podkladové aktívum. Obchodovanie s futures prebieha sprostredkovateľskou formou cez brokerské spoločnosti, ktoré majú na túto činnosť licenciu. Detaily môže čitateľ nájsť v knihe Hull [29] alebo Kwok [40]. Matematické modelovanie derivátov typu futures však nie je založené na riešení parciálnych diferenciálnych rovníc, a preto presahuje rámec obsahového zamerania tejto knihy.

### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Uvažujme Vašíčkov model s hodnotami parametrov z tab. 7.2 pre  $\gamma = 0$ . Zobraďte výnosové krivky pre rôzne hodnoty trhovej ceny rizika  $\lambda$ . Ako závisia úrokové miery od tohto parametra?
2. Uvažujme CIR model s hodnotami parametrov z tab. 7.2 pre  $\gamma = 1/2$ . Zobraďte výnosové krivky pre rôzne hodnoty trhovej ceny rizika  $\lambda$ . Ako závisia úrokové miery od tohto parametra?
3. Vypočítajte ceny dlhopisov v dvojfaktorovom CIR modeli, ak sú trhové ceny rizika rovné  $\lambda_1\sqrt{r_1}$  a  $\lambda_2\sqrt{r_2}$ .
4. V konvergenčnom dvojfaktorovom modeli Corzovej a Schwartza vypočítajte limitu domácej časovej štruktúry úrokových mier pre čas do splatnosti idúci do nekonečna, t. j.  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r_d, r_e, t, t + \tau)$ . V akom vzťahu je táto limita s príslušnou limitou európskych úrokových mier?
5. V Hull a Whiteovom modeli (8.23) pre  $\gamma = 0$  a  $\gamma = 1/2$  hľadajte riešenie  $P$  v tvare  $P(r, t) = A(T - t)e^{-B(T-t)r}$  a odvodte systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie  $A(\tau)$  a  $B(\tau)$ , kde  $\tau = T - t$ .

---

## Kapitola 9

### *Americké typy derivátov*

---

V tejto časti sa budeme zaoberať matematickým modelovaním amerických typov derivátových obchodov. Na rozdiel od európskych typov derivátových kontraktov, americké deriváty sú charakterizované možnosťou predčasného uplatnenia derivátu v niektorom čase  $t^* \in [0, T)$  pred povinnou expiráciou derivátu v čase  $T$ . V prípade americkej call alebo put opcie sa teda tieto deriváty líšia od európskych tým, že expirácia je možná v ľubovoľnom čase  $t \in [0, T]$ . V súčasnosti americké typy derivátov predstavujú viac ako 90% všetkých obchodovaných derivátov.

Americká kúpna opcia alebo call opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo kúpiť podkladové aktívum (akciu) kedykoľvek v časovom intervale  $[0, T]$  za vopred dohodnutú expiračnú cenu  $E$ , kde  $T$  je čas povinnej expirácie opcie. Podobne ako v prípade európskej call opcie majiteľ opcie získava právo, ale nie povinnosť, kúpiť akciu. Za toto právo teda budúci majiteľ opcie v čase uzavretia kontraktu  $t = 0$

musí zaplatiť určitú prémie  $V$  vypisovateľovi opcie. Na druhej strane, americká put opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ získava právo, ale nie povinnosť, predat' podkladové aktívum (akciu) kedykoľvek v časovom intervale  $[0, T]$  za vopred dohodnutú expiračnú cenu  $E$ . Pre oba typy amerických derivátov je teda úloha oceniť tieto opcie, t. j. nájsť cenu  $V^{ac}(S, t)$  call opcie, resp. cenu  $V^{ap}(S, t)$  put opcie, v každom čase  $t \in [0, T]$ .

Keďže americké opcie poskytujú ich držiteľovi väčšie práva v porovnaní s európskymi, musí byť ich cena vyššia alebo rovnajúca sa cene európskych opcií, t. j.

$$V^{ac}(S, t) \geq V^{ec}(S, t), \quad V^{ap}(S, t) \geq V^{ep}(S, t)$$

pre každý čas  $t \in [0, T]$  a cenu aktíva  $S \geq 0$ . Navyiac, cena americkej call, resp. put opcie musí byť vždy aspoň taká, aká je cena opcie v čase jej povinného vypršania, t. j.

$$V^{ac}(S, t) \geq V^{ec}(S, T) = \max(S - E, 0),$$

$$V^{ap}(S, t) \geq V^{ep}(S, T) = \max(E - S, 0)$$

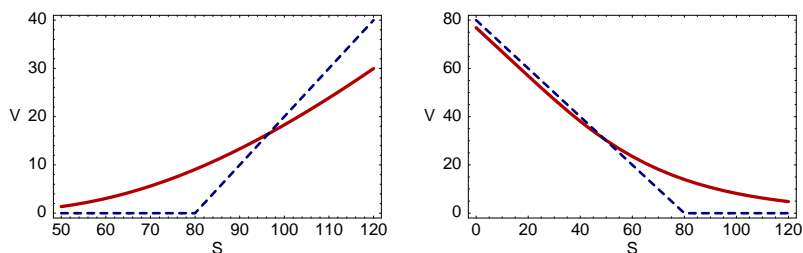
pre každý čas  $t \in [0, T]$  a  $S \geq 0$ . Skutočne, ak by napríklad cena  $V^{ac}(S, t)$  americkej call opcie v čase  $t < T$  pred expiráciou bola povedzme o jednotku nižšia, ako je jej terminálový pay-off diagram  $\max(S - E, 0)$ , tak kúpou takejto opcie a jej okamžitým uplatnením (to je možné pre americké opcie) získame od vypisovateľa opcie akciu v cene  $E$ , ktorej predajom okamžite získame hodnotu  $S$ . Takto získame, bez znášania akéhokoľvek rizika, práve tú jednotku ceny, o ktorú bola cena call opcie nižšia ako jej terminálový pay-off diagram. Tento postup vedie k arbitrážnej príležitosti, ktorú trh v krátkom čase odstráni zvýšením ceny takejto opcie aspoň na hodnotu jej pay-off diagramu.

Na obr. 9.1 vľavo vidíme, že cena európskej call opcie na akciu vyplácajúcu nenulové dividendy  $D > 0$  vždy pretne terminálový pay-off diagram. To sa dá analyticky dokázať zo vzorca riešenia európskej call opcie (3.8), kde sa ľahko overí, že platí

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V^{ec}(S, t)}{S} = e^{-D(T-t)} < 1,$$

a preto  $V^{ec}(S, t) < S - E$  pre dostatočne veľké  $S \gg E$  a  $0 \leq t < T$ . Podobne pre európsku put opciu na akciu (aj neplatiacu dividendy, t. j.





Obr. 9.1: Grafy riešenia európskej call na akciu platiacu dividendy (vľavo), put opcie na akciu neplatiacu dividendy (vpravo) a ich porovnanie s terminálovými pay-off diagramami.

$D \geq 0$ ) na základe (3.14) platí:  $V^{ep}(0, t) = Ee^{-r(T-t)} < E$ , a preto riešenie  $V^{ep}(S, t)$  vždy pretne pay-off diagram put opcie. Na obr. 9.1 vpravo vidíme graf riešenia európskej put opcie a jeho porovnanie s terminálovým pay-off diagramom.

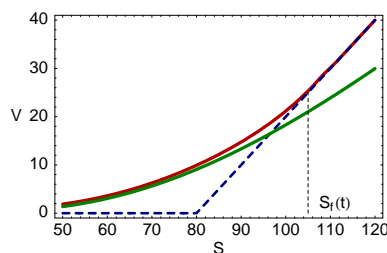
V prípade americkej call opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy ( $D = 0$ ) je jej oceňovanie zhodné s oceňovaním príslušnej európskej call opcie, t. j.

$$\text{ak } D = 0, \text{ tak } V^{ac}(S, t) = V^{ec}(S, t) \text{ pre každé } S \geq 0, t \in [0, T]. \quad (9.1)$$

Dôvodom je skutočnosť, že americkú opciu nie je výhodné uplatňovať pred časom  $T$ , lebo pri predčasnom uplatnení v čase  $t \in [0, T)$  by jej hodnota okamžite klesla na hodnotu pay-off diagramu  $\max(S - E, 0)$ , t. j. pod hodnotu európskej opcie  $V^{ec}(S, t)$ , čo nie je možné, pretože  $V^{ec}(S, t) > \max(S - E, 0)$  v prípade nulových dividend  $D = 0$ .

Zložitejšia situácia nastáva v prípade americkej call opcie na akciu vyplácajúcu nenulové dividendy ( $D > 0$ ). Vtedy sa riešenie  $V^{ec}(S, t)$  pretne s pay-off diagramom  $\max(S - E, 0)$ , a teda nemôžeme použiť podobný argument ako v prípade nulových dividend  $D = 0$ . Naviac, držanie americkej call opcie až do expirácie by znamenalo, že jej hodnota je totožná s hodnotou európskej opcie, čo nie je možné pre veľké hodnoty ceny akcie  $S$ , nakoľko  $V^{ec}(S, t) < \max(S - E, 0)$  pre  $S \gg E$ . Tým pádom cena americkej opcie je väčšia ako cena príslušnej európskej opcie, t. j.

$$\text{ak } D > 0, \text{ tak } V^{ac}(S, t) > V^{ec}(S, t) \text{ pre každé } S > 0, t \in [0, T]. \quad (9.2)$$



Obr. 9.2: Porovnanie riešenia európskej a americkej call opcie s vyznačením polohy predčasného uplatnenia americkej call opcie  $S_f(t)$  pre čas  $0 \leq t < T$ .

Keďže graf hodnôt (cien) európskej put opcie pre nulové aj nenulové dividendy vždy pretne svoj pay-off diagram, dostávame tak, že musí platiť ostrá nerovnosť:

$$\text{ak } D \geq 0, r > 0, \text{ tak } V^{ap}(S, t) > V^{ep}(S, t) \text{ pre } S \geq 0, t \in [0, T]. \quad (9.3)$$

## 9.1 Oceňovanie amerických opcií pomocou úloh s voľnou hranicou

Analýza vykonaná v predchádzajúcej časti nás priviedla k úlohe s tzv. voľnou hranicou pre americkú call opciu na akciu vyplácajúcu dividendy  $D > 0$ . Okrem samotného riešenia  $V(S, t) = V^{ac}(S, t)$  musíme hľadať aj funkciu  $S_f(t)$  času  $t \in [0, T]$  tvoriacu tzv. hranicu predčasného uplatnenia opcie,<sup>1</sup> s vlastnosťou, že ak cena  $S$  akcie v čase  $t \in [0, T]$  spĺňa podmienku:

1.  $S < S_f(t)$ , tak  $V^{ac}(S, t) > \max(S - E, 0)$  a call opciu budeme naďalej držať, nakoľko jej hodnota je vyššia ako pay-off diagram opcie. Na zaistenie portfólia použijeme Black-Scholesov model, a teda pre  $0 < t < T$  a  $S < S_f(t)$  platí Black-Scholesova rovnica.
2.  $S \geq S_f(t)$ , tak  $V^{ac}(S, t) = \max(S - E, 0)$  a call opciu uplatníme, nakoľko jej hodnota je zhodná s pay-off diagramom.

<sup>1</sup>Early exercise boundary v anglickom jazyku.

Na obr. 9.2 môžeme vidieť znázornený priebeh ceny  $S \mapsto V^{ac}(S, t)$  americkej call opcie v danom čase  $t \in [0, T)$ , jej porovnanie s pay-off diagramom call opcie  $S \mapsto \max(S - E, 0)$  a nižšou hodnotou európskej call opcie na akciu vyplácajúcu netriviálne dividendy. Vyznačená je aj hodnota  $S_f(t)$ , ktorá vymedzuje cenu akcie do dvoch intervalov:  $0 < S < S_f(t)$ , v prípade ktorého call opciu naďalej držíme a  $S \geq S_f(t)$ , v prípade ktorého call opciu uplatňujeme v čase  $t$ .

Môžeme teda pristúpiť k matematickej formulácii problému oceňovania amerických call opcií. Úlohou je nájsť funkciu  $V = V^{ac}(S, t)$  spolu s funkciou  $S_f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  opisujúcu hranicu predčasného uplatnenia call opcie tak, aby boli splnené nasledovné podmienky:

(úloha s voľnou hranicou pre oceňovanie americkej call opcie)

1. funkcia  $V(S, t)$  je riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (9.4)$$

na časovo premenlivej oblasti  $0 < t < T$  a  $0 < S < S_f(t)$ ;

2. terminálová podmienka pre call opciu:

$$V(S, T) = \max(S - E, 0); \quad (9.5)$$

3. okrajové podmienky pre riešenie americkej call opcie:

$$V(0, t) = 0, \quad V(S_f(t), t) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1, \quad (9.6)$$

pre krajné hodnoty ceny akcie  $S = 0$  a  $S = S_f(t)$ .

Doposiaľ sme nevysvetlili zmysel okrajovej podmienky  $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1$  v bode predčasného uplatnenia call opcie  $S = S_f(t)$ . Poznamenajme, že táto podmienka spolu s podmienkou  $V(S_f(t), t) = S_f(t) - E$  zaručujú spojitosť a  $C^1$  hladkosť funkcie  $V^{ac}(S, t)$  v bode  $S = S_f(t)$  na voľnej hranici  $S = S_f(t)$ , pre každé  $0 < t < T$ . Skutočne, hodnota derivátu musí byť spojitá funkcia, čo implikuje prvú podmienku (spojitosť)  $V(S_f(t), t) = S_f(t) - E$  na voľnej hranici  $S = S_f(t)$  v (9.6). Je zrejmé, že stanovenie iba jednej Dirichletovej okrajovej podmienky v pravom koncovom bode  $S_f(t)$  nie je postačujúce pre jednoznačné vyriešenie

problému oceňovania americkej call opcie. Stačí si uvedomiť (pozri napr. Ševčovič [58]), že pre ľubovoľnú vopred zadanú funkciu  $S_f(t)$  môžeme jednoznačne vyriešiť úlohu (9.4) so zadanými dvomi okrajovými podmienkami  $V(0, t) = 0$ ,  $V(S_f(t), t) = S_f(t) - E$  a terminálovou podmienkou (9.5).

Zatiaľ nemáme žiadnu ďalšiu informáciu, na základe ktorej by sme mohli jednoznačne určiť polohu hranice uplatnenia call opcie  $S_f(t)$  pre  $t \in (0, T)$ . Musíme preto odvodiť ďalšiu podmienku, z ktorej by sme mohli polohu hranice  $S_f(t)$  určiť. Východiskom odvodenia bude finančná úvaha pochádzajúca od Mertona (pozri Kwok [40]), na základe ktorej cena americkej opcie musí byť daná ako maximálna hodnota spomedzi všetkých cien call opcií, ktorých hranica predčasného uplatnenia je nejaká spojitá funkcia času, t. j.

$$V^{ac}(S, t) = \max_{\eta} V(S, t; \eta),$$

kde maximum teda prebieha cez všetky možné kladné spojité funkcie  $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  a  $V(S, t; \eta)$  je cena call opcie daná ako riešenie Black-Scholesovej rovnice na časovo premenlivej oblasti  $0 < t < T$ ,  $0 < S < \eta(t)$  spĺňajúce terminálovú podmienku call opcie a okrajové podmienky  $V(0, t; \eta) = 0$ ,  $V(\eta(t), t; \eta) = \eta(t) - E$ . Funkcia predčasného uplatnenia call opcie  $S_f$  je potom príslušným argumentom maxima vyššie uvedenej variačnej úlohy. Jedná sa skutočne o variačnú úlohu, nakoľko naša úloha je hľadať maximum funkcionálu  $\eta \mapsto V(S, t; \eta)$  definovaného na nekonečnorozmernom priestore všetkých spojitých funkcií. Nutná podmienka nadobúdania extrému tohto funkcionálu nám dáva, že Fréchetova derivácia funkcionálu  $\eta \mapsto V(S, t; \eta)$ , t. j. lineárny operátor  $D_{\eta}V(S, t; \eta) : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$ , je nulový v bode  $\eta = S_f$ . Teda

$$D_{\eta}V(S, t; S_f)\xi = 0 \quad \text{pre každú funkciu } \xi \in C([0, T]),$$

kde  $C([0, T])$  je priestor všetkých spojitých funkcií na intervale  $[0, T]$ . Nech  $t \in [0, T]$  je pevne zvolený čas. Keďže pre každú funkciu  $\eta \in C([0, T])$  platí  $V(\eta(t), t; \eta) - \eta(t) + E = 0$ , tak derivovaním tejto identity podľa funkcie  $\eta$  v smere  $\xi \in C([0, T])$  dostaneme pre každé  $t \in (0, T)$ :

$$\frac{\partial V}{\partial S}(\eta(t), t; \eta)\xi(t) + D_{\eta}V(\eta(t), t; \eta)\xi - 1 \cdot \xi(t) = 0.$$

S využitím identity  $D_{\eta}V(S, t; S_f)\xi = 0$  pre argument maxima  $\eta = S_f$  potom dostávame  $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t; S_f)\xi(t) = \xi(t)$ . Funkcia  $\xi \in C([0, T])$  bola

ľubovoľná, a teda musí platiť, že hranica predčasného uplatnenia call opcie a cena call opcie musia spĺňať hraničnú podmienku

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t; S_f) = 1.$$

Na základe obdobných úvah ako viedli k formulácii úlohy oceňovania americkej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy, môžeme naformulovať aj úlohu pre oceňovanie americkej put opcie na akciu, ktorá môže, ale i nemusí vyplácať dividendy (t. j.  $D \geq 0$ ). Úlohou je nájsť funkciu  $V = V^{ap}(S, t)$  spolu s funkciou predčasného uplatnenia put opcie  $S_f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tak, aby boli splnené nasledovné vzťahy:

(úloha s voľnou hranicou pre oceňovanie americkej put opcie)

1. funkcia  $V(S, t)$  je riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (9.7)$$

na časovo premenlivej oblasti  $0 < t < T$  a  $S > S_f(t)$ ;

2. terminálová podmienka pre put opciu:

$$V(S, T) = \max(E - S, 0); \quad (9.8)$$

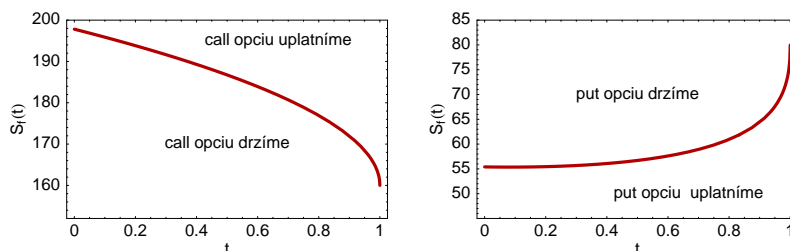
3. okrajové podmienky pre riešenie americkej put opcie:

$$V(+\infty, t) = 0, \quad V(S_f(t), t) = E - S_f(t), \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1, \quad (9.9)$$

pre krajné hodnoty ceny akcie  $S = S_f(t)$  a  $S = \infty$ .

Nakoniec odvodíme niekoľko užitočných poznatkov o polohe hranice predčasného uplatnenia americkej opcie. Úvahy budeme najskôr prevádzať pre americkú call opciu.

V prvom rade je zrejmé, že poloha hranice predčasného uplatnenia call opcie musí byť aspoň taká, ako je expiračná cena  $E$ . Nie je totižto rozumné predčasne uplatniť call opciu s expiračnou cenou  $E$  pre cenu akcie menšiu ako  $E$ .



Obr. 9.3: Znáznorenie priebehu hranice predčasného uplatnenia call opcie (vľavo) a put opcie (vpravo).

Keďže funkcia  $S \mapsto V(S, t)$  je spojitě diferencovateľná podľa premennej  $S$  v bode  $S = S_f(t)$ , tak derivovaním identity  $V(S_f(t), t) = S_f(t) - E$  podľa času  $t$  dostaneme  $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t)\dot{S}_f(t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t) = \dot{S}_f(t)$ . Ak využijeme okrajovú podmienku  $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$  pre  $S = S_f(t)$ , tak napokon dostaneme<sup>2</sup>

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in (0, T).$$

Využijúc tento vzťah a platnosť Black–Scholesovej rovnice pre  $0 < S < S_f(t)$  v limite  $S \rightarrow S_f(t)$  napokon dostávame:

$$\begin{aligned} DS_f(t) - rE &= -(r - D)S_f(t) \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) + rV(S_f(t), t) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} S_f(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_f(t), t) \geq 0, \end{aligned} \quad (9.10)$$

pretože funkcia  $S \mapsto V(S, t)$  má byť konvexná pre  $0 < S \leq S_f(t)$ . Tým pádom

$$S_f(t) \geq E \max\left(\frac{r}{D}, 1\right) \quad \text{pre každé } t \in [0, T]. \quad (9.11)$$

Ostáva nám určiť hodnotu  $S_f(T)$  v expirácii  $T$ . Ak  $S_f(T) > E$ , tak s ohľadom na fakt, že  $V(S, t) \rightarrow S - E$  pre  $t \rightarrow T$  môžeme dedukovať, že druhá derivácia  $\partial^2 V / \partial S^2$  bude konvergovať k nule na nejakom okolí bodu  $S = S_f(t) > E$ . Ak zoberieme do úvahy identitu (9.10), tak pre limitu  $t \rightarrow T$  napokon dostaneme  $S_f(T) = rE/D$ . To je možné len

<sup>2</sup>Poznamenajme, že analogickým spôsobom sa dá dokázať vyššie uvedená identita aj pre put opciu.

v prípade  $r > D > 0$ . Inak platí  $S_f(T) = E$ . V každom prípade teda platí podmienka:

$$S_f(T) = E \max\left(\frac{r}{D}, 1\right). \quad (9.12)$$

Analogickým postupom sa v prípade americkej put opcie dá ukázať, že funkcia  $S_f(t)$ , ktorá definuje hranicu predčasného uplatnenia americkej put opcie, spĺňa nasledovné vlastnosti:

$$S_f(T) = E, \quad S_f(t) \leq E \text{ pre každé } t \in [0, T]. \quad (9.13)$$

Jeden z dôležitých a zaujímavých problémov v oblasti matematickej teórie financií je detailná analýza hranice predčasného uplatnenia opcie  $S_f(t)$  a optimálneho času pre uplatnenie opcie, ktorý predstavuje inverznú funkciu k  $S_f(t)$ . V súčasnosti (rok 2008) nie je známa explicitná formula pre polohu voľnej hranice - hranice predčasného uplatnenia call alebo put opcie. Čiastočné výsledky sa dajú nájsť v prácach, ktoré vyšli len nedávno: Barone, Adesi a Whaley [6], Kuske a Keller [39], Dewynne a kol. [15], Geske a kol. [24, 25], MacMillan [42], Karatzas [34], Johnson [33], Knessl [36], Myneni [48], Widdicks a kol. [63], Carr a kol. [10], Evans a kol. [18] (analytické aproximácie), Alobaidi [1], Kwok [40], Mallier a kol. [43, 44], Ševčovič [56], Stamicar a kol. [54] (formulácia a analýza nelineárnej integrálnej rovnice pre funkciu  $S_f(t)$ ). Napokon v nedávno publikovanom článku [65] Zhu odvodil explicitnú formulu pre funkciu  $S_f(t)$  v tvare súčtu nekonečného radu. Prehľad moderných výsledkov o analýze hranice predčasného uplatnenia call a put opcií sa dá nájsť v práci Chadama [30].

Z vyššie uvedených prameňov plynie, že poloha voľnej hranice predčasného uplatnenia call opcie sa dá približne pre časy  $t$  blízke k expirácii  $T$  vyjadriť ako:

$$S_f(t) \approx K \left(1 + 0,638 \sigma \sqrt{T-t}\right), \quad K = E \max(r/D, 1) \quad (9.14)$$

pre  $t \rightarrow T$ . Tento približný vzorec bol odvodený v práci Dewynne a kol. [15] a nezávisle Ševčovičom v práci [56], kde sa dá navyše nájsť nelineárna integrálna rovnica, ktorej riešením je voľná hranica  $S_f(t)$  nielen pre časy  $t$  blízke expirácii  $T$ .

V prípade hranice predčasného uplatnenia americkej put opcie je situácia o niečo zložitejšia a voľná hranica  $S_f(t)$  sa dá vyjadriť ako

$$S_f(t) = E e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\sigma \sqrt{2(T-t)} \eta(t)}.$$

Pomocná funkcia  $\eta$  sa pre časy  $t \rightarrow T$  dá aproximovať výrazom

$$\eta(t) \approx -\sqrt{-\ln \left[ \frac{2r}{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t)} e^{r(T-t)} \right]}. \quad (9.15)$$

Tento výsledok bol dosiahnutý Stamicarom, Chadamom a Ševčovičom a je prebratý z práce [54]. Na obr. 9.3 je znázornený priebeh hranice predčasného uplatnenia call opcie (vľavo) a put opcie (vpravo) vypočítaných na základe použitia aproximatívnych formúl (9.14) a (9.15) pre parametre  $T = 1$ ,  $E = 80$ ,  $r = 0,04$ ,  $\sigma = 0,37$  a  $D = 0,02$  pre call opciu, resp.  $D = 0$  pre put opciu.

## 9.2 Oceňovanie amerických opcií pomocou lineárnej komplementarity

Cieľom tejto časti je analyzovať Black–Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu na celej oblasti cien aktív, t. j.  $0 < S < \infty$ . Ukážeme, že pre americké opcie vo všeobecnosti neplatí Black–Scholesova rovnica, ale len nerovnica. Presnejšie, ukážeme, že pre americkú call, resp. put opciu platí parciálna diferenciálna nerovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0, \quad (9.16)$$

pre každé  $0 < S < \infty$ ,  $0 < t < T$ .

Uvažujme najskôr prípad americkej call opcie. Na základe predchádzajúcich častí už vieme, že na intervale  $0 < S < S_f(t)$ , v ktorom držíme call opciu, platí Black–Scholesova rovnica, t. j. v nerovnici (9.16) nastáva rovnosť. Zároveň pre tieto hodnoty ceny aktíva  $S$  platí ostrá nerovnosť  $V(S, t) > \max(S - E, 0)$ . Na druhej strane, ak  $S \geq S_f(t)$ , tak  $V(S, t) = \max(S - E, 0) = S - E$ , pretože  $S_f(t) \geq E$ . Ak dosadíme lineárnu funkciu  $S - E$  do Black–Scholesovej rovnice, tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ = (r - D)S - r(S - E) = rE - DS \leq rE - DS_f(t) \leq 0, \end{aligned}$$

pretože  $S_f(t) \geq E \max(\frac{r}{D}, 1)$ .



V prípade americkej put opcie je situácia podobná. Budeme však uvažovať iba prípad, keď pre úrokovú a dividendovú mieru platí  $0 \leq D \leq r$ . Na intervale  $S > S_f(t)$ , v ktorom držíme put opciu, platí Black–Scholesova rovnica, t. j. v nerovnici (9.16) nastáva opäť rovnosť a súčasne platí ostrá nerovnosť  $V(S, t) > \max(E - S, 0)$ . Ak  $0 < S \leq S_f(t)$ , tak  $V(S, t) = \max(E - S, 0) = E - S$ , pretože  $S_f(t) \leq E$ . Dosadením lineárnej funkcie  $E - S$  do Black–Scholesovej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ = -(r - D)S - r(E - S) = DS - rE \leq DS_f(t) - rE \leq 0, \end{aligned}$$

pretože  $S_f(t) \leq E$  a  $0 \leq D \leq r$ .

Súhrnne sme ukázali nasledovnú vlastnosť riešenia problému oceňovania americkej call, resp. put opcie:

$$\text{Lineárna komplementarita pre americké opcie} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0, \quad V(S, t) \geq \bar{V}(S), \\ \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) (V(S, t) - \bar{V}(S)) = 0, \end{aligned}$$

pre každé  $0 < S < \infty, 0 < t < T$ , kde  $\bar{V}$  označuje terminálový pay-off diagram, t. j.

$$\bar{V}(S) = \begin{cases} \max(S - E, 0) & \text{v prípade call opcie,} \\ \max(E - S, 0) & \text{v prípade put opcie.} \end{cases} \quad (9.18)$$

Úloha oceňovania americkej call, resp. put opcie pomocou lineárnej komplementarity spočíva v nájdení spojite diferencovateľnej funkcie  $V(S, t)$ , ktorá je riešením úlohy lineárnej komplementarity (9.17) a spĺňa terminálové podmienky (9.18).

V závere tejto časti ukážeme, ako je možné formulovať problém ocenenia americkej call opcie na akciu vypláčajúcu spojitú dividendu  $D > 0$ , resp. put opcie, pričom  $0 \leq D \leq r$ , pomocou riešenia tzv. variačnej nerovnosti pre parabolické rovnice. Podobne ako v kapitole 3 pri odvodení Black–Scholesovej rovnice zavedením nových nezávislých premenných (pozri (3.4)):

$$S = Ee^x, \quad t = T - \tau,$$

kde  $x \in (0, \infty)$ ,  $\tau \in (0, T)$  a transformovanej funkcie

$$V(S, t) = Ee^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau),$$

pričom

$$\alpha = \frac{r - D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r + D}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r - D)^2}{2\sigma^2}, \quad (9.19)$$

po krátkych a zrejmych úpravach získame, že Black–Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu môžeme transformovať do tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.20)$$

pre každé  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in (0, T)$ . Keďže americká call, resp. put opcia musí spĺňať podmienku  $V(S, t) \geq \bar{V}(S)$ , tak pre transformovanú funkciu  $u$  musí byť splnená podmienka

$$u(x, \tau) \geq g(x, \tau), \quad (9.21)$$

pre každé  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in (0, T)$ . Funkcia  $g$  je transformovaný pay–off diagram call, resp. put opcie, t. j.

$$\begin{aligned} g(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} \max(e^x - 1, 0) \quad \text{pre call opciu,} \\ g(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} \max(1 - e^x, 0) \quad \text{pre put opciu,} \end{aligned} \quad (9.22)$$

pričom počiatočná podmienka pre funkciu  $u$  má tvar:

$$u(x, 0) = g(x, 0) \quad (9.23)$$

pre každé  $x \in \mathbb{R}$ . Okrajové podmienky v prípade call opcie majú tvar:

$$u(-\infty, \tau) = g(-\infty, \tau) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau)/g(x, \tau) = 1 \quad (9.24)$$

pre každé  $\tau \in (0, T)$ . V prípade put opcie okrajové podmienky majú tvar:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau)/g(x, \tau) = 1, \quad u(+\infty, \tau) = g(+\infty, \tau) = 0 \quad (9.25)$$

pre každé  $\tau \in (0, T)$ .

Potom problém oceňovania americkej call, resp. put opcie sa dá súhrnne zapísať v tvare lineárnej komplementarity ako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\geq 0, & u(x, \tau) - g(x, \tau) &\geq 0, & (9.26) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) &= 0 \end{aligned}$$

pre každé  $x \in \mathbb{R}, 0 < \tau < T$ . Úlohou je nájsť funkciu  $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  takú, že  $u$  je spojitě diferencovateľná a platí lineárna komplementarita (9.26).

### Príklady a úlohy na samostatné riešenie

1. Ukážte, že hranica  $S_f(t)$  predčasného uplatnenia americkej call opcie je klesajúca funkcia v čase  $t$ . Naopak, hranica predčasného  $S_f(t)$  uplatnenia americkej put opcie je rastúca funkcia v čase  $t$ .
2. Ukážte, že pre americkú call a put opciu už nemusí platiť put–call parita, ktorá bola odvodená v kapitole 3 pre európske typy opcií.
3. Ako závisí hranica predčasného  $S_f(t)$  uplatnenia americkej call opcie na volatilitě podkladového aktíva  $\sigma$ ? Je to rastúca závislosť?
4. Odvodte call–put symetriu pre ceny americkej call a put opcie. To znamená, že ak si označíme cenu americkej call opcie  $V^{ac}(S, t; E, r, D, \sigma)$ , resp. put opcie  $V^{ap}(S, t; E, r, D, \sigma)$  pre cenu aktíva  $S$ , čas  $t$ , expiračnú cenu  $E$ , úrokovú mieru  $r$  a dividendovú mieru  $D$ , tak ukážte, že platí identita:

$$V^{ap}(S, t; E, r, D, \sigma) = V^{ac}(E, t; S, D, r, \sigma).$$

5. Odvodte call–put symetriu pre ceny európskej call a put opcie pomocou explicitných vzorcov riešenia z kapitoly 3.
6. Na základe aproximatívnych formúl pre odhad polohy hranice predčasného uplatnenia americkej call, resp. put opcie ukážte, že časová derivácia funkcie  $\dot{S}_f(T) = -\infty$  pre call opciu a  $\dot{S}_f(T) = +\infty$ . Vysvetlite, čo sa deje na finančnom trhu s call, resp. put opciou tesne pred expiračným časom  $T$  a ako vplývajú malé zmeny ceny aktíva na správnu dobu uplatnenia opcie.

---

## Kapitola 10

### *Numerické metódy oceňovania derivátov*

---

Na záver tejto knihy rozoberieme numerické metódy oceňovania niektorých vybraných typov derivátov. Sústredíme sa na oceňovanie európskych a amerických call, resp. put opcií. Príslušné numerické postupy a techniky sa však dajú rozšíriť aj na iné typy derivátov. Na začiatku kapitoly rozoberieme explicitné a implicitné schémy na riešenie európskych typov derivátov. Hoci v tomto prípade existujú explicitné vzorce riešenia (pozri kapitolu 3), význam použitia numerických metód tkvie v tom, že nám poskytujú lepšiu predstavu o ich možnostiach a predovšetkým o ich presnosti. Táto informácia môže byť užitočná vtedy, ak sa budeme snažiť rozšíriť záber numerických metód aj na deriváty, kde analytické riešenie nie je známe. Takým prípadom sú práve americké typy derivátov, ktoré podrobne rozoberáme v druhej časti tejto kapitoly. Vzhľadom na potrebu numerického riešenia sústav lineárnych rovníc a úlohy o lineárnej komplementarite uvádzame aj prehľad efektívnych

numerických algoritmov na zvládnutie týchto problémov.

## 10.1 Explicitná schéma na riešenie Black–Scholesovej rovnice

Cieľom tejto časti je numerická aproximácia riešenia Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice pre oceňovanie európskych typov derivátov. Rozoberieme metódu konečných diferencií. Táto metóda slúži na aproximáciu jednotlivých parciálnych derivácií. Hoci je pre európske typy derivátov známe explicitné riešenie, zmysel tejto časti je porovnať presné a približné riešenie tak, aby sme sa na základe uspokojivých numerických výsledkov mohli spoľahnúť na numerické metódy aj v prípadoch, kde presné riešenie nie je známe. Takým príkladom sú americké opcie, resp. niektoré exotické typy derivátov.

Na úvod tejto časti pripomenieme transformáciu Black–Scholesovej rovnice na základný tvar parabolickej rovnice. Tento tvar potom bude východiskom pre konštrukciu časovo explicitných a neskôr aj implicitných numerických schém založených na metóde konečných diferencií.

Pripomeňme, že zavedením nezávislých premenných  $x, \tau$  a transformovanej funkcie  $u$  (pozri (3.4), resp. (9.20)):

$$x = \ln(S/E) \in (-\infty, \infty), \tau = T-t \in (0, T), V(S, t) = Ee^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau),$$

kde  $\alpha = \frac{r-D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{r+D}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-D)^2}{2\sigma^2}$ , sa Black–Scholesova parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

transformuje na základný tvar parabolickej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10.1)$$

Počiatočná podmienka pre transformovanú funkciu  $u$  závisí od terminálového pay-off diagramu zvoleného typu derivátu. Pre jednoduché call, resp. put opcie má tvar:

$$u(x, 0) = \begin{cases} e^{\alpha x} \max(e^x - 1, 0) & \text{pre call opciu,} \\ e^{\alpha x} \max(1 - e^x, 0) & \text{pre put opciu.} \end{cases} \quad (10.2)$$

V nasledovných riadkoch si ukážeme hlavné myšlienky aproximácie parciálnej diferenciálnej rovnice (10.1) pomocou metódy konečných diferencií. Táto numerická metóda spočíva v uvažovaní diskretnej siete mrežových bodov v priestore nezávislých premenných  $(x, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  a v náhrade hľadaného riešenia  $u$  a jeho derivácií diferenciami v jednotlivých uzlových bodoch siete.

Zvoľme si priestorový krok  $h > 0$  a časový krok  $k > 0$  tak, že  $k = T/m$ , kde  $m \in \mathbb{N}$  je počet časových delení intervalu  $(0, T)$ . V priestore nezávislých premenných  $(x, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  uvažujme sieť mrežových bodov

$$x_i = ih, \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad \tau_j, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Aproximáciu hľadaného riešenia v mrežovom bode  $(x_i, \tau_j)$  označme ako  $u_i^j$ , t. j.

$$u_i^j \approx u(x_i, \tau_j).$$

Odvodenie konečno-diferenčnej schémy aproximácie rovnice (10.1) vychádza z nahradenia parciálnych derivácií konečnými diferenciami, ktoré je možné vypočítať rozvinutím funkcie do Taylorovho radu. V sieťovom bode  $(x_i, \tau_j)$  uvažujme Taylorov rozvoj funkcie  $u$  do rádu 3. Keďže  $x_{i+1} - x_i = h$  a  $x_i - x_{i-1} = h$ , tak dostaneme

$$u(x_{i+1}, \tau_j) \approx u(x_i, \tau_j) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h^3, \quad (10.3)$$

$$u(x_{i-1}, \tau_j) \approx u(x_i, \tau_j) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h^3, \quad (10.4)$$

pričom chyba, ktorej sa dopúšťame, je rádu  $O(h^4)$  pre  $h \rightarrow 0$ . Odčítaním (10.4) od (10.3) a vydelením výrazom  $2h$  dostaneme aproximáciu prvej parciálnej derivácie  $u$  podľa  $x$  pomocou tzv. centrálnej diferencie

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \quad (10.5)$$

s chybou rádu  $O(h^2)$  pre malé hodnoty  $h$ . Sčítaním (10.3) a (10.4) dostaneme aproximáciu druhej parciálnej derivácie funkcie  $u$  podľa premennej  $x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (10.6)$$

s chybou v druhej derivácii rádu  $O(h^2)$ .

Analogicky pre časovú deriváciu  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  z Taylorovho rozvoja v bode  $(x_i, \tau_j)$  podľa premennej  $\tau$  dostávame aproximáciu

$$u(x_i, \tau_{j+1}) \approx u(x_i, \tau_j) + k \frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j)$$

s chybou rádu  $O(k^2)$  pre  $k \rightarrow 0$ . Na základe tohto rozvoja dostávame doprednú aproximáciu parciálnej derivácie v tvare

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (10.7)$$

s chybou v prvej derivácii podľa  $\tau$  rádu  $O(k)$ . Ak teraz dosadíme aproximácie jednotlivých parciálnych derivácií v mrežovom bode  $(x_i, \tau_j)$  do parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice (10.1), tak dostávame, že aproximácia riešenia  $u_i^j$  v  $(x_i, \tau_j)$  vyhovuje rovnici

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \quad (10.8)$$

s chybou v rovnici rádu  $O(k + h^2)$  pre  $k, h \rightarrow 0$ . To znamená, že hodnota  $u_i^{j+1}$  na novej časovej vrstve  $j + 1$  sa dá nasledovne explicitne vyjadriť pomocou hodnôt riešenia v starej časovej vrstve  $j$

$$u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1 - 2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j, \quad \text{kde } \gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}, \quad (10.9)$$

pre  $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , a  $j = 0, 1, \dots, m - 1$ .

Zvoľme  $N \in \mathbb{N}$  tak veľké, že interval priestorovej diskretizácie  $(-L, L) = (x_{-N+1}, x_{N-1})$  je dostatočne veľký na to, aby sme mohli krajné hodnoty riešenia  $u_{-N}^j$ , resp.  $u_N^j$  aproximovať pomocou okrajových podmienok. Z praktického hľadiska stačí voliť  $L \approx 1, 2$ , pretože to znamená, že reálna finančná premenná  $S$  potom patrí do dostatočne širokého intervalu  $(Ee^{-L}, Ee^L) = (0, 3E, 3, 32E)$ .

Pre európsku call opciu platí  $V(0, t) = 0$  a  $V(S, t) \rightarrow Se^{-D(T-t)}$  pre  $S \rightarrow \infty$ . Pre európsku put opciu, naopak, platí  $V(0, t) = Ee^{-r(T-t)}$  a  $V(S, t) \rightarrow 0$  pre  $S \rightarrow \infty$ . To znamená, že ak  $N$  je dostatočne veľké, tak hodnoty riešenia môžeme aproximovať hraničnými podmienkami:

$$\begin{aligned} w_{-N}^j &= \phi^j := \begin{cases} 0, & \text{pre euro-call opciu,} \\ e^{-\alpha N h + (\beta - r) j k}, & \text{pre euro-put opciu,} \end{cases} \\ u_N^j &= \psi^j := \begin{cases} e^{(\alpha + 1) N h + (\beta - D) j k}, & \text{pre euro-call opciu,} \\ 0, & \text{pre euro-put opciu.} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Ak označíme symbolom  $u^j$  riešenie v časovej vrstve  $\tau_j$ , t. j.

$$u^j = (u_{-N+1}^j, \dots, u_{-1}^j, u_0^j, u_1^j, \dots, u_{N-1}^j) \in \mathbb{R}^n,$$

kde  $n = 2N - 1$ , tak potom môžeme explicitnú schému (10.9) zapísať vo vektorovom zápise

$$u^{j+1} = \mathbf{A}u^j + b^j, \quad \text{pre } j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (10.11)$$

kde  $\mathbf{A}$  je trojdiagonálna matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2\gamma & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & \gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix}, \quad b^j = \begin{pmatrix} \gamma\phi^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma\psi^j \end{pmatrix}.$$

Výhodou vektorového zápisu je možnosť analyzovať stabilitné a konvergenčné vlastnosti explicitnej schémy (10.11) pomocou skúmania vlastností matice  $\mathbf{A}$ . Za predpokladu, že je splnená tzv. Courant–Fridrichsova–Lewy (CFL) podmienka stability pre numerickú diskretizáciu parabolickej rovnice

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \text{t. j. } \frac{\sigma^2 k}{h^2} \leq 1, \quad (10.12)$$

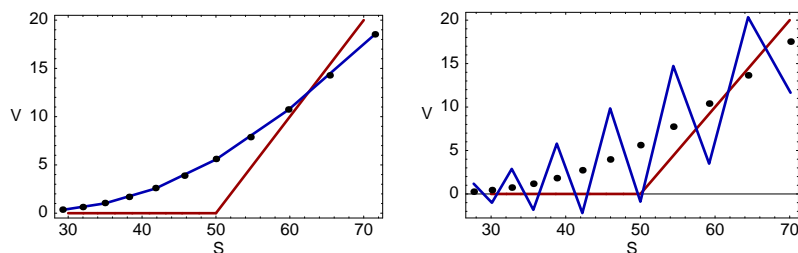
tak explicitná numerická schéma (10.11) je stabilná. To znamená, že platí limita

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0 \\ \sigma^2 k \leq h^2}} \tilde{u}_{k,h}(x, \tau) = u(x, \tau), \quad (10.13)$$

kde  $u(x, \tau)$  je riešenie parabolickej rovnice (10.1) a  $\tilde{u}_{k,h}$  je po častiach lineárna aproximácia funkcie s hodnotami  $\tilde{u}_{k,h}(x_i, \tau_j) = u_i^j$  v mrežových bodoch  $(x_i, \tau_j)$ . Limitu uvažujeme pre parametre  $h, k$  spĺňajúce CFL podmienku (10.12).

Iteračná matica  $\mathbf{A}$  vstupujúca do rekurentného vzťahu (10.11) má pre parameter  $\gamma$  spĺňajúci CFL podmienku (10.12) jednu dôležitú vlastnosť, a to, že jej maximová  $L_\infty$  norma je nanajvyšš rovná jednotke. Najskôr si všimnime, že koeficienty v matici  $\mathbf{A}$  sú nezáporné, t. j.  $\gamma > 0, 1 - 2\gamma \geq 0$ . Ak  $u \in \mathbb{R}^n$ , tak pre  $i$ -tu súradnicu vektora  $(\mathbf{A}u)_i$  platí  $(\mathbf{A}u)_i = \gamma u_{i-1} +$





Obr. 10.1: Riešenie  $S \mapsto V(S, t)$  pre cenu európskej call opcie získané pomocou metódy binomického stromu s  $\gamma = 1/2$  (vľavo) a porovnanie s presným riešením (bodky). Numericky oscilujúce riešenie  $S \mapsto V(S, t)$  nekonvergujúce k presnému riešeniu pre  $\gamma = 0,56 > 1/2$ , kde  $\gamma > 1/2$  nespĺňa CFL podmienku.

$(1 - 2\gamma)u_i + \gamma u_{i+1}$  a teda  $|(\mathbf{A}u)_i| \leq \gamma|u_{i-1}| + (1 - 2\gamma)|u_i| + \gamma|u_{i+1}| \leq (\gamma + (1 - 2\gamma) + \gamma)\|u\|_\infty = \|u\|_\infty$ , kde  $\|u\|_\infty = \max_i |u_i|$  je tzv. maximová alebo  $L_\infty$  norma vektora  $u$ . Tým pádom

$$\|\mathbf{A}u\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad \text{pre každý } u \in \mathbb{R}^n. \quad (10.14)$$

Platí, že ak označíme  $m_j = \min_i u_i^j$ ,  $M_j = \max_i u_i^j$  minimum, resp. maximum vektora  $u^j$ , tak pre  $0 < \gamma \leq 1/2$  dostávame

$$M^{j+1} \leq \max(M^j, \phi^j, \psi^j), \quad m^{j+1} \geq \min(m^j, \phi^j, \psi^j) \quad (10.15)$$

pre  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . Skutočne, pre vnútorné indexy  $i = -N+2, \dots, N-2$  platí  $u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1 - 2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j \leq M^j$ . Pre hraničné indexy  $i = -N+1$  a  $N-1$  musíme ešte zobrať do úvahy okrajové podmienky  $\phi_j$  a  $\psi_j$ . Systému nerovností (10.15) hovoríme diskretný princíp maxima (minima), ktorý je diskretným vyjadrením princípu maxima platného pre riešenia parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc.

Numerické riešenie oceňovania európskej call opcie pomocou explicitnej metódy je znázornené na obr. 10.1. Parametre výpočtu sa nachádzajú vo výpise programu pre explicitnú metódu riešenia problému oceňovania európskej call opcie (pozri tab. 10.1). Dôležité je poznamenať, že explicitná metóda pracuje správne len v prípade, ak je splnená CFL podmienka  $\gamma \leq 1/2$  (pozri obr. 10.1 vľavo). Naopak, ak nie je splnená podmienka  $\gamma \leq 1/2$ , tak numerické riešenie nemusí konvergovať k presnému analytickému riešeniu. Môže dokonca oscilovať, ako je to

Tabuľka 10.1: Výpis programu Mathematica pre explicitnú metódu oceňovania európskej call opcie.

```

sigma = 0.4; r = 0.04; q = 0.12;
T = 1; X = 50;

alfa = (r - q)/sigma^2 - 1/2;
beta = (r + q)/2 + sigma^2/8 + (r - q)^2/(2sigma^2);

NN = 100; n = 2 NN - 1;
m = 20;

k = T/m;
gama = 0.5;
h = sigma Sqrt[k/(2 gama)];

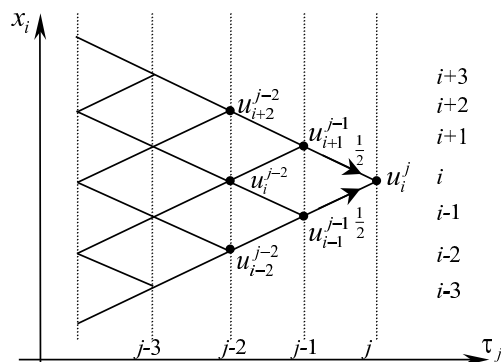
A=Table[Table[If[i==j, 1 - 2gama,
                If[i==j-1, gama, If[i==j+1, gama, 0 ]]],
           {j, 1, n}], {i, 1, n}];

u0 = Table[Exp[alfa i h] Max[Exp[i h] - 1, 0],
           {i, -NN + 1, NN - 1}];
phi[j_] := 0.;
psi[j_] := Exp[(alfa + 1)NN h + (beta - q)j k];

ustare = u0;
For[j = 0, j <= m - 1, 1,
  {
b = Table[If[i == -NN + 1, gama phi[j],
            If[i == NN - 1, gama psi[j], 0]],
           {i, -NN + 1, NN - 1}];
unove = A.ustare + b;
ustare = unove;
Vnove = Table[
  {X Exp[i h],
   X Exp[-alfa i h - beta j k] unove[[i+NN]]
},
  {i, -NN+1, NN-1}];
j++;
}];

ListPlot[Vnove];

```



Obr. 10.2: Binomický strom znázorňujúci riešenie parabolickej rovnice explicitnou schémou s  $2\gamma = \sigma^2 k/h^2 = 1$ .

zreteľné z obr. 10.1 vpravo, ktorý bol vypočítaný pre hodnotu parametra  $\gamma = 0,56 > 1/2$ . V tomto prípade nie je splnený ani diskretný princíp maxima.

### 10.1.1 Binomický a trinomický strom

V tejto časti sa sústreďujeme na špeciálny prípad explicitnej numerickej schémy (10.9). Ak vo vzťahu (10.9) zvolíme pomer medzi priestorovým a časovým krokom tak, že platí

$$h = \sigma\sqrt{k}, \quad (10.16)$$

t. j.  $\gamma = 1/2$ , tak dochádza k vynulovaniu koeficientu  $1 - 2\gamma$  násobiaceho člen  $u_i^j$ . Numerická explicitná schéma má potom jednoduchší tvar:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}u_{i-1}^j + \frac{1}{2}u_{i+1}^j. \quad (10.17)$$

To znamená, že riešenie  $u_i^{j+1}$  v novej časovej vrstve  $\tau_{j+1}$  je aritmetickým priemerom hodnôt riešenia  $u_{i-1}^j$  a  $u_{i+1}^j$  v starej časovej vrstve  $\tau_j$ . Grafické znázornenie výpočtu riešenia vidíme na obr. 10.2. Vzhľadom na podobnosť metódy s binomickým stromom nazývame túto metódu výpočtu hodnoty opcií aj metóda binomického stromu. Vo všeobecnosti, keď  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ , tak metóde výpočtu hodnoty opcie hovoríme metóda trinomického stromu.

**Rizikovo neutrálne pravdepodobnosti a metóda binomického stromu**

Na záver diskusie o metóde binomických stromov uveďme jej súvis s diskretným binomickým modelom oceňovania opcií odvodeným Cox, Rossom a Rubinsteinom v roku 1979 v článku [14] (pozri aj Melicherčík a kol. [47, 45, 46]). Základná myšlienka binomického modelu spočíva v hľadaní rizikovo neutrálnej ceny opcie  $V^{j+1}$  v čase  $t_{j+1} = T - \tau_{j+1}$  na základe informácie o cene akcie a opcie v čase  $t_j = T - \tau_j$ . Predpokladajme, že cena akcie v čase  $t_{j+1}$  je  $S$  a s pravdepodobnosťou  $p \in (0, 1)$  nadobudne v čase  $t_j$  vyššiu hodnotu  $S_+ > S$  a s doplnkovou pravdepodobnosťou  $1 - p \in (0, 1)$  nadobudne v čase  $t_j$  nižšiu hodnotu  $S_- < S$ . Označme ďalej  $V_+$  resp.  $V_-$  ceny opcie, ktoré zodpovedajú scenáru s nárastom ceny akcie, resp. s poklesom ceny akcie. Skonstruujme teraz portfólio zložené z jednej opcie v dlhej (držanej) pozícii a  $\delta$  akcií v krátkej (dlhovanej) pozícii. Princíp neexistencie arbitrážnych príležitostí nám hovorí, že jeho hodnota v čase  $t_{j+1} < t_j$  diskontovaná úrokovou mierou  $r$  bezrizikového dlhopisu za časový interval dĺžky  $k$  sa musí rovnať hodnote portfólia v čase  $t_j$ , t. j.

$$e^{rk}(V - \delta S) = V_- - \delta S_- = V_+ - \delta S_+.$$

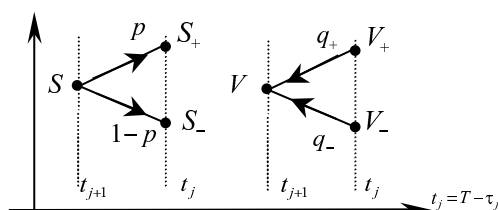
Teda

$$\delta = \frac{V_+ - V_-}{S_+ - S_-}$$

a cena opcie  $V$  sa tým pádom dá vyjadriť vztáhom

$$V = e^{-rk}(q_+V_+ + q_-V_-), \text{ kde } q_+ = \frac{Se^{rk} - S_-}{S_+ - S_-}, q_- = 1 - q_+ \quad (10.18)$$

(pozri [40, Kapitola 2.1]). Opäť na základe princípu neexistencie arbitrážnych príležitostí musí platiť  $S_- < Se^{rk} < S_+$ . To znamená, že  $q_+ > 0$ , a teda  $q_+, q_-$  môžeme interpretovať ako tzv. rizikovo neutrálne pravdepodobnosti. Všimnime si aj dôležitý fakt, že oceňovací vzorec (10.18) neobsahuje reálne pravdepodobnosti  $p$  a  $1 - p$  pre nárast ceny akcie z  $S$  do hodnoty  $S_+$ , resp. z  $S$  do hodnoty  $S_-$ . To je v súlade s faktom, že cena opcie nezávisí od driftu ceny samotného aktíva (pozri kapitolu 3). Na obr. 10.3 je schematicky znázornený výpočet ceny opcie pomocou binomického modelu. Tento binomický model potom môžeme rekurzívne aplikovať pre časy  $t_0 = T, \dots, t_m = 0$  na výpočet hodnoty ceny opcie v čase uzatvárania kontraktu  $t_m = 0$ . Pripomeňme,



Obr. 10.3: Binomický strom znázorňujúci riešenie parabolickej rovnice explicitnou schémou s  $2\gamma = \sigma^2 k / h^2 = 1$ .

že v expiračnom čase  $t_0 = T$  poznáme hodnotu opcie na základe termínového pay-off diagramu.

Binomický model sa však dá odvodiť aj pomocou numerickej schémy (10.17). Označme

$$V_i^j \approx V(S_i, T - \tau_j), \quad \text{kde } S_i = Ee^{x_i} = Ee^{ih}.$$

Potom, ak zohľadníme transformáciu  $V(S, t) = Ee^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, t)$ , tak dostávame  $V_i^j = Ee^{-\alpha ih - \beta jk} u_i^j$ . Numerickej schéma (10.17) sa v pôvodných premenných  $V_i^j$  dá vyjadriť ako

$$V_i^{j+1} = e^{-rk} \left( q_- V_{i-1}^j + q_+ V_{i+1}^j \right), \quad \text{kde } q_{\pm} = \frac{1}{2} e^{\pm \alpha h - (\beta - r)k}. \quad (10.19)$$

Keďže platí  $\sigma^2 k / (2h^2) = \gamma = 1/2$ , tak s využitím vzťahov pre konštanty  $\alpha, \beta$  dostávame

$$\frac{\alpha^2}{2} h^2 - (\beta - r)k = \left( \sigma^2 \frac{\alpha^2}{2} - (\beta - r) \right) k = 0.$$

To znamená, že pre malé hodnoty časového kroku  $k$  platí

$$e^{\pm \alpha h - (\beta - r)k} \approx 1 \pm \alpha h - (\beta - r)k + \frac{\alpha^2}{2} h^2 + O(k^{\frac{3}{2}}) = 1 \pm \alpha h + O(k^{\frac{3}{2}}),$$

pre  $k \rightarrow 0$  a  $h = \sigma \sqrt{k} \rightarrow 0$ . Teda

$$q_+ = \frac{1 + \alpha h}{2}, \quad q_- = \frac{1 - \alpha h}{2}, \quad q_- + q_+ = 1. \quad (10.20)$$

Pretože platí  $q_- + q_+ = 1, q_{\pm} > 0$ , tak týmto konštantám opäť hovoríme rizikovo neutrálne pravdepodobnosti.

## 10.2 Implicitná schéma na riešenie Black–Scholesovej rovnice

V minulej časti sme ukázali explicitnú numerickú schému na riešenie Black–Scholesovej rovnice, ktorá bola založená na aproximácii parciálnych derivácií pomocou metódy konečných diferencií. V tejto časti sa zameriame na časovo implicitnú aproximáciu transformovanej Black–Scholesovej rovnice. Základom implicitnej schémy je aproximácia parciálnej derivácie  $\partial u / \partial \tau$  v mrežovom bode  $x_i^j$  pomocou spätnej časovej diferencie, t. j.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}. \quad (10.21)$$

Dostávame tak, že aproximácia riešenia  $u_i^j$  v  $(x_i, \tau_j)$  vyhovuje rovnici

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \quad (10.22)$$

Tým pádom sa hodnoty  $u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j$  na novej časovej vrstve  $j$  dajú nasledovným implicitným spôsobom vyjadriť pomocou hodnoty riešenia v starej časovej vrstve  $j - 1$

$$-\gamma u_{i-1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1}, \quad \text{kde } \gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2} \quad (10.23)$$

pre  $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , a  $j = 1, \dots, m$ . V prípade, že sa obmedzíme na konečný interval priestorových mrežových bodov  $x_i, i = -N + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$ , tak potom môžeme implicitnú schému riešenia (10.23) zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{A}u^j = u^{j-1} + b^{j-1} \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, m, \quad (10.24)$$

kde  $\mathbf{A}$  je trojdiagonálna matica rozmeru  $n \times n, n = 2N - 1$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{pmatrix}, \quad b^j = \begin{pmatrix} \gamma \phi^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma \psi^{j+1} \end{pmatrix}.$$

kde  $\gamma = \sigma^2 k / (2h^2)$ . Na obr. 10.4 je zachytený priebeh riešenia  $S \mapsto V(S, t)$  európskej call opcie pre parametre  $\sigma = 0,4, r = 0,04, D = 0,12, T - t = 1, E = 50$ . Na obrázku je zachytené riešenie zodpovedajúce parametru  $\gamma = 1/2$  a na obrázku vpravo pre rádovo väčšiu hodnotu tohto parametra  $\gamma = 20$ . Obidva numerické výsledky sa takmer presne zhodujú s analytickým riešením, ktoré v prípade európskych opcií máme k dispozícii. Stručný výpis programu na implicitnú metódu riešenia problému oceňovania európskej call opcie sa nachádza v tab. 10.2.

Poznamenajme, že výhoda implicitnej numerickej schémy spočíva v odstránení reštriktívneho predpokladu  $\sigma^2 k / (2h^2) = \gamma \leq 1/2$ , ktorý v prípade explicitnej schémy príliš zväzuje časový  $k$  a priestorový krok  $h$ . Dá sa ukázať (pozri Vitásek [62] alebo Faddejev [19]), že implicitná numerická schéma (10.24) je bezpodmienečne stabilná. To znamená, že platí limita

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \tilde{u}_{k,h}(x, \tau) = u(x, \tau), \quad (10.25)$$

kde po častiach lineárna funkcia  $\tilde{u}_{k,h}(x, \tau)$  má ten istý význam ako pri explicitnej schéme (10.11). Tým pádom môžeme pomocou implicitnej schémy numericky riešiť parabolické rovnice aj s väčším časovým krokom  $k$ , pri zachovaní malého priestorového kroku  $h$ , ktorý je potrebný na jemné zachytenie priestorového rozlíšenia v cene aktíva. Táto výhoda je však čiastočne kompenzovaná nutnosťou riešiť sústavy lineárnych rovníc. Ako však ukážeme v nasledovnej časti venovanej metódam riešenia sústav lineárnych rovníc, existujú viaceré numericky efektívne metódy riešenia trojdiagonálnych matíc. Medzi ne sa radia: metóda LU rozkladu a iteračná Gauss–Seidelova metóda. Na rozdiel od metódy Gaussovej eliminácie, tieto metódy majú nízke pamäťové nároky a sú rýchlejšie ako eliminačná metóda.

Podobne ako pre explicitnú schému (10.11), tak aj pre implicitnú schému (10.24) sa dajú odvodiť užitočné vlastnosti, z ktorých už plynie bezpodmienečná stabilita implicitnej numerickej schémy. Túto schému môžeme pomocou inverznej matice  $\mathbf{A}^{-1}$  prepísať v tvare

$$w^{j+1} = \mathbf{A}^{-1} w^j + \mathbf{A}^{-1} b^j.$$

Najskôr ukážeme, že inverzná matica  $\mathbf{A}^{-1}$  má maximovú  $L_\infty$  normu  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$  ohraničenú jednotkou, nezávisle od hodnoty parametra  $\gamma > 0$ .

Tabuľka 10.2: Výpis programu Mathematica pre implicitnú metódu oceňovania európskej call opcie.

```

sigma = 0.4; r = 0.04; q = 0,12; T = 1; X = 50;
alfa = (r - q)/sigma^2 - 1/2;
beta = (r + q)/2 + sigma^2/8 + (r - q)^2/(2sigma^2);

NN = 100; n = 2 NN - 1;
m = 20;

k = T/m;
gam = 20;
h = sigma Sqrt[k/(2 gam)];

A = Table[Table[ If[i == j, 1 + 2gam,
                  If[i == j - 1, -gam, If[i == j + 1, -gam, 0 ]]],
                {j, 1, n}], {i, 1, n}];

u0 = Table[Exp[alfa i h] Max[Exp[i h] - 1, 0],
           {i,-NN+1, NN-1}];

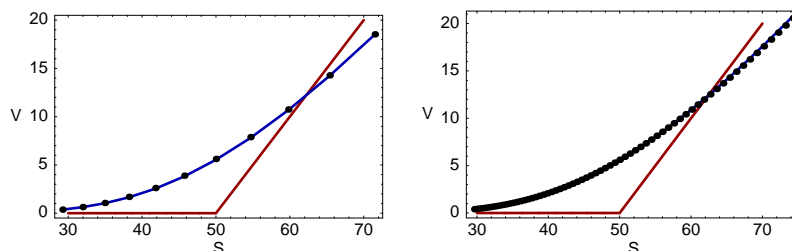
phi[j_]:=0.; psi[j_]:=Exp[(alfa + 1)NN h + (beta-q) j k];

ustare = u0;
For[j = 0, j <= m-1, 1,
  {
  b = Table[If[i == -NN + 1, gam phi[j+1],
             If[i==NN-1, gam psi[j+1], 0]],{i,-NN+1, NN-1}];
  unove = LinearSolve[A, ustare + b];
  ustare = unove;
  Vnove = Table[{ X Exp[i h],
                 X Exp[-alfa i h -beta j k] unove[[i+NN]]},
                {i, -NN+1, NN-1}];
  j++;
  }];

ListPlot[Vnove];

```





Obr. 10.4: Riešenie  $S \mapsto V(S, t)$  pre cenu európskej call opcie získané pomocou implicitnej metódy konečných diferencií s  $\gamma = 1/2$  (vľavo) a porovnanie s presným riešením (bodky). Numerická schéma vykazuje stabilitu aj pre hodnotu parametra  $\gamma = 20 > 1/2$  nespĺňajúcu CFL podmienku.

Skutočne, nech  $\mathbf{A}u = b$ , t. j.  $u = \mathbf{A}^{-1}b$ . Označme  $M = \max_i |u_i|$ . Keďže

$$-\gamma u_{i-1} + (1 + 2\gamma)u_i - \gamma u_{i+1} = b_i,$$

tak potom dostávame

$$(1 + 2\gamma)|u_i| = |b_i + \gamma u_{i-1} + \gamma u_{i+1}| \leq |b_i| + 2\gamma M.$$

Teda  $(1 + 2\gamma)M = (1 + 2\gamma) \max_i |u_i| \leq \max_i |b_i| + 2\gamma M \leq \|b\|_\infty + 2\gamma M$ , z čoho už poľahky dostávame, že platí  $M \leq \|b\|_\infty$ . To ale znamená, že

$$\|\mathbf{A}^{-1}b\|_\infty \leq \|b\|_\infty \quad \text{pre každé } b \in \mathbb{R}^n. \quad (10.26)$$

Ak opäť označíme  $m_j = \min_i u_i^j$ ,  $M_j = \max_i u_i^j$  minimum, resp. maximum vektora  $u^j$ , tak pre ľubovoľnú hodnotu parametra  $\gamma > 0$  dostávame

$$M^{j+1} \leq \max(M^j, \phi^j, \psi^j), \quad m^{j+1} \geq \min(m^j, \phi^j, \psi^j) \quad (10.27)$$

pre  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . Skutočne, nech sa maximum  $M^{j+1}$  nadobúda v indexe  $i_o$ , t. j.  $M^{j+1} = u_{i_o}^{j+1}$ . Potom, ak  $-N+2 \leq i_o \leq N-2$  je vnútorný index, tak platí  $(1 + 2\gamma)M^{j+1} = (1 + 2\gamma)u_{i_o}^{j+1} = u_{i_o}^j + \gamma u_{i_o-1}^{j+1} + \gamma u_{i_o+1}^{j+1} \leq M^j + 2\gamma M^{j+1}$ , a teda  $M^{j+1} \leq M^j$ . Pre hraničné indexy  $i = -N+1$  a  $N-1$  musíme ešte zobrať do úvahy okrajové podmienky  $\phi_j$  a  $\psi_j$ . Systému nerovností (10.15) opäť hovoríme diskretný princíp maxima (minima) pre implicitnú numerickú schému riešenia parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc.

### 10.3 Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc

Cieľom tejto časti je poskytnúť čitateľovi prehľad základných numerických metód pre riešenie úloh lineárnej algebry. Sústreďme sa na problém numerického riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\mathbf{A}u = b, \quad (10.28)$$

kde  $\mathbf{A}$  je štvorcová  $n \times n$  matica reálnych čísel,  $b \in \mathbb{R}^n$  je daný vektor pravej strany a  $u \in \mathbb{R}^n$  je hľadané riešenie sústavy (10.28). Podrobný opis metód na numerické riešenie úloh lineárnej algebry môže čitateľ nájsť v knihách Faddejeva [19], Vitáska [62] alebo Fiedlera [20].

#### 10.3.1 Metóda LU rozkladu

Metóda LU rozkladu spočíva v tom, že maticu  $\mathbf{A}$  rozložíme na súčin dvoch trojuholníkových matic, t. j.  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , kde  $\mathbf{L}$  je dolná trojuholníková matica, t. j.  $L_{ij} = 0$  pre  $i < j$ , a kde  $\mathbf{U}$  je horná trojuholníková matica, t. j.  $U_{ij} = 0$  pre  $i > j$ . Úloha (10.28) sa dá prepísať v tvare  $\mathbf{L}\mathbf{U}u = b$ . Tým pádom hľadaný vektor  $u$  môžeme získať pomocou riešenia dvoch dolných, resp. horných trojuholníkových problémov

$$\mathbf{L}y = b \quad \text{a} \quad \mathbf{U}u = y.$$

Poznamenajme, že lineárnu úlohu s hornou, resp. dolnou trojuholníkovou maticou vieme poľahky vyriešiť postupným dosadzovaním zložiek hľadaného riešenia. Metóda LU rozkladu je vhodná pre lineárne problémy, v ktorých je matica  $\mathbf{A}$  trojdiagonálna, t. j. má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (10.29)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & \cdot & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} d_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \gamma_2 & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & \cdot & d_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Ak trojdiagonálna matica  $\mathbf{A}$  je diagonálne dominantná, t. j. spĺňa podmienku

$$\alpha_i > |\beta_i| + |\gamma_i| \quad \text{pre každé } i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.30)$$

tak potom pre takúto maticu existuje jednoznačný LU rozklad s maticami  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{U}$ , pričom prvky matic  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{U}$  sa dajú vyjadriť vztáhami:

$$d_1 = \alpha_1, \quad d_i = \alpha_i - \frac{\gamma_{i-1}\beta_i}{d_{i-1}}, \quad l_i = \frac{\beta_i}{d_{i-1}} \quad \text{pre } 2 \leq i \leq n.$$

Dá sa ukázať, že podmienka diagonálnej dominancie (10.30) nám zaručí nenulovosť diagonálnych prvkov  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Riešenie  $y$  sústavy lineárnych rovníc:  $\mathbf{L}y = b$  s dolnou trojuholníkovou maticou  $\mathbf{L}$  potom dostaneme vyjadrené v explicitnom tvare

$$y_1 = b_1; \quad y_i = b_i - l_i y_{i-1} \quad \text{pre } i = 2, \dots, n.$$

Nakoniec, riešenie lineárnej sústavy  $\mathbf{U}u = y$  dostaneme v tvare

$$u_n = \frac{y_n}{d_n}; \quad u_i = \frac{y_i - \gamma_i u_{i+1}}{d_i} \quad \text{pre } i = n-1, \dots, 1.$$

### 10.3.2 Gauss–Seidelova relaxačná SOR metóda

Metóda LU rozkladu opísaná v predošlej časti nám poskytuje presné riešenie lineárnej sústavy rovníc. Niekedy však nie je potrebné presné riešenie, ale postačuje aj približné riešenie. Táto situácia obvykle nastáva vtedy, keď riešenie sústavy lineárnych rovníc je súčasťou celého cyklu numerických riešení. V takých prípadoch vystačíme aj s približným riešením sústavy lineárnych rovníc, pretože nemá veľký zmysel vyriešiť jeden podproblém (sústavu lineárnych rovníc) presne, pričom inej, obvykle väčšej chyby sa dopúšťame ďalšími numerickými aproximáciami.

Gauss–Seidelova relaxačná SOR metóda je populárna metóda riešenia lineárnych sústav rovníc. Jej podstata spočíva v hľadaní riešenia sústavy lineárnych rovníc pomocou iteratívne skonštruovanej postupnosti približných riešení. V nasledovných riadkoch si objasníme podstatu relaxovaného variantu pôvodnej Gauss<sup>1</sup>–Seidelovej iteračnej metódy. Táto metóda má názov SOR metóda (Successive Over Relaxation).

<sup>1</sup>Karl Friedrich Gauss, 1777-1855, matematik, fyzik, geofyzik a astronóm. Pracoval najmä v oblasti matematickej analýzy, diferenciálnej geometrie, teórie pravdepodobnosti (Gaussova krivka), teórii chýb (Gaussova metóda najmenších štvorcov). Vypracoval jednu z prvých teórií elektromagnetizmu. Zaviedol absolútnu sústavu fyzikálnych jednotiek.

Maticu  $\mathbf{A}$  rozpíšme na súčet jej poddiagonálnej, diagonálnej a nad-diagonálnej časti, t. j.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U},$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} & \text{pre } j < i, & \text{ inak } \mathbf{L}_{ij} = 0, \\ \mathbf{D}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} & \text{pre } j = i, & \text{ inak } \mathbf{D}_{ij} = 0, \\ \mathbf{U}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} & \text{pre } j > i, & \text{ inak } \mathbf{U}_{ij} = 0. \end{aligned}$$

O diagonálnej matici  $\mathbf{D}$  budeme predpokladať, že je invertovateľná, t. j.  $A_{ii} \neq 0$ , pre  $i = 1, \dots, n$ . Nech  $\omega > 0$  je zvolený relaxačný parameter. Riešenie úlohy  $\mathbf{A}u = b$  je potom ekvivalentné s riešením úlohy

$$\mathbf{D}u = \mathbf{D}u + \omega(b - \mathbf{A}u).$$

Ak využijeme rozklad  $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ , tak po krátkej úprave dostaneme, že  $u$  je riešením lineárnej úlohy

$$(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})u = (1 - \omega)\mathbf{D}u + \omega(b - \mathbf{U}u). \quad (10.31)$$

Matica  $\mathbf{D} + \omega\mathbf{L}$  je invertovateľná vďaka tomu, že platí  $A_{ii} \neq 0$ . To znamená, že  $u$  je riešenie lineárnej úlohy

$$u = \mathbf{T}_\omega u + c_\omega, \quad \text{kde } \mathbf{T}_\omega = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1} ((1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}) \quad (10.32)$$

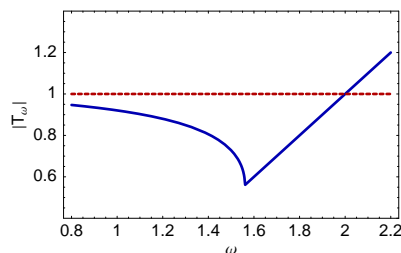
a  $c_\omega = \omega(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}b$ . Pomocou operátora  $\mathbf{T}_\omega$  definujme rekurentnú postupnosť aproximatívnych riešení úlohy  $\mathbf{A}u = b$ :

$$u^0 = 0, \quad u^{p+1} = \mathbf{T}_\omega u^p + c_\omega \quad \text{pre } p = 1, 2, \dots \quad (10.33)$$

Poznamenajme, že počiatočná podmienka  $u^0$  môže byť vybraná aj inak, podľa charakteru úlohy, ktorú riešime. Zrejme, ak postupnosť vektorov aproximatívnych riešení  $u^p$  konverguje (v  $\mathbb{R}^n$ ) k vektoru  $u$  pre  $p \rightarrow \infty$ , tak, s ohľadom na spojitosť lineárneho operátora  $\mathbf{T}_\omega$ , dostávame, že  $u = \mathbf{T}_\omega u + c_\omega$ , čo znamená, že vektor  $u$  je riešenie pôvodnej lineárnej sústavy  $\mathbf{A}u = b$ . Na druhej strane, podmienka na normu matice (lineárneho operátora)  $\mathbf{T}_\omega$

$$\|\mathbf{T}_\omega\| < 1 \quad (10.34)$$

nám zabezpečí, že zobrazenie  $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto \mathbf{T}_\omega u + c_\omega \in \mathbb{R}^n$  je kontraktívne. Potom podľa Banachovej vety o pevnom bode —pozri napr. [11]), postupnosť vektorov  $u^p$  skutočne konverguje k vektoru  $u$  pre  $p \rightarrow \infty$ .



Obr. 10.5: Graf spektrálnej normy operátora  $\|\mathbf{T}_\omega\|$  ako funkcie parametra  $\omega$ .

Na základe (10.31) môžeme postupnosť definovanú rekurentným spôsobom (10.33) algoritmicke počítať nasledovným jednoduchým spôsobom. Pre  $p = 1, 2, \dots$  a  $i = 1, 2, \dots, n$  platí

$$u_i^{p+1} = \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p. \quad (10.35)$$

Na koniec tejto časti rozoberieme optimálnu voľbu relaxačného parametra  $\omega \neq 0$ . Vzhľadom na konvergenčné vlastnosti postupností definovaných rekurentným predpisom (10.33) je dôležité správnu voľbou parametra  $\omega$  dosiahnuť čo možno najmenšiu hodnotu normy  $\|\mathbf{T}_\omega\|$  lineárneho operátora  $\mathbf{T}_\omega$ . Ako jeho normu môžeme napríklad uvažovať Frobeniovu normu matice:  $\|\mathbf{B}\| = (\sum_{i,j=1}^n \mathbf{B}_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$  alebo spektrálnu normu  $\|\mathbf{B}\| = \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$ , kde  $\sigma(B)$  je množina vlastných hodnôt matice  $\mathbf{B}$ . Na obr. 10.5 je znázornený priebeh spektrálnej normy operátora  $\mathbf{T}_\omega$  pre rôzne hodnoty parametra  $\omega$ . Ako maticu  $\mathbf{A}$  sme uvažovali trojdiagonálnu maticu v tvare (10.29), kde  $\alpha_i = 2, \beta_i = \gamma_i = -1$  a  $n = 10$ . Z obrázka je zároveň vidno, že existuje optimálna voľba relaxačného parametra  $\omega \approx 1,5$  pre nami uvažovanú maticu  $\mathbf{A}$  tak, že norma operátora  $\mathbf{T}_\omega$  je minimálna. Vo všeobecnosti platí, že pre trojdiagonálne diagonálne dominantné matice existuje optimálna hodnota parametra

$$\omega \in (1, 2),$$

pre ktorú je norma  $\|\mathbf{T}_\omega\|$  minimálna, pričom platí  $\|\mathbf{T}_\omega\| < 1$  (pozri Vitásek [62]).

## 10.4 Metódy riešenia úlohy o lineárnej komplementarite

Cieľom tejto sekcie je priblížiť čitateľovi metódu riešenia úlohy o lineárnej komplementarite. Ako sme už spomenuli v predošlých častiach, riešenie úlohy o lineárnej komplementarite je východiskom pre numerické zvládnutie problému oceňovania amerických typov derivátov. V prvej časti ukážeme jednoduchú modifikáciu SOR relaxačnej metódy, ktorú budeme môcť použiť na riešenie úlohy o lineárnej komplementarite. V druhej časti na probléme prekážky ukážeme praktické využitie numerických metód na riešenie úlohy o lineárnej komplementarite.

Naším cieľom je numericky zvládnuť nasledovnú úlohu o lineárnej komplementarite:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u &\geq b, \quad u \geq g, \\ (\mathbf{A}u - b)_i(u_i - g_i) &= 0 \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Zápisy  $\mathbf{A}u \geq b$ , resp.  $u \geq g$  znamenajú, že príslušné nerovnosti sú splnené pre všetky súradnice vektorov na ľavej i pravej strane nerovnosti. Budeme predpokladať, že matica  $\mathbf{A}$  je diagonálne dominantná, t. j. spĺňa podmienku (10.30).

### 10.4.1 Projektovaná SOR metóda

Východiskom pre efektívnu numerickú metódu na riešenie úlohy (10.36) je modifikovaná Gauss–Seidelova SOR metóda. V každom iteračnom kroku  $p$  pozmeníme nové aproximatívne riešenie  $u^{p+1}$  tak, aby vyhovovalo podmienke  $u \geq g$ . Napokon ukážeme, že limita týchto aproximatívnych riešení je skutočne riešením úlohy o lineárnej komplementarite (10.36).

Definujme rekurentnú postupnosť aproximatívnych riešení úlohy o lineárnej komplementarite:

$$u^0 = 0, \quad u^{p+1} = \max(\mathbf{T}_\omega u^p + c_\omega, g) \quad \text{pre } p = 1, 2, \dots, \quad (10.37)$$

pričom maximum sa berie po jednotlivých zložkách, t. j.

$$u_i^{p+1} = \max((\mathbf{T}_\omega u^p + c_\omega)_i, g_i) \quad \text{pre každé } i = 1, 2, \dots, n.$$

Predpokladajme na okamih, že máme zaručenú konvergenciu postupnosti vektorov  $u^p$  k vektoru  $u \in \mathbb{R}^n$  pre  $p \rightarrow \infty$ . Keďže  $u^p \geq g$ , tak aj  $u = \lim_{p \rightarrow \infty} u^p \geq g$ . Na základe vzťahu (10.35) dostávame

$$u_i^{p+1} = \max \left( \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p, g_i \right) \quad (10.38)$$

pre každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . To znamená, že v limite  $p \rightarrow \infty$  platí nerovnosť

$$u_i \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j - \sum_{j > i} A_{ij} u_j \right) + (1 - \omega) u_i.$$

Vďaka diagonálnej dominancii platí  $A_{ii} > 0$ . To znamená

$$A_{ii} u_i \geq \omega \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j - \sum_{j > i} A_{ij} u_j \right) + (1 - \omega) A_{ii} u_i.$$

Keďže  $\omega > 0$ , tak napokon po krátkej úprave dostávame platnosť nerovnosti

$$(\mathbf{A}u)_i \geq b_i \quad \text{pre každé } i = 1, 2, \dots, n.$$

Nakoniec, ak pre nejaký index  $i$  platí ostrá nerovnosť  $u_i > g_i$ , tak potom pre všetky dostatočne veľké hodnoty iteračného indexu  $p$  platí  $u_i^{p+1} > g_i$ . Z definície postupnosti vektorov  $u^p$  potom nevyhnutne plynie

$$u_i^{p+1} = \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p$$

pre všetky dostatočne veľké indexy  $p$ . Prechodom k limite  $p \rightarrow \infty$  dostávame, že pre index  $i$  platí rovnosť  $(\mathbf{A}u)_i = b_i$ . To znamená, že  $(\mathbf{A}u - b)_i (u_i - g_i) = 0$ , a teda vektor  $u$  je skutočne riešením úlohy o lineárnej komplementarite (10.36).

Na záver rozoberieme otázku konvergenzie postupnosti definovanej rekurentným predpisom (10.37). Označme

$$F(u) = \max (\mathbf{T}_\omega u^p + c_\omega, g).$$

Zrejme  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je nelineárne zobrazenie. Ukážeme, že je kontraktívne, a teda na základe Banachovej vety o pevnom bode postupnosť  $u^p$

konverguje v  $\mathbb{R}^n$ . Pre ľubovoľné dva vektory  $u, v \in \mathbb{R}^n$  platí

$$F(u)_i - F(v)_i = \begin{cases} \phi_i - \psi_i, & \text{ak } \phi_i, \psi_i \geq g_i, \\ 0, & \text{ak } \phi_i, \psi_i \leq g_i, \\ \phi_i - g_i, & \text{ak } \phi_i \geq g_i, \psi_i < g_i, \\ g_i - \psi_i, & \text{ak } \phi_i < g_i, \psi_i \geq g_i, \end{cases}$$

kde  $\phi = \mathbf{T}_\omega u + c_\omega, \psi = \mathbf{T}_\omega v + c_\omega$ . V prípade  $\phi_i \geq g_i$  a  $\psi_i < g_i$  dostávame  $0 \leq \phi_i - g_i < \phi_i - \psi_i$ . Analogicky, pre  $\psi_i \geq g_i$  a  $\phi_i < g_i$  máme  $0 \leq \psi_i - g_i < \psi_i - \phi_i$ . V každom prípade však pre všetky  $i = 1, \dots, n$  platí

$$|F(u)_i - F(v)_i| \leq |\phi_i - \psi_i| \leq |(\mathbf{T}_\omega u)_i - (\mathbf{T}_\omega v)_i|.$$

Teda  $\|F(u) - F(v)\| \leq \|\mathbf{T}_\omega u - \mathbf{T}_\omega v\| = \|\mathbf{T}_\omega(u - v)\| \leq \|\mathbf{T}_\omega\| \|u - v\|$ . Tým pádom sme ukázali, že

$$\begin{aligned} \text{ak } \|\mathbf{T}_\omega\| < 1 &\Rightarrow F \text{ je kontraktívne na } \mathbb{R}^n, \\ \text{postupnosť } u^p &\text{ konverguje k } u \text{ pre } p \rightarrow \infty, \\ \text{vektor } u \in \mathbb{R}^n &\text{ je riešením úlohy (10.36).} \end{aligned} \quad (10.39)$$

Iteračná metóda riešenia úlohy (10.36) opísaná rekurentným predpisom (10.37), resp. (10.38) sa nazýva projektovaná SOR metóda (PSOR). V kontexte riešenia variačných nerovnic bola navrhnutá a analyzovaná Elliottom a Ockendonom v [17].

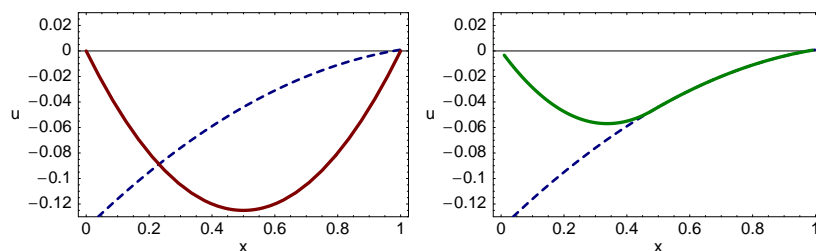
#### 10.4.2 Numerické riešenie problému prekážky

V tejto časti sa pokúsime vysvetliť základný princíp riešenia úloh s voľnou hranicou, medzi ktoré patrí aj úloha na oceňovanie americkej call alebo put opcie. Problémy s voľnou hranicou majú svoj význam aj v iných oblastiach, najmä vo fyzike a mechanike. Jedným z najjednoduchších príkladov je tzv. problém prekážky, ktorý priamo súvisí s oceňovaním amerických opcií či iných derivátov s predčasnou možnosťou uplatnenia.

Na intervale  $[0, 1]$  uvažujme elasticú strunu (alebo tenký nosník), na ktorú pôsobí zadaná sila s veľkosťou  $b$ . Ak označíme funkciou  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  výchylku struny pevne votknutej v bodoch  $x = 0, 1$ , tak z teórie pružnosti a pevnosti je známe, že v zjednodušenom prípade má rovnica opisujúca túto výchylku tvar:

$$-u''(x) = b(x), \quad \text{pre } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$





Obr. 10.6: Vľavo je plnou čiarou zobrazené riešenie  $\tilde{u}$  úlohy  $-\tilde{u}''(x) = b(x)$ ,  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$  bez obmedzenia a prerušovaná čiarou prekážka  $g(x)$ . Vpravo je znázornené riešenie  $u$  úlohy s prekážkou.

V teórii pružnosti a pevnosti sa odvodzuje táto rovnica ako riešenie variačnej úlohy, v ktorej sa minimalizuje celková energia struny daná ako rozdiel integrálov celkovej napätosti a potenciálnej energie:  $\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx - \int_0^1 bu dx$ . Numerické riešenie okrajovej úlohy sa dá jednoducho získať diskretizáciou. Ak označíme  $x_i = i/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  body delenia intervalu  $[0, 1]$  na  $n$  rovnakých častí a výchylku  $u(x_i)$  v bode  $x_i$  označíme ako  $u_i$ , tak potom numerické riešenie môže byť získané riešením sústavy lineárnych rovníc

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = b_i \quad \text{pre } i = 1, \dots, n-1,$$

kde  $h = 1/n$ ,  $b_i = b(x_i)$  a druhú deriváciu  $u''(x)$  v bode  $x_i$  sme aproximovali pomocou metódy konečných diferencií. Poznamenajme, že  $u_0 = 0 = u_n$ . Táto sústava rovníc sa dá zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{A}u = b,$$

pričom matica  $\mathbf{A}$  je  $(n-1) \times (n-1)$  trojdiagonálna matica v tvare (10.29) s prvkami  $\alpha_i = 2/h^2$ ,  $\beta_i = \gamma_i = -1/h^2$ . Graf parabolického riešenia tejto rovnice pre konštantnú silu  $b = -1$  je znázornený plnou čiarou na obr. 10.6 vľavo hore.

Uvažujme teraz, že na intervale  $[0, 1]$  máme navyše zadanú prekážku definovanú funkciou  $g$ , pričom požadujeme, aby riešenie bolo aspoň také, ako je daná prekážka, t. j.

$$u(x) \geq g(x), \quad \text{pre } x \in (0, 1).$$

Ak je struna nad prekážkou v bode  $x$ , t. j. ak  $u(x) > g(x)$ , tak požadujeme, aby bola splnená diferenciálna rovnica  $-u''(x) = b(x)$ . V každom prípade (t. j. aj pre  $u(x) = g(x)$ ) však požadujeme splnenie diferenciálnej nerovnice  $-u''(x) \geq b(x)$ . Dá sa odvodiť, že táto nerovnica je dôsledkom nutnej podmienky nadobúdania minima funkcionálu  $\Phi$  na množine  $\{u \in C^1(0, 1), u(x) \geq g(x) \text{ pre } x \in (0, 1)\}$ . Ak označíme  $g_i = g(x_i)$ , tak v diskrétnom tvare môžeme reprezentovať riešenie problému prekážky pomocou riešenia úlohy o lineárnej komplementarite (10.36), t. j.

$$\mathbf{A}u \geq b, \quad u \geq g, \quad (\mathbf{A}u - b)_i(u_i - g_i) = 0 \text{ pre } i = 1, \dots, n.$$

Ukážka riešenia tohto problému získaného Projektovanou SOR metódou je na obr. 10.6. Poznamenajme, že riešenie problému prekážky je spojitě diferencovateľné v bode „nalepenia“ sa struny na prekážku. Táto vlastnosť riešenia problému prekážky je analogická s požadovanou vlastnosťou riešenia úlohy na oceňovanie americkej call alebo put opcie.

## 10.5 Numerické metódy oceňovania amerických typov opcií

Numerickú schému pre problém určenia ceny amerických opcií budeme prezentovať pre formuláciu v tvare lineárnej komplementarity. Využijeme pri tom vlastnosti PSOR (Projektovaného SOR) algoritmu, ktorý bol analyzovaný v predošlej časti. Na základe poznatkov z kapitoly 9 sa dá problém oceňovania americkej call, resp. put opcie súhrnne zapísať v tvare lineárnej komplementarity (9.26), t. j.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \quad u(x, \tau) - g(x, \tau) &\geq 0 \end{aligned}$$

pre každé  $x \in \mathbb{R}, 0 < \tau < T$ . Našou úlohou je pritom nájsť spojitě diferencovateľnú funkciu  $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  takú, že platí vyššie uvedená lineárna komplementarita. Pripomeňme, že funkcia  $g(x, \tau)$  reprezentuje transformovaný pay-off diagram príslušného typu opcie,

$$\begin{aligned} g(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} \max(e^x - 1, 0) \quad \text{pre call opciu,} \\ g(x, \tau) &= e^{\alpha x + \beta \tau} \max(1 - e^x, 0) \quad \text{pre put opciu,} \end{aligned}$$

kde  $\alpha = \frac{r-D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{r+D}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-D)^2}{2\sigma^2}$ . Počiatková podmienka pre funkciu  $u$  má tvar:

$$u(x, 0) = g(x, 0), \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}.$$

Teraz pristúpime k diskretizácii problému lineárnej komplementarity. Symbolmi  $u^j$  a  $g^j$  označme aproximácie riešenia a transformovaného pay-off diagramu v časovej vrstve  $\tau_j$ , t. j.

$$\begin{aligned} u^j &= (u_{-N+1}^j, \dots, u_{-1}^j, u_0^j, u_1^j, \dots, u_{N-1}^j) \in \mathbb{R}^n, \\ g^j &= (g_{-N+1}^j, \dots, g_{-1}^j, g_0^j, g_1^j, \dots, g_{N-1}^j) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

kde  $n = 2N - 1$ . Zvoľme  $N \in \mathbb{N}$  tak veľké, že interval priestorovej diskretizácie  $(x_{-N+1}, x_{N-1})$  je dostatočne veľký na to, aby sme mohli krajné hodnoty riešenia  $u_{-N}^j$ , resp.  $u_N^j$  aproximovať pomocou okrajových podmienok. Vzhľadom na okrajové podmienky (9.24), resp. (9.25) vystupujúce v spojitnej formulácii úlohy pre americkú call, resp. put opciu môžeme okrajové podmienky pre diskretizované riešenie zvoliť nasledovne:

$$u_{-N}^j = \phi^j := g(x_{-N}, \tau_j), \quad u_N^j = \psi^j := g(x_N, \tau_j). \quad (10.40)$$

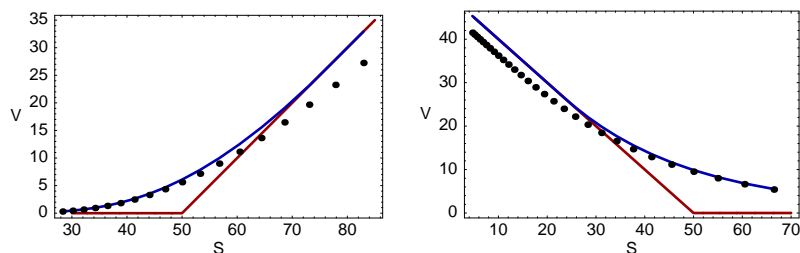
Potom môžeme problém lineárnej komplementarity zapísať v diskretnom vektorovom tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u^{j+1} &\geq u^j + b^j, \quad u^{j+1} \geq g^{j+1} \quad \text{pre } j = 0, 1, \dots, m-1, \\ (\mathbf{A}u^{j+1} - u^j - b^j)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i &= 0 \quad \text{pre každé } i, \end{aligned} \quad (10.41)$$

pričom  $u^0 = g^0$ . Matica  $\mathbf{A}$  je tá istá trojdiagonálna matica rozmeru  $n \times n$ ,  $n = 2N - 1$  ako v prípade implicitnej schémy pre európske typy opcií, t. j.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ & & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix}, \quad b^j = \begin{pmatrix} \gamma\phi^{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma\psi^{j+1} \end{pmatrix},$$

kde opäť  $\gamma = \sigma^2 k / (2h^2)$ . Diskretný problém lineárnej komplementarity môžeme numericky vyriešiť použitím PSOR (Projektovanej SOR)



Obr. 10.7: Riešenie  $S \mapsto V(S, t)$  pre cenu americkej call opcie (vľavo) a put opcie (vpravo) získané pomocou implicitnej metódy konečných diferencií a Projektovaného SOR algoritmu na riešenie príslušnej úlohy o lineárnej komplementarite. Bodkami je vyznačené riešenie európskeho typu príslušnej opcie.

metódy diskutovanej v časti 10.4.1. Na obr. 10.7 je zachytený priebeh riešenia  $S \mapsto V(S, t)$  pre oceňovanie americkej call a put opcie. Finančné parametre výpočtu boli zvolené nasledovne:  $\sigma = 0,4, r = 0,04, D = 0,12, T - t = 1, E = 50$  v prípade call opcie a  $\sigma = 0,6, r = 0,08, D = 0, T - t = 1, E = 50$  pre put opciu. V oboch ukážkach sme použili numerické parametre  $N = 100, m = 20$ , pričom  $\sigma^2 k_i / (2h^2) = \gamma = 1$ . Na každej časovej vrstve sme použili 20 iterácií PSOR algoritmu s relaxačným parametrom  $\omega = 1,7$ . Stručný výpis programu v systéme Mathematica pre riešenie problému oceňovania americkej call opcie sa nachádza v tab. 10.3.

### 10.5.1 Identifikácia hranice predčasného uplatnenia americkej opcie

Zámerom tejto časti je identifikácia polohy voľnej hranice predčasného uplatnenia americkej call alebo put opcie. Projektovaný SOR algoritmus na riešenie problému oceňovania amerických opcií bezprostredne neponúka informáciu o hodnote funkcie  $S_f(t)$ . Na druhej strane je zrejmé, že túto hodnotu môžeme neskôr dodatočne vypočítať pomocou znalosti priebehu funkcie  $V(S, t)$ . Ak teda v danom čase  $t \in [0, T]$  poznáme riešenie  $V(S, t)$ , tak poloha hranice predčasného uplatnenia opcie je daná

$$S_f(t) = \begin{cases} \min(S > 0, V(S, t) = S - E) & \text{pre call opciu,} \\ \max(S > 0, V(S, t) = E - S) & \text{pre put opciu.} \end{cases} \quad (10.42)$$

Tabuľka 10.3: Výpis programu Mathematica pre PSOR metódu oceňovania americkej call opcie.

```

sigma = 0.4; r = 0.04; q = 0.12; T = 1; X = 50;
alfa = (r - q)/sigma^2 - 1/2;
beta = (r + q)/2 + sigma^2/8 + (r - q)^2/(2sigma^2);

NN=100; n=2 NN-1; m=20; MaxSORiter = 20; omega = 1.7;
gam = 1; k = T/m; h = sigma Sqrt[k/(2 gam)];

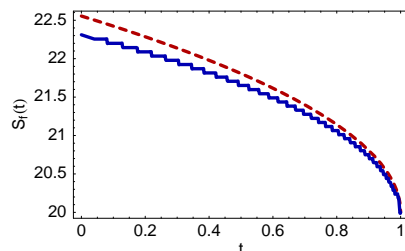
A = Table[Table[ If[i == j, 1 + 2gam,
                  If[i == j-1, -gam, If[i == j+1, -gam, 0 ]]],
              {j, 1, n}], {i, 1, n}];

g[x_, tau_] := Exp[alfa x + beta tau] Max[Exp[x]-1, 0];
ustare = Table[g[i h, 0], {i, -NN + 1, NN - 1}];
phi[j_] := g[-NN h, j k];
psi[j_] := g[NN h, j k];

For[j = 1, j <= m, 1,
  {
  b = Table[If[i == -NN + 1, gam phi[j],
             If[i == NN - 1, gam psi[j], 0]],
            {i, -NN + 1, NN - 1}];
  gvec = Table[g[i h, j k], {i, -NN + 1, NN - 1}];
  unove = ustare;
  For[p = 1, p <= MaxSORiter, 1,
    {
    For[ii = 1, ii <= n, 1,
      {
      upom = (1 - omega) unove[[ii]]
      + (omega/A[[ii, ii]])*(b[[ii]] + ustare[[ii]]
        - If[ii > 1, A[[ii, ii - 1]]*unove[[ii - 1]], 0]
        - If[ii < n, A[[ii, ii + 1]]*unove[[ii + 1]], 0 ] );
      unove=ReplacePart[unove, Max[upom, gvec[[ii]] ], ii];
      ii++;}};
    p++;}};
  ustare = unove;
  Vnove = Table[
  {X Exp[i h], X Exp[-alfa i h -beta j k] unove[[i+NN]]},
  {i, -NN+1, NN-1}];
  j++;}};

ListPlot[Vnove];

```



Obr. 10.8: Porovnanie vypočítanej hranice predčasného uplatnenia call opcie s analytickou aproximáciou z kapitoly 9 (prerušovaná čiara).

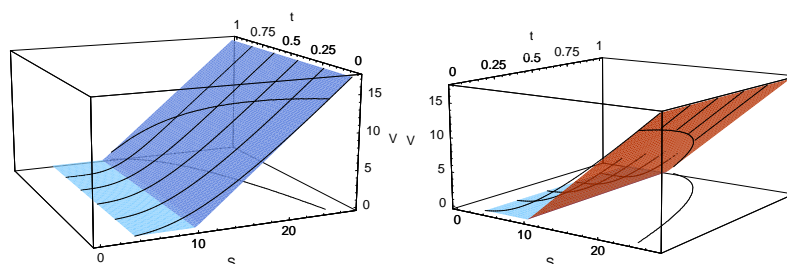
Použitím numerickej aproximácie máme k dispozícii iba približné riešenie dané v mrežových bodoch  $(S_i, T - \tau_j)$ , kde  $S_i = Ee^{ih}$  a  $\tau_j = jk$ . To znamená, že aproximáciu polohy hranice predčasného uplatnenia opcie môžeme získať nasledovným algoritmom

$$S_f(T - \tau_j) = \begin{cases} \min(S_i > 0, & |V(S_i, T - \tau_j) - (S_i - E)| < \varepsilon) \\ & \text{pre call opciu,} \\ \max(S_i > 0, & |V(S_i, T - \tau_j) - (E - S_i)| < \varepsilon) \\ & \text{pre put opciu,} \end{cases} \quad (10.43)$$

kde  $0 < \varepsilon \ll 1$  je vopred zvolená tolerancia. Pre praktické výpočty, v ktorých  $E \approx 10$ , stačí uvažovať  $\varepsilon \approx 10^{-5}$ .

Na obr. 10.8 je znázornená hranica predčasného uplatnenia call opcie a jej porovnanie s analytickou aproximáciou z kapitoly 9. Výpočet bol realizovaný pre finančné parametre  $\sigma = 0,2, r = 0,1, q = 0,05, E = 10, T = 1$ . Hodnota  $S_f(0) = 22,3893$  polohy hranice predčasného uplatnenia call opcie na počiatku  $t = 0$  je s presnosťou na dve desatinné miesta zhodná s hodnotou vypočítanou v článku Ševčoviča [56] pomocou riešenia nelineárnej integrálnej rovnice pre polohu voľnej hranice. Na obr. 10.9 je zachytený graf riešenia  $(S, t) \mapsto V(S, t)$  pre cenu americkej call opcie. Zachytená je aj poloha hranice predčasného uplatnenia call opcie. Tento výpočet bol realizovaný pre  $\sigma = 0,6, r = 0,1, q = 0,09, E = 10, T = 1$ .

Na záver tejto časti uvádzame aj príklad výpočtu oceňovania amerického typu binárnej opcie. Tento druh opcií bol z pohľadu európskych typov derivátov analyzovaný v kapitole 6, časť 6.4. Pripomeňme, že



Obr. 10.9: Dva pohľady na 3D graf riešenia  $(S, t) \mapsto V(S, t)$  pre cenu americkej call opcie. Päť vybraných profilov riešenia je porovnaných s plochou pay-off diagramu. Znáznornená je poloha hranice predčasného uplatnenia call opcie.

pay-off diagram binárnej opcie má tvar

$$V^{bin}(S, T) = \begin{cases} 1, & \text{ak } S \in [E_1, E_2], \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

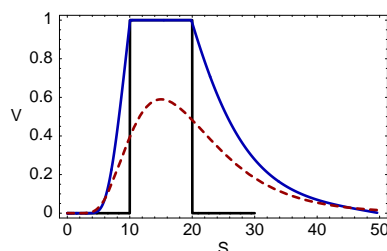
kde  $0 < E_1 < E_2$ . Vzorec oceňovania európskeho typu binárnej opcie v čase  $t \in [0, T]$  má tvar  $V^{bin}(S, t) = e^{-r(T-t)}(N(d_1^{E_1}) - N(d_1^{E_2}))$ . Ak budeme uvažovať transformovaný pay-off diagram

$$g(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} V^{bin}(S, T),$$

kde  $S = e^x$  a použijeme Projektovaný SOR algoritmus na výpočet americkeho typu binárnej opcie, tak dostaneme výsledok znázornený na obr. 10.10. Všimnime si, že v porovnaní s európskym typom binárnej opcie je hodnota americkej binárnej opcie stále väčšia alebo rovná ako je jej pay-off diagram.

### 10.5.2 Implikovaná volatilita americkej opcie

Podobne ako v časti 4.2 môžeme aj v prípade amerických opcií hľadať takú hodnotu parametra volatility  $\sigma > 0$ , pre ktorú sa vypočítaná hodnota americkej opcie zhoduje s reálnou trhovou hodnotou opcie. Implikovaná volatilita  $\sigma_{impl} > 0$  je taká hodnota parametra volatility, pre ktorú teoretická cena americkej call (put) opcie  $V(S, t; \sigma)$  je v danom čase  $t$  a pre danú hodnotu ceny aktíva  $S = S_{real}(t)$  zhodná s reálnou hodnotou ceny americkej opcie  $V_{real}(t)$ . Nájsť implikovanú volatilitu



Obr. 10.10: Porovnanie riešenia amerického a európskeho (prerušovaná čiara) typu binárnej opcie pre tie isté finančné parametre:  $E_1 = 10, E_2 = 20, r = 0,04, q = 0,02, T - t = 1$ .

$\sigma_{impl}$  pre danú opciu (s danou splatnosťou  $T$  a expiračnou cenou  $E$ ) teda spočíva v riešení implicitnej rovnice

$$V_{real}(t) = V(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}). \tag{10.44}$$

Na výpočet ceny americkej opcie  $V(S_{real}(t), t; \sigma)$  pre známe hodnoty ceny aktíva  $S_{real}(t)$  a opcie  $V_{real}(t)$  v čase  $t \in [0, T)$  použijeme Projektovaný SOR algoritmus, pričom hodnotu ceny opcie lineárne interpolujeme z vypočítaných hodnôt pre ceny  $S_i < S_{real}(t) < S_{i+1}$ . Keďže aj cena americkej opcie je rastúca funkcia od parametra volatility  $\sigma > 0$ , tak výpočet ceny opcie opakovane realizujeme pre dostatočne jemnú diskretnú množinu volatilit  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_P$ . Hodnotu  $\sigma_p$ , pre ktorú je chyba  $V_{real}(t) = V(S_{real}(t), t; \sigma_p)$  minimálna, potom prehlásime za implikovanú volatilitu  $\sigma_{impl}$  americkej opcie.

### 10.5.3 Zdrojové programy numerických algoritmov

Zdrojové programy všetkých numerických algoritmov, ktoré sa nachádzajú v tejto knihe, ako aj mnoho ďalších numerických kódov a ukážok metód oceňovania finančných derivátov si čitateľ môže bezplatne stiahnuť z internetovej adresy:

[www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/derivaty](http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/derivaty).

Ako prihlasovacie meno treba vložiť: `derivaty` a ako heslo: `opcie`. V archíve si je potom možné stiahnuť funkčné vzorky numerických kódov v programovacích jazykoch Mathematica a Matlab.



**Príklady a úlohy na samostatné riešenie**

1. Vypočítajte hodnotu americkej call opcie na akciu platiacu dividendy s mierou  $D = 5\%$  p.a. O akcii je známe, že jej historická volatilita je  $\sigma = 20\%$  p.a. a úroková miera dlhopisu je  $r = 10\%$  p.a. Call opcia je vypísaná na expiračnú cenu  $E = 10$  v expiračnej dobe  $T = 1$  (jeden rok). Výpočet realizujte pre hodnoty ceny akcie  $S = 24, S = 23, S = 21, S = 20, S = 18$ . Na základe výpočtov odhadnite polohu voľnej hranice, t. j. ceny akcie, pri ktorej treba už uplatniť opciu.
2. Vypočítajte hodnotu stratégie bought straddle, t. j. kúpa call a put opcie s expiračnou cenou  $E$  pre a) európske typy call a put opcií; b) americké typy call a put opcií. Výpočet ceny stratégie realizujte pre známe trhové dáta: cena akcie neplatiacej dividendy je  $S = 55$ , volatilita akcie  $\sigma = 0,4$ , úrok bezrizikového dlhopisu  $r = 0,05$ , miera spojitě vyplácaných dividend je  $D = 0,03$ , expiračná doba splatnosti opcií je 3 mesiace (t. j.  $T = 0,25$  roku), expiračná cena  $E = 60$ .
3. Súčasná trhová cena akcie firmy IBM je 118,86 USD. Stredná hodnota (priemer medzi bid a ask cenou) európskej Put opcie s expiračnou cenou 120 USD s dobou splatnosti 2 mesiace je 5,5 USD. Úroková miera bezrizikového dlhopisu je 5% p.a. Miera spojitě vyplácanej dividendy je  $D = 2\%$  p.a. Vypočítajte implikovanú volatilitu  $\sigma$  ceny akcie na základe prepokladu o tom, že daná opcia je európskeho typu. Odhadnite implikovanú volatilitu v prípade, že sa jedná o americký typ derivátu.

# Literatúra

- [1] ALOBAIDI, G., MALLIER, R., DEAKIN, S. (2004): Laplace transforms and installment options. *Math. Models & Methods in Appl. Science* **18**(8), 1167–1189.
- [2] ANKUDINOVA J., EHRHARDT, M. (2008): On the numerical solution of nonlinear Black–Scholes equations. *Computers and Mathematics with Applications* **56**, 799–812.
- [3] AVELLANEDA, M., PARAS, A. (1994): Dynamic Hedging Portfolios for Derivative Securities in the Presence of Large Transaction Costs. *Applied Mathematical Finance* **1**, 165–193.
- [4] AVELLANEDA, M., LEVY, A., PARAS, A. (1995): Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance* **2**, 73–88.
- [5] BARLES, G., SONER, H. M. (1998): Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black–Scholes equation. *Finance Stochast.* **2**, 369–397.
- [6] BARONE-ADESI, B., WHALEY, R. E. (1987): Efficient analytic approximations of American option values. *J. Finance* **42**, 301–320.
- [7] BAXTER, M. W., RENNIE, A. J. O. (1996): *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [8] BLACK, F., SCHOLES, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Economy* **81**, 637–654.
- [9] BRIGO, D., MERCURIO, F. (2006): *Interest rate models - Theory and practice. With smile, inflation and credit*. Springer.
- [10] CARR, P., JARROW, R., MYNENI, R. (1992): Alternative characterizations of American put options. *Mathematical Finance* **2**, 87–105.

- [11] COLLATZ, L. (1970): *Funkcionální analýza a numerická matematika*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
- [12] CORZO T.S., SCHWARTZ, E.S. (2003): Convergence Within the EU: Evidence from Interest Rates. *Economic Notes* **29**, 243–266.
- [13] COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica* **53**, 385–408.
- [14] COX, J.C., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. (1979): Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* **7**, 229–264.
- [15] DEWYNNE, J. N., HOWISON, S. D., RUPF, J., WILMOTT, P. (1993): Some mathematical results in the pricing of American options. *Euro. J. Appl. Math.* **4**, 381–398.
- [16] DURING, B., FOURNIER, M., JUNGEL, A. (2003): High order compact finite difference schemes for a nonlinear Black–Scholes equation. *Int. J. Appl. Theor. Finance* **7**, 767–789.
- [17] ELLIOTT, C.M., OCKENDOM, J.R. (1982): *Weak and Variational Methods for Free and Moving Boundary Problems*. Pitman.
- [18] EVANS, J. D., KUSKE, R., KELLER, J.B. (2002): American options on assets with dividends near expiry. *Mathematical Finance* **12**, 219–237.
- [19] FADDEJEV, D.K., FADDEJEVA, V.N. (1964): *Numerické metody lineární algebry*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
- [20] FIEDLER, M. (1981): *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
- [21] FONG, H. G., VASICEK, O. A. (1991): Fixed-Income Volatility Management. *Journal of Portfolio Management* (Summer), 41–46.
- [22] FREY, R., PATIE, P. (2002): Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: A Simulation Study. In: *Advances in Finance and Stochastics*, Springer, Berlin, 137–159.
- [23] FREY, R., STREMME, A. (1997): Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging. *Mathematical Finance* **4**, 351–374.
- [24] GESKE, R., JOHNSON, H. E. (1984): The American put option valued analytically. *J. Finance* **39**, 1511–1524.
- [25] GESKE, R., ROLL, R. (1984): On valuing American call options with the Black–Scholes European formula. *J. Finance* **89**, 443–455.

- [26] GRANDITS, P., SCHACHINGER, W. (2001): Leland's approach to option pricing: the evolution of a discontinuity. *Mathematical Finance* **11**(3), 347–355.
- [27] HO T.S.Y., LEE S.B. (1986): Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* **41** 1011–1029.
- [28] HOGGARD, T., WHALLEY, A. E., WILMOTT, P. (1994): Hedging option portfolios in the presence of transaction costs. *Advances in Futures and Options Research* **7**, 21–35.
- [29] HULL, J. C. (1989): *Options, Futures and Other Derivative Securities*. Prentice Hall.
- [30] CHADAM, J. (2008): Free Boundary Problems in Mathematical Finance. *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006*, Vol. 12, Springer Berlin Heidelberg.
- [31] CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A., SANDERS, A. B. (1992): An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *The Journal of Finance* **47**, 1209–1227.
- [32] JANDAČKA, M., ŠEVČOVIČ, D. (2005): On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics* **3**, 235–258.
- [33] JOHNSON, H. (1983): An analytic approximation of the American put price. *J. Finan. Quant. Anal.* **18**, 141–148.
- [34] KARATZAS, I. (1988): On the pricing American options. *Appl. Math. Optim.* **17**, 37–60.
- [35] KARATZAS I., SHREVE S. (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.) Berlin: Springer.
- [36] KNESSL, C. (2001): A note on a moving boundary problem arising in the American put option. *Studies in Applied Mathematics* **107**, 157–183.
- [37] KOMORNÍK, J., KOMORNÍKOVÁ, M., MIKULA, K. (1998): *Modelovanie ekonomických a finančných procesov*, Vydavateľstvo UK, Bratislava.
- [38] KRATKA, M. (1998): No Mystery Behind the Smile. *Risk* **9**, 67–71.
- [39] KUSKE R. A., KELLER, J. B. (1998): Optimal exercise boundary for an American put option. *Applied Mathematical Finance* **5**, 107–116.
- [40] KWOK, Y. K. (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag.

- [41] LELAND, H. E. (1985): Option pricing and replication with transaction costs. *Journal of Finance* **40** 1283–1301.
- [42] MACMILLAN, L. W. (1986): Analytic approximation for the American put option. *Adv. in Futures Options Res.* **1**, 119–134.
- [43] MALLIER, R. (2002): Evaluating approximations for the American put option. *Journal of Applied Mathematics* **2**, 71–92.
- [44] MALLIER, R., ALOBAIDI, G. (2004): The American put option close to expiry. *Acta Mathematica Univ. Comenianae* **73**, 161–174.
- [45] MELICHERČÍK I., OLŠAROVÁ L. A ÚRADNÍČEK, V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky 1*. Bratia Sabovci, Zvolen.
- [46] MELICHERČÍK I. OLŠAROVÁ L. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky 2*. Bratia Sabovci, Zvolen.
- [47] MELICHERČÍK I., OLŠAROVÁ L. A ÚRADNÍČEK V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, Bratislava.
- [48] MYNENI, R. (1992): The pricing of the American option. *Annal. Appl. Probab.* **2**, 1–23.
- [49] NOWMAN, K. B. (1997): Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates. *Journal of Finance* **52**, 1695-1706.
- [50] OKSENDAL B.K. (2003): *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer.
- [51] PAPANICOLAOU, G.C. (1973): Stochastic Equations and Their Applications. *American Mathematical Monthly* **80**, 526 - 545.
- [52] RIEČANOVÁ, Z. A KOL. (1987): *Numerické metódy a matematická štatistika*. Bratislava: Alfa, Praha: SNTL.
- [53] ROLL, R. (1977): An analytic valuation formula for unprotected American call options on stock with known dividends. *J. Finan. Economy* **5**, 251–258.
- [54] STAMICAR, R., ŠEVČOVIČ, D., CHADAM, J. (1999): The early exercise boundary for the American put near expiry: numerical approximation. *Canad. Appl. Math. Quarterly* **7**, 427–444.
- [55] STRAKA, M. (1999): *Oceňovanie finančných derivátov*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK.

- [56] ŠEVČOVIČ, D. (2001): Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option. *Euro. Journal on Applied Mathematics* **12**, 25–37.
- [57] ŠEVČOVIČ, D. (2007): An iterative algorithm for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for a nonlinear Black–Scholes equation. *Canad. Appl. Math. Quarterly* **15**, 77–97.
- [58] ŠEVČOVIČ, D. (2008): *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*. IRIS, vydavateľstvo a tlač, s.r.o.
- [59] SCHÖNBUCHER, P., WILMOTT, P. (2000): The feedback-effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **61** 232–272.
- [60] URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. (2008): *Calibration of term structure models*. PhD thesis, Comenius University.
- [61] VASICEK, O. A. (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics* **5**, 177–188.
- [62] VITÁSEK, E. (1987): *Numerické metody*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
- [63] WIDDICKS, M., DUCK, P. W., ANDRICOPOULOS, A.D., NEWTON, D. P. (2005): The Black–Scholes equation revisited: Asyptotic expansions and singular perturbations. *Mathematical Finance* **15**, 373–391.
- [64] WILMOTT, P., DEWYNNE, J., HOWISON, S.D. (1995): *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. UK: Oxford Financial Press.
- [65] ZHU, S.P. (2006): A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **9**, 1141–1177.

# Register

## A

ázijská opcia, 97  
americká call opcia, 150  
americká put opcia, 151  
aritmetický priemer, 97  
ask cena, 17, 83  
Avellaneda, M., 93  
average rate opcia, 98  
average strike opcia, 98  
averzia k riziku, 36

## B

Banach, S., 179  
Banachova veta o pevnom bode, 179,  
183  
bariéra, 103  
bariérová opcia, 97, 103  
bearish spread, 40  
Bessel, F. W., 114  
Besselov odmocninový proces, 114  
bezarbitrážny model, 145  
bezakupónový dlhopis, 129  
bezrizikové portfólio, 35  
bid cena, 17, 83  
binomický strom, 170  
binárna opcia, 42, 108  
Black, F., 21  
Black–Scholesova formula, 54  
Black–Scholesova rovnica, 37  
bought straddle, 40  
Brennan–Schwarzov model, 115  
BRIBOR, 126, 131

Brownov pohyb, 22  
BUBOR, 131  
bullish spread, 40  
butterfly, 40

## C

call opcia, 17  
charakteristická funkcia, 118  
CIR model, 114  
condor, 41  
Courant–Lewy–Fridrichsova podmienka,  
167  
Cox, J. C., 114  
Cox–Ingersoll–Rossov model, 114, 115,  
136  
Cox–Rossov model, 115

## D

Delta, 71  
delta opcie, 71  
Diracova delta funkcia, 116  
diskontná obligácia, 129  
diskrétny princíp maxima, 168, 176  
disperzia, 22  
dlhopis, 131  
Dothanov model, 115  
Dow–Jonesov index, 13  
down–and–out bariérová opcia, 103  
drift procesu, 113  
dráhovo závislá opcia, 97  
dvojfaktorový CIR model, 122  
dvojfaktorový model, 139

dvojfaktorový Vašíčkov model, 122

## E

early exercise boundary, 153

EONIA, 131

EURIBOR, 131

EUROLIBOR, 131

exotická opcia, 97

## F

faktor citlivosti Delta, 71

faktor citlivosti Gama, 74

faktor citlivosti Ró, 76

faktor citlivosti Théta, 77

faktor citlivosti Vega, 78

faktory citlivosti, 62

Fokker–Planckova rovnica, 116, 117

Fong, H. G., 144

Fong–Vašíčkov model, 123, 144

forward, 14

Frey, R., 93

futures, 16, 148

## G

Gama, 74

gama opcie, 74

Gauss, K. F., 126

Gauss, K.F., 178

Gauss–Nowmanove odhady, 126

Gauss–Seidelova relaxačná metóda, 178

General Motors, 13

geometrický Brownov pohyb, 24, 81,  
99

geometrický priemer, 97

greeks, 62

## H

historická volatilita, 62

Hoggard, T., 82

hranica predčasného uplatnenia opcie,  
153, 154

## I

IBM, 13

implikovaná volatilita, 65, 190

in the money, 17

Ingersoll, J. E., 114

Itó, K., 27

Itóova lema, 27, 99, 107

## J

jednofaktorový model, 131

## K

konečná diferencia, 165

konvergenčný model, 123, 143

Kratka, M., 93

krátkodobá úroková miera, 112

## L

Leland, H., 82

Lelandov model, 82

Lelandovo číslo, 87

LIBOR, 131

LIBOR model, 148

limitná úroková miera, 113

lineárna komplementarita, 159

long pozícia, 54, 83

lookback opcia, 97, 109

## M

Markovov proces, 21

Mathematica, 101

mean reversion proces, 113

menovitá hodnota, 130

Merton, R.C., 21

metóda binomického stromu, 170

metóda konečných diferencií, 165

metóda trinomického stromu, 170

Microsoft, 13

## N

nelineárna Black–Scholesova rovnica,  
90

Nowman, K. B., 126



**O**

okamžitá úroková miera, 112  
opcia, 16  
opčná prémie, 17  
Orstein–Uhlenbeckov proces, 113  
out of the money, 17

**P**

per annum, p.a., 64  
portfólio dlhopisov, 133  
PRIBOR, 131  
princíp maxima, 168, 176  
projektovaná SOR metóda, 181  
PSOR, 181  
put opcia, 17  
put–call parita, 54, 56, 162  
put–call symetria, 56, 162

**R**

rabat, 104  
RAPM model, 93  
rizikovo neutrálne pravdepodobnosti,  
172  
rizikovo neutrálne stratégie, 35  
riziková prirážka, 19  
Ross, S. A., 114  
rovnovážny model, 131  
Rubinstein, M., 172  
Ró, 76  
rýchlosť reverzie procesu, 113

**S**

samofinancované portfólio, 81, 100  
Scholes, M.S., 21  
short pozícia, 54  
skákajúca volatilita, 93  
sold straddle, 40  
Soner, H. M., 93  
SOR metóda, 178  
spreads, 88  
stochastická diferenciálna rovnica, 24  
swap, 147  
swaption, 148

**T**

Taylorov rozvoj, 165  
Théta, 77  
transakčné náklady, 81  
trend, 34  
trend procesu, 113  
trhová cena rizika, 134  
trinomický strom, 170

**U**

up–and–out bariérová opcia, 103

**V**

vanilla opcie, 17  
variancia, 22  
Vašíček, O. A., 134, 144  
Vašíčkov model, 114, 115, 134  
Vega, 78  
vnútorná hodnota opcie, 19  
volatility smile, 70  
voľná hranica, 154  
výnos, 34, 83  
výnosová krivka, 129

**W**

Whalley, A. F., 82  
Wiener, N., 22  
Wienerov proces, 22, 63, 99, 124  
Wilmott, P., 82  
WUBOR, 131

**Y**

yield–curve, 129

**Z**

zložená opcia, 109

ISBN 978-80-227-3014-3



9 788022 730143