Daniel Ševčovič, Beáta Stehlíková, Karol Mikula

Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov

Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov

S T U

Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov

Daniel Ševčovič

Beáta Stehlíková

Karol Mikula

Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009

Cieľom tejto knihy je priblížiť čitateľovi základné aspekty oceňovania finančných derivátov, ich kvalitatívnu analýzu a praktické metódy ich oceňovania. Text sa zameriava na využitie moderných analytických a numerických metód na ohodnotenie derivátových kontraktov, akými sú napríklad opcie a dlhopisy.

TB
NADÁCIA
TATRA BANKY

S prispením grantu Nadácie Tatra banky pre podporu vzdelávania vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU v roku 2009.

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© 2009 doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
Recenzent: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Jazyková úprava: Zuzana Ceľuchová
Návrh obálky: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.
Náklad 300 kusov, 1. vydanie, počet strán 200.

ISBN 978–80–227–3014–3

Obsah

Úvod

V priebehu posledných troch desaťročí sa začali objavovať rôzne nestability na finančných trhoch. Výrazne sa zvýšili riziká pre investorov, ktoré sú prevažne dôsledkami fluktuácie cien akcií, indexov, úrokových mier a výmenných kurzov. Z tohto dôvodu začali investori hľadať možnosti, ako predchádzať možným stratám v dôsledku spomínaných fluktuácií. Praktické potreby investorov podnietili napokon vznik moderných finančných nástrojov, akými sú rozličné finančné deriváty, ktorých hodnota závisí od príslušných aktív. Aktívami môžu byť akcie, meny, akciové indexy, úrokové sadzby, výmenné kurzy, komodity, drahé kovy a pod. Finančné deriváty do značnej miery poskytujú investorom ochranu voči fluktuáciám cien aktív. Podcenenie úlohy zaisťovania investičných portfólií pomocou derivátov môže viesť k veľkým finančným stratám. Na druhej strane, však deriváty nie sú „všeliekom" a ich využívanie musí byť vykonávané s hlbokou znalosťou problematiky, o čom svedčí i celý rad derivátových debaklov medzinárodných investičných spoločností koncom 90-tych rokov a koncom roku 2008.

Cieľom tejto knihy je priblížiť čitateľovi základné aspekty oceňovania finančných derivátov, ich kvalitatívnu analýzu a praktické metódy ich oceňovania. K búrlivému rozmachu využívania finančných derivátov došlo v posledných desaťročiach najmä vďaka pionierskej práci ekonómov M. S. Scholesa, R. C. Mertona a teoretického fyzika F. Blacka, zo začiatku sedemdesiatych rokov [8]. V tejto práci bol odvodený dnes už klasický Black–Scholesov model, za ktorý im bola neskôr v roku 1997 udelená Nobelova cena za ekonómiu. [1] Prístup bol skutočne revolučný a priniesol metódu uplatnenia parciálnych diferenciálnych rovníc pri oceňovaní finančných derivátov. Rozpracovaná metodológia tak umožňuje oceňovať deriváty podkladových aktív ako funkcie závisiace od času do expirácie a ceny samotného podkladového aktíva.

Kniha je tematicky rozdelená do niekoľkých celkov. V prvej kapitole sa budeme venovať analýze charakteru vývoja aktív a cenných papierov. Predstavíme si niektoré základné typy derivátov. Kapitola nemá matematický charakter a jej cieľom je na verbálnej úrovni priblížiť význam štúdia finančných derivátov. Druhá kapitola je zameraná na štúdium Black–Scholesovho modelu oceňovania derivátov, ktorého matematickou formuláciou bude parciálna diferenciálna rovnica. Dôraz bude kladený na položenie základov stochastického diferenciálneho kalkulu, ktorý je východiskom k odvodeniu akéhokoľvek modelu oceňovania finančných derivátov. Tretia kapitola sa zameriava na oceňovanie európskych call a put opcií. Odvodíme explicitný vzorec oceňovania, ktorý je známy aj ako Black–Scholesova alebo aj Feynman-Kacova formula. Obsahom štvrtej kapitoly je kvalitatívna analýza rizika. Čitateľovi priblížime základné pojmy akými sú historická a implikovaná volatilita. Ďalej sa sústredíme na faktory citlivosti Delta, Gama, Théta, Vega a Ró, ktoré nám poskytujú podrobnejší obraz o závislosti ceny derivátu na zmene niektorého z parametrov modelu. Modelovanie transakčných nákladov a rizika je predmetom piatej kapitoly. Okrem Lelandovho modelu sa zameriame aj na niektoré nelineárne modely, ktoré zovšeobecňujú klasickú Black–Scholesovu rovnicu v prípade, že je do modelovania potrebné zahrnúť transakčné náklady na zaisťovanie portfólia alebo riziko plynúce z nezaisteného portfólia. V šiestej kapitole predstavíme základné typy exotických typov derivátov, akými sú napríklad ázijské opcie alebo bariérové opcie a iné. V siedmej kapitole sa budeme venovať otázkam modelovania okamžitej úrokovej miery, ktorá predstavuje podkladové aktívum pre deriváty úrokovej miery. V nadväzujúcej ôsmej kapitole sa budeme venovať derivátom úrokovej miery. Priblížime metodológiu oceňovania dlhopisov. Zvláštna pozornosť je venovaná

[1] Nobelova cena za ekonómiu sa v skutočnosti neudeľuje, nakoľko ekonómia nie je predmetom závetu Alfreda Nobela. Jedná sa o tzv. Cenu Švédskej banky za ekonómiu na pamiatku A. Nobela, ktorá je považovaná za jej ekvivalent.

bezarbitrážnym modelom úrokovej miery, akými je napríklad Vašíčkov alebo Cox–Ingersoll–Rossov model. Americké typy derivátov rozoberáme v deviatej kapitole. Tieto deriváty sú charakterizované možnosťou predčasného uplatnenia opcie. Ukážeme, že problém oceňovania amerických derivátov sa dá previesť na úlohu o hľadaní voľnej hranice pre parabolické parciálne diferenciálne rovnice. Vo finančnej terminológii sa tejto voľnej hranici hovorí hranica predčasného uplatnenia opcie. V záverečnej desiatej kapitole sa budeme bližšie zaoberať numerickými metódami na riešenie Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice pomocou explicitných a implicitných konečno-diferenčných metód. Pomocou projektovaného SOR algoritmu ukážeme, ako numericky efektívne zvládnuť problém oceňovania amerických typov derivátov.

Text knihy vznikol na základe série prednášok a seminárov z teórie oceňovania finančných derivátov na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Autori sú vďační všetkým, ktorí svojimi pripomienkami prispeli ku skvalitneniu obsahu. Ďakujeme A. Zbyňovskej a M. Strakovi za podrobné zápisky prednášok, M. Gancárovej, S. Kilianovej, M. Takáčovi a Z. Ceľuchovej za starostlivé korektúry a poznámky k textu, ako aj mnohým ďalším kolegom, bez pomoci a rád ktorých by tento text sotva uzrel svetlo sveta.[1]

Bratislava január 2009

Autori

[1]Kniha vznikla aj s pomocou grantov VEGA 1/0381/09 a APVV-0351-07.

Kapitola 1

Zaisťovanie finančných aktív

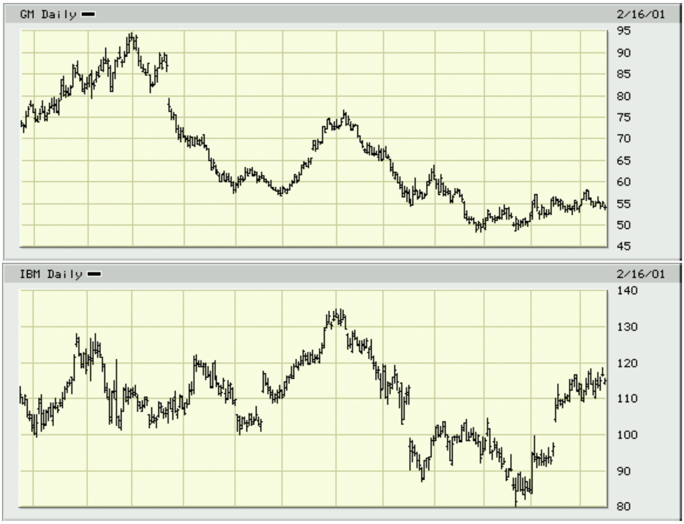
V súčasnosti sme svedkami prudkého rozmachu akciových spoločností - počnúc klasickými „kamennými" podnikmi a končiac modernými technologickými „Dot.Com" spoločnosťami. Vlastníctvo akcií podniku predstavuje jeden zo základných nástrojov, ktoré slúžia na ovplyvňovanie chodu a vývoja podniku. Zároveň ich vlastníctvo prináša zisk v podobe dividend vyplácaných držiteľom akcií. Na druhej strane, z pohľadu podniku a emitenta akcií sú tieto zdrojom kapitalizácie podniku, a tým pádom príležitosťou na získanie zdrojov na ďalšie investície a rozvojové programy. Hoci cena akcie nemusí bezprostredne odrážať hodnotu podniku, je jedným z najlepších indikátorov jeho stavu a perspektívy ďalšieho rozvoja.

Od čias zrodu finančných nástrojov, akými sú akcie, sa do popredia záujmu investorov dostávala otázka efektívneho rozloženia investičného portfólia medzi akcie a dlhopisy. Akcie prinášajú investorovi vyššie zisky a naviac môžu prinášať ďalší zisk v podobe dividend. Na druhej strane však predstavujú rizikový typ cenných papierov. Dlhopisy majú obvykle nižší výnos, ale aj ich rizikovosť je nižšia v porovnaní s akciami. Investori preto hľadajú optimálne zloženia svojich investičných portfólií. Základným nástrojom zabezpečovania investora voči riziku je tzv. finančný derivát. Zrod jednoduchých finančných derivátov sa dá datovať ešte do 19. storočia a viaže sa k poľnohospodárskym kontraktom na nákup plodín. Tieto typy kontraktácie nákupných cien (napr. obilia) počas zimného obdobia dávali poľnohospodárom možnosť investícií a odhadu potrebnej výmery osiatej pôdy. Tento typ obchodovania sa dá prirovnať k jednému zo základných finančných derivátov, akým je tzv. forward. Od tých čias sa postupne vyvinuli omnoho zložitejšie finančné deriváty, slúžiace na zaisťovanie investičného portfólia voči riziku plynúcemu z výkyvov cien akcií. Posledné tri desaťročia predstavujú zlom v obchodovaní s finančnými derivátmi. Deriváty sú najčastejšie vypisované na akcie, výmenné kurzy, komodity. Medzi základné typy derivátov radíme opcie a deriváty úrokových mier. Oceňovanie rôznych druhov opcií je obsahom ďalších kapitol tejto učebnice.

1.1 Stochastický charakter finančných aktív

Pohľad na stránky finančných denníkov a internetových databáz nám poskytuje obraz o vývoji cien aktív, akými sú napríklad akcie, burzové indexy, úrokové miery a iné obchodovateľné aktíva. Ich časový vývoj je často nestály, vykazujúci väčšiu alebo menšiu fluktuáciu. Tieto zmeny sú spôsobené pôsobením burzového a mimoburzového trhu na cenu aktíva. Ponuka a dopyt po danom aktíve formujú jeho časový priebeh. Pri analýze časových dát sa často stretávame na jednej strane s možnosťou vymedziť určitý trend a na druhej strane určiť fluktuačnú zložku vývoja ceny. Kým prvá zložka svedčí o dlhodobom trende ovplyvnenom najmä pozíciou a stratégiou firmy, fluktuačná zložka sa dá pripísať na konto trhového mechanizmu vyvažovania ponuky a dopytu, budúcich očakávaní a pod. Na obr. 1.1 a 1.2 môžeme vidieť vývoj ceny akcií firiem General Motors, Microsoft a IBM za rok 2000 a 2008. Na ďalšom obrázku 1.3 je zachytený vývoj cien burzového indexu Dow–Jones a celkový objem transakcií (dole).

Úlohou predošlých príkladov bolo poukázať na stochastický charakter vývoja cien rôznych akcií a indexov na svetových burzách. Modelovaním stochastického vývoja ceny akcie sa budeme podrobnejšie zaoberať v nasledovnej kapitole. Z praktického hľadiska je potrebné po-



Obr. 1.1: Časový vývoj cien akcií firiem General Motors a IBM v roku 2000.

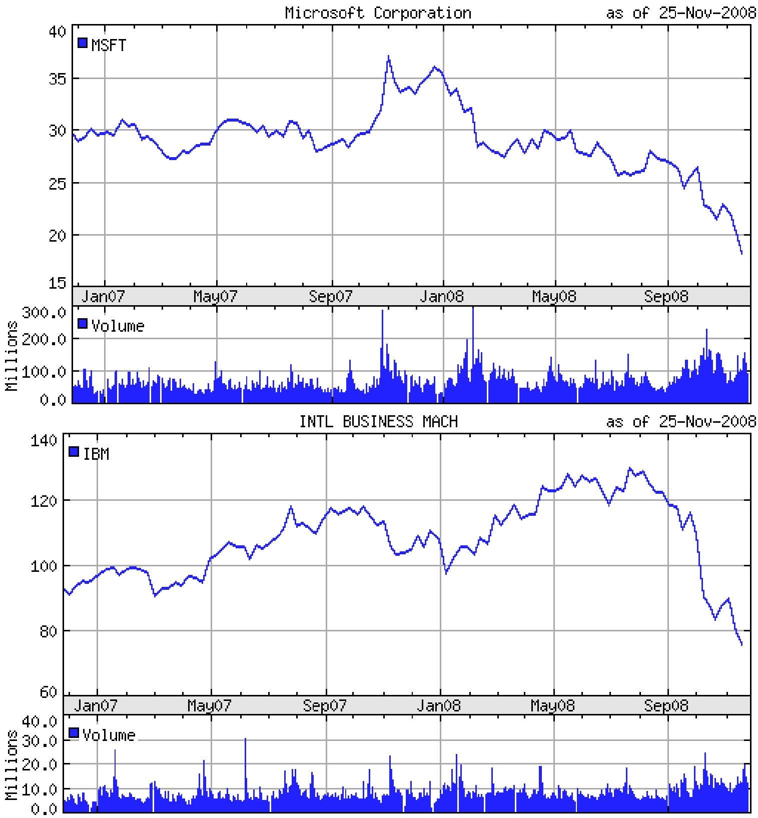
znamenať, že snahou investorov je minimalizovať svoje možné straty plynúce z prudkého pádu cien akcií. Jedným z efektívnych nástrojov na dosiahnutie tohto cieľa je použitie zaisťovacích nástrojov, akými sú rôzne druhy derivátov aktív.

1.2 Deriváty ako nástroje zaisťovania aktív

V tejto časti poukážeme na význam finančných a iných derivátov na zaisťovanie stability portfólia voči fluktuáciám vo vývoji ceny daného aktíva. Zaoberať sa budeme tzv. forwardovými a opčnými typmi derivátov.

1.2.1 Forwardy

Historicky prvými nástrojmi na zabezpečovanie sa investorov voči riziku boli forwardové kontrakty. Forward je dohoda predstavujúca právo a súčasne povinnosť realizácie (forwardového) obchodu medzi vypisovateľom forwardu a kupujúcim na kúpu, resp. predaj aktíva v presne



Obr. 1.2: Časový vývoj cien akcií firiem Microsoft a IBM v rokoch 2007, 2008 a objem realizovaných obchodov.

Obr. 1.3: Časový vývoj indexu Dow–Jones v rokoch 2000 a 2007-8.

stanovenom expiračnom čase za vopred dohodnutú expiračnú cenu. Ako uvidíme v kapitole 3, oceňovanie forwardov je jednoduché a je založené iba na úročení expiračnej ceny kontraktu. Jednoduchosť je predovšetkým dôsledkom podmienky, že forward je právo a súčasne povinnosť realizácie obchodu. Podobným typom derivátu je futures. Na rozdiel od mimoburzového forwardu, futurita je burzový produkt, ktorý je obchodovaný na burze.

1.2.2 Opcie

Na rozdiel od forwardových kontraktov opcie predstavujú typ kontraktu, pri ktorom má ich vlastník právo, nie však povinnosť kúpiť, resp. predať dané aktívum za vopred dohodnutú cenu vo vopred stanovenom expiračnom čase. Opcia teda nemá obligatórny charakter, t. j. dáva jej držiteľovi voľnosť pri jej uplatňovaní.

Pre lepšiu názornosť si uvedieme jednoduchý príklad využitia tzv. kúpnej opcie. Predpokladajme, že vlastníme kúpnu opciu na nákup akcií firmy IBM za vopred dohodnutú expiračnú cenu 60 USD, ktorá je uplatniteľná v expiračnej lehote o tri mesiace. Nech súčasná cena je

55 USD. Ak sa za tri mesiace doby života opcie cena akcie zvýši na 70 USD, tak nám vlastníctvo tejto opcie prináša finančný zisk v podobe 10 USD, ktoré tvoria rozdiel medzi skutočnou cenou (70 USD) a expiračnou cenou opcie (60 USD). V tejto situácii hovoríme, že opcia je *in the money*, nakoľko nám jej uplatnenie prináša zisk. Na druhej strane, ak za spomínané tri mesiace cena akcie dosiahne iba hodnotu 58 USD, tak sa pre nás, ako majiteľa opcie, stáva takáto opcia bezcennou a nemá zmysel si ju uplatňovať. Takej opcii hovoríme, že je bezcenná, tzv. *out of the money*, nakoľko nám jej uplatnenie neprináša žiaden zisk. Všimnime si, že právo a nie povinnosť uplatniť danú opciu nám prináša istú výhodu oproti tým, ktorí takúto možnosť nemajú. Samotné právo na kúpu sa preto stáva hodnotou. Táto výhoda však musí byť zaplatená na začiatku vypisovania kontraktu. Vypisovateľ si od nás vyžiada tzv. opčnú prémiu za to, že my, ako držiteľ opcie, máme toto právo na budúce uplatnenie opcie. Základný problém teórie finančných derivátov je otázka, ako oceniť toto právo tak, aby nedošlo k poškodeniu ani jednej zo strán kontraktu.

Základné, tzv. *vanilla* opcie, predstavujú európske typy kúpnych opcií a opcií na predaj. Kúpna opcia alebo call opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase $t = T$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu E. Predajná opcia alebo put opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ získava právo predať akciu v presne určenom expiračnom čase $t = T$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu E. Aj v tomto prípade je úlohou oceniť hodnotu V put opcie v čase uzavretia kontraktu $t = 0$.

Na obrázku 1.4 sú zachytené reálne obchodované stavy cien call a put opcií na akcie firmy Microsoft zo dňa 21. 11. 2008. Napríklad call opcia s expiráciu dňa 19. 12. 2008 a expiračnou cenu $E = 15$ (dolárov) stála v rozmedzí 5,20 (bid cena - ponuka na kúpu opcie) až 5,30 (ask cena - ponuka na predaj opcie). Cena akcie bola $S = 20,12$. Rozdiel aktuálnej a expiračnej ceny, t. j. $S - E$ bol v tomto prípade $5,12$, čo znamená, že cena opcie je o niečo väčšia, ako by bola jej hodnota v čase expirácie. Tento jav sa dá vysvetliť ešte štvortýždňovou lehotou do vypršania, nakoľko cena akcie je počas tohto obdobia ešte vystavená stochastickým výkyvom a určitému riziku z možného rastu ceny akcie. Podobne je to pre put opciu s expiračnou cenou $E = 25$, ktorá v súčasnosti stojí od 4,85 - 4,95, čo je opäť hodnota mierne prevyšujúca rozdiel $E - S = 4,78$.

Analýzou cien opcií aj pre expiračné ceny vyššie, resp. nižšie ako je aktuálna cena akcie vidíme, že cena opcie sa skladá z tzv. vnútor-

Microsoft Corporation (MSFT) At 9:41AM ET: **20.12** ↑ 0.13 (0.65%)

Options

View By Expiration: **Dec 08** | Jan 09 | Apr 09 | Jul 09 | Jan 10 | Jan 11

Options Expiring Fri, Dec 19, 2008

Calls							Strike Price	Puts						
Symbol	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int		Symbol	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int
MQFLE.X	**15.20**	**0.00**	15.10	15.20	42	34	**5.00**	MQFXE.X	N/A	**0.00**	N/A	N/A	0	0
MQFLB.X	**10.15**	**0.00**	10.10	10.20	74	2,541	**10.00**	MQFXB.X	**0.03**	**0.00**	0.02	0.04	97	3,473
MQFLM.X	**7.20**	**0.00**	7.15	7.25	95	187	**13.00**	MQFXM.X	**0.07**	**0.00**	0.05	0.07	459	2,994
MQFLN.X	**6.15**	**0.00**	6.15	6.25	55	211	**14.00**	MQFXN.X	**0.10**	**0.00**	0.07	0.10	204	2,147
MQFLC.X	**5.06**	↑ **0.11**	5.20	5.30	11	1,348	**15.00**	MQFXC.X	**0.14**	**0.00**	0.13	0.14	5	8,183
MQFLO.X	**4.35**	**0.00**	4.25	4.35	263	368	**16.00**	MQFXO.X	**0.20**	↓ **0.02**	0.19	0.21	2	337
MQFLQ.X	**3.40**	**0.00**	3.30	3.40	122	4,157	**17.00**	MQFXQ.X	**0.32**	↓ **0.02**	0.33	0.34	11	8,395
MQFLS.X	**1.83**	↓ **0.05**	1.89	1.92	36	7,567	**19.00**	MQFXS.X	**0.83**	↑ **0.06**	0.77	0.80	169	31,116
MQFLD.X	**1.28**	↓ **0.02**	1.27	1.29	56	8,886	**20.00**	MQFXD.X	**1.14**	↓ **0.06**	1.13	1.16	109	23,562
MQFLU.X	**0.78**	↓ **0.09**	0.75	0.78	105	72,937	**21.00**	MQFXU.X	**1.83**	↑ **0.23**	1.65	1.68	1	72,472
MSQLN.X	**0.40**	↓ **0.04**	0.41	0.43	350	16,913	**22.00**	MSQXN.X	**2.58**	↑ **0.23**	2.30	2.36	3	4,495
MSQLQ.X	**0.21**	↓ **0.01**	0.20	0.22	125	20,801	**23.00**	MSQXQ.X	**3.10**	**0.00**	3.05	3.15	30	3,840
MSQLD.X	**0.09**	↓ **0.02**	0.09	0.11	92	12,207	**24.00**	MSQXD.X	**3.80**	**0.00**	3.95	4.05	167	3,871
MSQLE.X	**0.04**	↓ **0.02**	0.04	0.05	165	14,193	**25.00**	MSQXE.X	**4.90**	**0.00**	4.85	4.95	157	2,075
MSQLR.X	**0.02**	**0.00**	0.02	0.03	161	9,359	**26.00**	MSQXR.X	**6.15**	**0.00**	5.85	5.95	210	1,795
MSQLS.X	**0.02**	**0.00**	N/A	0.03	224	3,643	**27.00**	MSQXS.X	**7.00**	**0.00**	6.85	6.95	45	1,156
MSQLT.X	**0.02**	**0.00**	N/A	0.02	59	2,938	**28.00**	MSQXT.X	**7.55**	**0.00**	7.80	7.95	24	874
MSQLF.X	**0.01**	**0.00**	N/A	0.02	10	1,330	**30.00**	MSQXF.X	**10.54**	**0.00**	9.85	10.00	26	124

Highlighted options are in-the-money.

Obr. 1.4: Ceny call a put opcií s rôznymi expiračnými cenami na akcie firmy Microsoft zo dňa 26. 11. 2008.

nej hodnoty opcie, ktorá je daná výrazom $\max(S - E, 0)$ v prípade call opcie, resp. $\max(E - S, 0)$ (v prípade put opcie) a rizikovej prirážky k vnútornej hodnote opcie, ktorá oceňuje riziko plynúce zo stochastického charakteru vývoja podkladového aktíva počas ostávajúceho času do expirácie call resp. put opcie.

1.3 Debakle derivátových obchodov

Na koniec tejto kapitoly uvedieme niekoľko známych príkladov tzv. derivátových debaklov, pri ktorých investori stratili významné finančné čiastky pri obchodovaní s finančnými derivátmi. Zmyslom uvedenia aj negatívnych príkladov je upozorniť čitateľa na skutočnosť, že nepremyslené a nefundované používanie derivátov môže byť v konečnom dôsledku riskantnejšie, ako ich nepoužívať vôbec.

V druhej polovici 90-tych rokov bolo zaznamenaných niekoľko derivátových debaklov, ktorých účastníkmi sa stali popredné svetové inštitúcie. Britská spoločnosť Barings stratila stovky miliónov GBP vďaka riskantnej stratégii svojho obchodníka Nicka Leesona, ktorý sa snažil uplatnením kombinovanej opčnej stratégie, zameranej na očakávaný nárast ceny, dosiahnúť dominantné postavenie na trhu s opciami, a tak sa stať dominantným investorom. Pri realizovaní tejto stratégie „pumpoval" obrovské finančné čiastky s cieľom ovládnuť opčný trh a následne diktovať ceny. Táto stratégia mu nakoniec nevyšla a Barings zaznamenali veľké straty. Americká spoločnosť NatWest prišla o stovky miliónov dolárov vďaka zlému odhadu rizika plýnuceho z výrazných fluktuácií cien akcií. Švajčiarska banka Union Bank of Swiss prišla o stovky miliónov dolárov kvôli nesprávnemu oceneniu komplikovaného derivátu, ktorý predávala na trhu za nižšiu cenu. Deriváty sa viazali na vývoj cien dvoch aktív s rôznymi dobami splatnosti. Častým zdrojom omylov pri oceňovaní podobných komplikovaných finančných derivátov je podcenenie rizikových faktorov, variabilných korelácií medzi jednotlivými aktívami a celý rad ďalších faktorov, ktoré sú poväčšinou dôsledkom zlej východiskovej štatistickej analýzy predmetných dát.

V druhej polovici roku 2008 sa začala prejavovať globálna finančná kríza, ktorej príčiny sa hľadali predovšetkým v nedostatočnom kontrolovaní derivátových obchodov a ich nedostatočnom krytí. O prehlbujúcej sa finančnej kríze v druhej časti roku 2008 svedčí aj pokles globálnych indikátorov hodnôt aktív, akým je napríklad Dow-Jonesov priemyselný index. Treba však poznamenať a dodať, že napriek niektorým zlyhaniam derivátových obchodov, tieto patria k dôležitým nástrojom finančného obchodovania, pretože prinášajú možnosť rozkladania budúceho možného rizika. Deriváty umožňujú efektívne zaisťovať finančné portfóliá. V neposlednom rade, finančné deriváty majú významnú informačnú úlohu, keďže poskytujú pozorovateľom a účastníkom na trhu možnosť odhaľovať možné budúce tendencie vývoja samotných aktív, na ktoré sú ako deriváty nadviazané.

Kapitola 2

Black–Scholesov a Mertonov model

V tejto kapitole sa budeme zaoberať odvodením diferenciálnej rovnice opisujúcej vývoj ceny derivátu v závislosti od ceny akcie a času ostávajúceho do expirácie. V známom Black–Scholesovom modeli oceňovania derivátov, centrálnu úlohu zohráva modelovanie stochasticky sa vyvíjajúcich aktív. Základným nástrojom, ako opísať takýto náhodný vývoj ceny aktíva, sú tzv. Markovove náhodné procesy. Spomedzi veľkej škály rôznych Markovových procesov sa pri odvodení Black–Scholesovej rovnice využije jeden špeciálny typ Markovovho procesu, ktorý je nazývaný Wienerov proces a jeho zovšeobecnenie - Brownov pohyb. Ukážeme si stochastickú diferenciálnu rovnicu, pomocou ktorej môžeme modelovať Wienerov proces a Brownov pohyb. Uvedieme si základný nástroj stochastickej analýzy - tzv. Itóovu lemu, ktorá nám bude prospešná pri ďalšom odvodzovaní Black–Scholesovej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice. V tomto kroku sa budeme opierať o niektoré ekonomické východiská, akými sú averzia investora k riziku a princíp nemožnosti existencie arbitráže pri obchodovaní s cennými papierami a aktívami. Na záver kapitoly budeme diskutovať rôzne opčné stratégie počnúc jednoduchými call a put opciami a kombinovanými stratégiami končiac.

2.1 Stochastické procesy

Stochastický proces je t - parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskrétna množina indexov. *Markovov proces* je taký stochastický proces, pre ktorý platí, že ak je daná hodnota $X(s)$, tak budúce hodnoty $X(t)$ pre $t > s$ môžu závisieť iba od $X(s)$, nie však od predošlých hodnôt $X(u)$ pre $u < s$. Predpokladanie markovovského charakteru stochastického vývoja cien akcií je v súlade s tzv. *slabou formou trhovej efektívnosti*, nakoľko jedine súčasné hodnoty cien akcií by mali slúžiť na vytváranie budúcich hodnôt.

2.1.1 Wienerov proces a geometrický Brownov pohyb

Definícia 2.1. *Brownov pohyb* $\{X(t), t \geq 0\}$ *je t- parametrický systém náhodných veličín, pričom*

i) *všetky prírastky* $X(t+\Delta) - X(t)$ *majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou* $\mu\Delta$ *a disperziou (alebo aj varianciou)* $\sigma^2\Delta$*,*

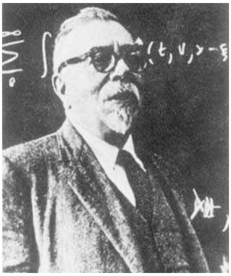
ii) *pre každé delenie* $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ *sú prírastky* $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ *nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu i),*

iii) $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ *nazývame Wienerov proces.* [1]

Pri štúdiu definície Brownovho pohybu vzniká prirodzená otázka, či jednotlivé vlastnosti sú od seba nezávislé a prečo stredná hodnota a disperzia prírastkov $X(t + \Delta) - X(t)$ je proporcionálna práve Δ a nie nejakej inej funkcii od Δ. Pokúsime sa tieto otázky zodpovedať.

[1] Norbert Wiener, 1884-1964, matematik. Pracoval v matematickej analýze, teórii pravdepodobnosti. Pokladá sa zakladateľa vedného odboru kybernetiky.

Obr. 2.1: Norbert Wiener (1884-1964) a Robert Brown (1773-1858).

Uvažujme nejaké delenie intervalu $[0, t]$, t. j. $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$. Potom zrejme

$$X(t) - X(0) = \sum_{i=1}^{n} X_i - X_{i-1},$$

a tým pádom stredné hodnoty a disperzie ľavej a pravej strany musia byť rovnaké. Pre strednú hodnotu výrazu $X(t) - X(0)$ dostávame podľa definície, že platí

$$E(X(t) - X(0)) = \mu(t - 0) = \mu t\,.$$

Na druhej strane, stredná hodnota náhodnej premennej $\sum_{i=1}^{n} X_i - X_{i-1}$ je daná ako

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - X_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(t_i - t_{i-1}) = \mu t$$

a teda stredné hodnoty premenných $X(t) - X(0)$ a $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i-1})$ sa rovnajú. Uvedomme si, že bez predpokladu, že každý prírastok $X_i - X_{i-1}$ má strednú hodnotu práve $\mu(t_i - t_{i-1})$ by sme tento výsledok neodvodili. Teraz sa zamerajme na disperzie premenných $X(t) - X(0)$ a $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i-1})$. Zrejme podľa definície

$$Var(X(t) - X(0)) = \sigma^2(t - 0) = \sigma^2 t\,.$$

Pripomeňme, že pre nezávislé náhodné premenné A, B platí: $Var(A + B) = Var(A) + Var(B)$. Keďže o prírastkoch $X_i - X_{i-1}$ predpokladáme ich nezávislosť pre rôzne $i = 1, 2, ..., n$, platí

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - X_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(t_i - t_{i-1}) = \sigma^2 t\,.$$

Opäť si uvedomme, že bez predpokladu, že každý prírastok $X_i - X_{i-1}$ má disperziu práve $\sigma^2(t_i - t_{i-1})$, by horeuvedená rovnosť disperzií pre $X(t) - X(0)$ a $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i-1})$ neplatila.

Z predchádzajúcej definície bezprostredne vyplýva, že ak $\{w(t), t \geq 0\}$ je Wienerov proces, tak pre jeho štatistické parametre strednej hodnoty a disperzie platí:

$$E(w(t)) = 0, \qquad Var(w(t)) = t\,. \tag{2.1}$$

Naviac, pre distribučnú funkciu rozdelenia pravdepodobnosti Wienerovho procesu platí:

$$P(w(t) < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2t} d\xi\,. \tag{2.2}$$

Praktická ukážka piatich numerických realizácií Wienerovho procesu je uvedená na obr. 2.3. Experimentálne numerické potvrdenie lineárnej závislosti (2.2) medzi varianciou $Var(w(t))$ a časom t je uvedené na obr. 2.4.

Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ s parametrami μ a σ môžeme analyzovať aj z hľadiska jeho prírastkov $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$. Pre ich strednú hodnotu a disperziu musí podľa i) platiť: $E(dX(t)) = \mu dt$ a $Var(dX(t)) = \sigma^2 dt = \sigma^2 Var(dw(t))$. To ale znamená, že Brownov pohyb môžeme charakterizovať jeho deterministickou a fluktuačnou zložkou a prírastky $dX(t)$ môžeme vyjadriť v tvare totálneho diferenciálu

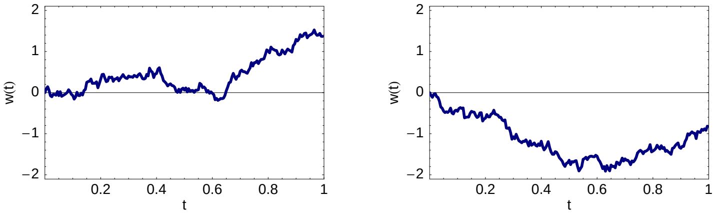
$$dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t)\,, \tag{2.3}$$

kde $\{w(t), t \geq 0\}$ je Wienerov proces. Rovnicu (2.3) nazývame *stochastická diferenciálna rovnica*.

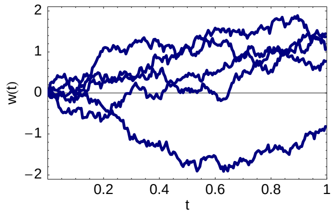
Definícia 2.2. *Ak $\{X(t), t \geq 0\}$ je Brownov pohyb s parametrami μ, σ a $y_0 \in \mathbb{R}^+$, tak systém náhodných premenných $\{Y(t), t \geq 0\}$*

$$Y(t) = y_0 e^{X(t)}, \quad t \geq 0,$$

nazývame geometrický Brownov pohyb.



Obr. 2.2: Ukážka dvoch vybraných vzoriek Wienerovho procesu.



Obr. 2.3: Súhrnná ukážka piatich vybraných vzoriek Wienerovho procesu.

Geometrický Brownov pohyb je opäť Markovov proces a na základe znalosti rozdelenia pravdepodobnosti Wienerovho procesu (2.2) sa dajú odvodiť jeho základné štatistické parametre

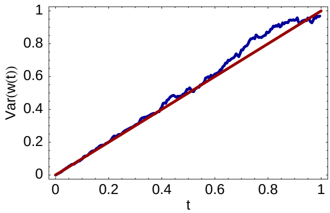
$$E(Y(t)) = y_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}, \qquad Var(Y(t)) = y_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1)\,. \tag{2.4}$$

Pre zjednodušenie odvodenia charakteristík (2.4) nám stačí uvažovať prípad, keď $y_0 = 1$. Potom pre distribučnú funkciu $G(y,t) = P(Y(t) < y)$ geometrického Brownovho pohybu $Y(t)$ platí, že $G(y,t) = 0$ pre $y \leq 0$ (to je dôsledok kladnosti náhodnej premennej $Y(t)$) a pre $y > 0$ platí:

$$G(y,t) = P(Y(t) < y) = P\left(Z(t) < \frac{-\mu t + \ln y}{\sigma}\right),$$

kde $Z(t)$ je náhodná premenná, $Z(t) = (-\mu t + \ln Y(t))/\sigma$. Zrejme $dZ(t) = dw(t)$ a teda $Z(t) = Z(0) + w(t) = w(t)$, nakoľko $Z(0) = 0$. Teda $Z(t)$ je vlastne Wienerov proces. Využijúc poznatok o tvare distribučnej funkcie Wienerovho procesu (2.2), dostávame pre distribučnú funkciu $G(y,t)$ náhodnej premennej $Y(t)$ vzťah $G(y,t) = 0$ pre $y \leq 0$ a

$$G(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{-\mu t + \ln y}{\sigma}} e^{-\xi^2/2t} d\xi \qquad \text{pre } y > 0\,.$$



Obr. 2.4: Časový vývoj disperzie Wienerovho procesu.

Keďže $E(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y,t)\,dy$ a $E(Y(t)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y,t)\,dy$, kde $g(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}G(y,t)$, výpočtom týchto integrálov poľahky dostávame, že platí

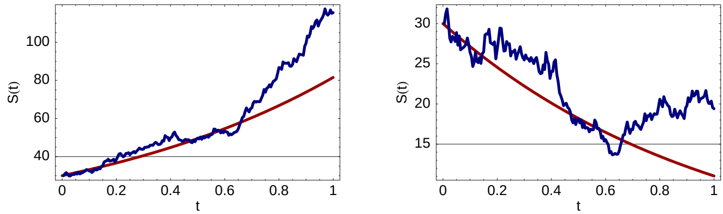
$$
\begin{aligned}
E(Y(t)) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} yg(y,t)\,dy = \int_{0}^{\infty} yg(y,t)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{(-\mu t + \ln y)^2}{2\sigma^2 t}} \frac{1}{\sigma y}\,dy \\
&\qquad (\xi = (-\mu t + \ln y)/(\sigma\sqrt{t})) \\
&= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2} + \sigma\sqrt{t}\xi}\,d\xi = \frac{e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - \sigma\sqrt{t})^2}{2}}\,d\xi \\
&= e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t}\,.
\end{aligned}
$$

Analogickým spôsobom dostaneme aj vzťah pre disperziu (2.4).

V ďalšom budeme hovoriť, že náhodná premenná $\{Y(t), t \geq 0\}$ je lognormálne rozdelená s parametrami strednej hodnoty a disperzie danými podľa (2.4). Wienerov proces budeme označovať pomocou $\{w(t), t \geq 0\}$ a jeho prírastky za krátky časový okamih dt označíme symbolom dw, t. j. $dw(t) = w(t+dt) - w(t)$. Na základe definície Wienerovho procesu sú pritom prírastky $dw(t)$ navzájom nekorelované v čase t, ich stredná hodnota je nulová, t. j. $E(dw(t)) = 0$ a pre disperziu platí $Var(dw(t)) = dt$. Voľne povedané, prírastky dw sa dajú písať

$$dw = \Phi\sqrt{dt}, \qquad \text{kde } \Phi \approx N(0,1)\,,$$

t. j. Φ je normálne rozdelená náhodná premenná.



Obr. 2.5: Ukážka dvoch vybraných vzoriek geometrického Brownovho pohybu s kladným driftom $\mu > 0$ (vľavo) a záporným driftom $\mu < 0$ (vpravo).

2.1.2 Itóova lema

Kľúčovú úlohu v teórii oceňovania derivátov zohráva analýza funkcií (derivátov), ktorých jedna premenná (aktívum) je náhodnou premennou spĺňajúcou nejakú stochastickú diferenciálnu rovnicu. Z tohto dôvodu sa v nasledovnom kroku zameriame na otázku, či je možné zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie $f(x,t)$, pričom premenná x je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice. Odpoveď na túto otázku nám dáva Itóova lema, ktorá je jedným z pilierov analýzy stochastických diferenciálnych rovníc. Itóova lema [1] je podľa Wikipédie *„najslávnejšou lemou všetkých čias"*.

Lema 2.1 (Itóova lema)**.** *Nech $f(x,t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt\,,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw\,. \quad (2.5)$$

[1] Kijoši Itó, 1915-2008, matematik. Pracoval v oblasti teórie pravdepodobnosti a stochastických procesov. Dokázal jedno z najdôležitejších tvrdení stochastického diferenciálneho kalkulu - Itóovu lemu. Držiteľ prestížnej Gaussovej ceny z roku 2008.

Obr. 2.6: Kijoši Itó (1915–2008).

Intuitívny dôkaz Itóovej lemy sa dá previesť rozvinutím funkcie $f = f(x,t)$ do Taylorovho radu stupňa 2. Skutočne

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dx\, dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right) + \text{ č.v.r.}$$

Teraz vďaka vlastnosti $dw = \Phi\sqrt{dt}$, kde $\Phi \approx N(0,1)$, dostávame

$$(dx)^2 = \sigma^2(dw)^2 + 2\mu\sigma dw\, dt + \mu^2(dt)^2 \approx \sigma^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)\,.$$

Podobne výraz $dx\, dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$, a teda rozvoj diferenciálu df podľa prírastkov dt a dx sa dá napísať v tvare

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt\,.$$

Vzťah (2.5) potom už vyplýva z vyššie uvedeného vzťahu pre df dosadením výrazu $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw$ pre diferenciál dx.

2.1.3 Itóova lema pre vektorové náhodné premenné

Predošlý postup odvodenia Itóovej lemy pre funkciu skalárneho argumentu x sa dá poľahky rozšíriť aj na prípad C^2 hladkej funkcie $f = f(\vec{x},t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vektorového argumentu $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. O premenných $x_i, i = 1, ..., n$ budeme prepokladať, že vyhovujú sústave stochastických diferenciálnych rovníc

$$dx_i = \mu_i(\vec{x},t)dt + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(\vec{x},t)dw_k\,,$$

kde $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ je vektor Wienerových procesov, ktoré majú navzájom nezávislé prírastky, t. j.

$$E(dw_i\, dw_j) = 0 \text{ pre } i \neq j\,, \quad E((dw_i)^2) = dt\,.$$

Vektorovo môžeme rovnice pre procesy x_i zapísať v tvare

$$d\vec{x} = \vec{\mu}(\vec{x}, t)dt + K(\vec{x}, t)d\vec{w}\,,$$

kde K je $n \times n$ matica

$$K(\vec{x}, t) = (\sigma_{ij}(\vec{x}, t))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Potom pre prírastok df hladkej funkcie $f = f(\vec{x}, t)$ môžeme napísať rozvoj do Taylorovho radu stupňa 2. Dostávame

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \nabla_x f.d\vec{x} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left((d\vec{x})^T \nabla_x^2 f\, d\vec{x} + 2\nabla_x \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{x}\, dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right) + \text{ č.v.r.}\,, \end{aligned}$$

kde $\nabla_x f$, resp. $\nabla_x^2 f$ predstavujú gradient, resp. Hessovu maticu funkcie f vzhľadom na premenné $x_1, ..., x_n$. Podobne ako v odvodení jednorozmerného variantu Itóovej lemy budú členy $d\vec{x}\, dt$ a $(dt)^2$ zanedbateľné oproti členu dt. Rozhodujúca teda bude opäť analýza výrazu $(d\vec{x})^T \nabla_x^2 f\, d\vec{x} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j$. Na základe predpokladu o nezávislosti prírastkov dw_i a dw_j pre $i \neq j$ dostávame, že platí

$$dx_i\, dx_j = \sum_{k,l=1}^n \sigma_{ik}\sigma_{jl} dw_i\, dw_j + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^n \sigma_{ik}\sigma_{jk}\right) dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)\,.$$

To ale znamená, že rozvoj diferenciálu df podľa prírastkov $dt, d\vec{x}$ sa dá napísať v tvare

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} K : \nabla_x^2 f K\right) dt + \nabla_x f d\vec{x}\,, \tag{2.6}$$

kde výraz $K : \nabla_x^2 f K$ definujeme ako

$$K : \nabla_x^2 f K = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jk}\,. \tag{2.7}$$

Vzťah (2.6) pre prvý diferenciál hladkej funkcie závislej od vektora stochastických procesov je obsahom Itóovej lemy pre funkcie vektorového argumentu. Tento výsledok zohráva dôležitú úlohu pri analýze viacfaktorových modelov oceňovania derivátov úrokovej miery.

2.1.4 Itóov integrál a izometria

Dôležitým technickým nástrojom v analýze stochastických procesov je tzv. Itóov integrál a izometria. Konštrukcia Itóovho integrálu je veľmi podobná definícii Riemann–Stieltesovmu integrálu funkcií reálnej premennej.

V prvom rade si uvedomme, že z definície Wienerovho procesu $\{w(t), t \geq 0\}$ má náhodná premenná $w(t)$ normálne rozdelenie so stredom nula a disperziou t, t. j. $w(t) \sim N(0,t)$. Túto rovnosť môžeme zapísať aj ako

$$\int_0^t dw(\tau) = w(t) - w(0) = w(t) \sim N(0,t).$$

To ale znamená, že pre konštantnú funkciu $f(\tau) \equiv c$, kde c je konštanta, platí

$$\begin{aligned}\int_0^t f(\tau)dw(\tau) &= c\int_0^t dw(\tau) = cw(t) - cw(0)\\ &= cw(t) \sim N(0,c^2 t) = N(0, \int_0^t f^2(\tau)d\tau).\end{aligned}$$

Táto identita nám poskytuje ideu, ako zaviesť tzv. Itóov integrál merateľnej funkcie $f : (0,t) \to \mathbb{R}$ takej, že $\int_0^t f^2(\tau)d\tau < \infty$.

$$\int_0^t f(\tau)dw(\tau) := \lim_{\nu\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)),$$

kde $\nu = \max(\tau_{i+1} - \tau_i)$ je norma delenia $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n = t$ intervalu $(0,t)$ a konvergencia sa chápe podľa pravdepodobnosti. Nech funkcia f je konštantná na každom intervale $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Potom pre strednú hodnotu konečnej sumy $\sum_{i=1}^n f(\tau_i)(w(t_{i+1}) - w(t_i))$ zrejme platí

$$E\left(\sum_{i=1}^n f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i))\right) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)E(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)) = 0,$$

pretože prírastky $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)$ sú normálne rozdelené náhodné premenné $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i) \sim N(0, \tau_{i+1} - \tau_i)$. Keďže tieto prírastky sú naviac aj nezávislé a $w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i) = \Phi_i\sqrt{\tau_{i+1} - \tau_i}$, kde $\Phi_i \sim N(0,1)$, tak pre disperziu súčtu nezávislých normálne rozdelených premenných napokon dostávame

$$E\left(\left[\sum_{i=1}^n f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i))\right]^2\right) = \sum_{i=1}^n f^2(\tau_i)E(\Phi_i^2)(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

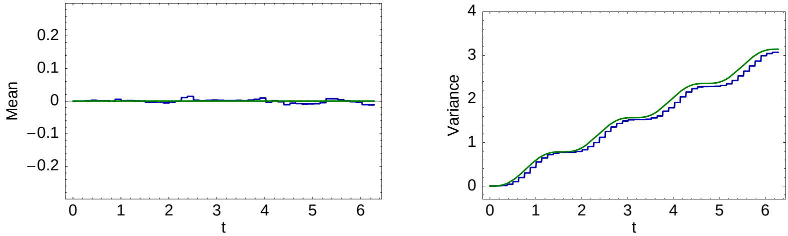
$$= \sum_{i=1}^n f^2(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Podobne ako pri zavedení pojmu Riemann–Stieltesovho integrálu teraz môžeme prejsť k limite pre normu delenia ν idúcu k nule a postupnosti jednoduchých schodovitých funkcií konvergujúcich bodovo takmer všade k merateľnej funkcii f. Dostávame tak jeden z fundamentálnych výsledkov stochastického kalkulu pre Itóov integrál:

Lema 2.2. *Nech pre merateľnú funkciu $f : (0,t) \to \mathbb{R}$ platí $\int_0^t f^2(\tau)d\tau < \infty$. Potom existuje Itóov integrál $\int_0^t f(\tau)dw(\tau)$, ktorý predstavuje normálne rozdelenú náhodnú premennú s rozdelením $N(0, \sigma^2(t))$, kde $\sigma^2(t) = \int_0^t f(\tau)^2 d\tau$. To znamená, že platia identity:*

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t f(\tau)dw(\tau)\right) &= 0, \\ E\left(\left[\int_0^t f(\tau)dw(\tau)\right]^2\right) &= \int_0^t f(\tau)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Posledná identita sa nazýva Itóova izometria.



Obr. 2.7: Ukážka strednej hodnoty Itóovho integrálu $\int_0^t f(\tau)dw(\tau)$ (vľavo) a jeho disperzie spolu s grafom $\int_0^t f(\tau)^2 d\tau$ (vpravo) pre funkciu $f(\tau) = \sin(2\tau)$. Počet delení intervalu je $n = 100$.

Poznamenajme, že Itóova izometria platí nielen pre merateľné funkcie f, ale aj pre všeobecné stochastické procesy, ktoré majú vlastnosť spojitosti zľava a lokálnej konečnosti. Pre taký proces $\{H_\tau, \tau \geq 0\}$ sa Itóov integrál opäť definuje ako limita (v zmysle konvergencie podľa pravdepodobnosti) konečných súm

$$\int_0^t H_\tau dw(\tau) := \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} H_{\tau_i}(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)).$$

Potom Itóova izometria má tvar (pozri Oksendal [50])

$$E\left(\left[\int_0^t H_\tau dw(\tau)\right]^2\right) = E\left(\int_0^t H_\tau^2 d\tau\right). \tag{2.8}$$

Ďalšie podrobnosti o kvalitatívnych ako aj kvantitatívnych vlastnostiach stochastických procesov sa čitateľ môže viac dozvedieť v knihách a prehľadových článkoch: Karatzas a Shreve [35], Papanicolaou [51], Hull [29], Wilmott, Dewynne a Howison [64], Melicherčík a kol. [47, 45, 46], Baxter a Rennie [7].

2.2 Black–Scholesova rovnica

V tejto časti odvodíme model oceňovania finančných derivátov, akými sú napríklad opcie. Matematické vyjadrenie tohto modelu je tzv. Black–Scholesova parciálna diferenciálna rovnica. Opisuje časový vývoj ceny derivátu akcie ako funkcie ceny akcie a času ostávajúceho do expirácie derivátu.

Odvodenie Black–Scholesovej diferenciálnej rovnice budeme sledovať na príklade európskej kúpnej opcie. Pripomeňme, že kúpna opcia je kontrakt, v ktorom majiteľ opcie získava právo kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase $t = T$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu E. Zdôraznime, že daná strana získava právo, ale nie povinnosť kúpiť predmetnú akciu. Toto právo má teda samo osebe istú hodnotu, a preto zaň treba v čase uzavretia kontraktu $t = 0$ zaplatiť istú, tzv. opčnú prémiu V. Pre obe strany, t. j. pre vypisovateľa opcie ako i pre držiteľa opcie, je zaujímavé vedieť, aká je férová hodnota prémie tak, aby ani jedna zo strán nebola zvýhodnená. Označme

S - hodnotu (cenu) aktíva,

V - hodnotu derivátu (opcie) na dané aktívum,

T - expiračnú dobu, t. j. termín vypršania derivátu.

Časovú premennú označíme t a teda $t \in [0, T]$. Úloha spočíva v nájdení matematickej rovnice, ktorá by opisovala vzťah pre funkciu ceny opcie $V = V(S, t)$ ako funkcie aktuálnej ceny akcie S a času t. Opčná prémia predstavuje potom hodnotu $V(S, 0)$ na počiatku uzatvárania kontraktu, t. j. v čase $t = 0$.

Odvodenie rovnice pozostáva z dvoch krokov. V prvom z nich určíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa ľubovoľná hladká funkcia $V = V(S, t)$ od stochasticky meniacej sa ceny akcie S a času t. Funkcii V vo všeobecnosti hovoríme finančný derivát. V druhom kroku zostavíme tzv. samofinancujúce sa bezrizikové portfólio vhodnou kombináciou kúpy, resp. predaja akcií, opcií a bezrizikových dlhopisov.

2.2.1 Stochastická rovnica pre derivát stochastickej ceny akcie

Ako sme už spomenuli v predošlej kapitole, na modelovanie náhodného vývoja ceny akcie ako funkcie času $S = S(t)$ použijeme stochastickú diferenciálnu rovnicu reprezentujúcu geometrický Brownov pohyb

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw \,, \tag{2.9}$$

kde dS znamená zmenu ceny akcie za časový okamih dt, μ je očakávaný výnos alebo trend vývoja akcie, σ je volatilita časového vývoja akcie.

Znakom dw sme označili diferenciál Wienerovho procesu. Poznamenajme, že stochastická rovnica (2.9) sa dá napísať aj v tvare

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw\,,$$

pričom z tohto zápisu je jasnejšie, že v časovej analýze je podstatnou informáciou iba relatívna zmena dS/S a nie absolútna zmena ceny aktíva dS. Dôvodom je ten fakt, že hľadaný model musí byť v konečnom dôsledku nezávislý od voľby jednotiek, teda výsledná oceňovacia formula musí mať rovnaký tvar nezávisle od toho, či cenu meriame v eurách alebo v ich stotinách, t. j. centoch.

V nasledovnom kroku odvodíme stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie (derivátu) ceny akcie a času. Ak funkcia $V = V(S,t)$ je nejaká hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná S je sama osebe funkciou času $S = S(t)$ a vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (2.9), tak sa pýtame: akú stochastickú rovnicu bude spĺňať funkcia $V = V(S,t)$? Odpoveď na túto otázku nám dáva hlboký výsledok z teórie náhodných procesov – Itóova lema, ktorá bola uvedená v predošlej časti (lema 2.1). V našom prípade premenná S vyhovuje stochastickej rovnici (2.9), t. j. $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, a teda $\mu(S,t) = \mu S, \sigma(S,t) = \sigma S$. Na základe Itóovej lemy cena derivátu akcie, teda funkcia $V(S,t)$ náhodného procesu S, bude vyhovovať stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dw\,. \tag{2.10}$$

2.2.2 Samofinancovaná stratégia tvorby portfólia s nulovým rastom investícií

V tomto kroku sa budeme zaoberať vytváraním portfólia pozostávajúceho z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Myšlienka samofinancovanej stratégie tvorby portfólia spočíva v dynamickom predaji, resp. kúpe jednotlivých zložiek portfólia tak, že na udržanie jeho nulovej rizikovosti nie sú potrebné žiadne ďalšie investície (tzv. podmienka nulových investícií) a že nákup, resp. predaj niektorej zo zložiek portfólia je kompenzovaný predajom, resp. kúpou inej zložky portfólia (tzv. podmienka samofinancovanosti portfólia). Tento spôsob odvodenia Black–Scholesovej rovnice náleží Mertonovi a jeho odlišnosť od odvodenia Blacka a Scholesa spočíva práve v uvažovaní samofinancujúceho sa portfólia s nulovým rastom investícií. Poznamenajme, že predpoklad o snahe dosiahnúť bezrizikové portfólio, je základným pilierom odvodenia Black–Scholesovej rovnice. Tento predpoklad vychádza z predstavy o snahe investorov dosiahnuť rizikovo neutrálne stratégie obchodovania s cennými papiermi. Hoci dnes už vieme, že predpoklad o konštrukcii bezrizikového portfólia sa dá z praktického hľadiska spochybniť, napriek tomu ho budeme postulovať ako východisko pre odvodenie základného Black–Scholesovho modelu. V kapitole 5 sa napokon budeme zaoberať aj modifikáciami základného Black–Scholesovho modelu, ktoré budú zohľadňovať okrem iného realistickejšie predstavy o bezrizikovosti portfólia, o obmedzenej likvidite trhu alebo o zahrnutí transakčných nákladov do modelu.

V nasledovnom kroku budeme vytvárať portfólio pozostávajúce z určitého množstva akcií, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Uvažovať budeme o tzv. samofinancujúcom sa portfóliu, t. j. o portfóliu, v ktorom sa nákup, resp. predaj jednej z uvedených troch zložiek musí uhradiť predajom, resp. nákupom inej zložky portfólia. Presnejšie, nech v čase t je portfólio zložené z Q_S kusov akcií v cene S, Q_V kusov opcií v cene V a peňažného objemu B bezrizikových dlhopisov nevyplácajúcich kupóny. Ak si označíme $M_S = SQ_S$, $M_V = VQ_V$, tak predpoklad nulových investícií znamená, že musí platiť $M_S + M_V + B = 0$, pre všetky časy $t \in [0, T]$, t. j.

$$SQ_S + VQ_V + B = 0, \tag{2.11}$$

pre $t \in [0, T]$. Mertonovu podmienku samofinancovanosti portfólia môžeme preto vyjadriť v tvare:

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0 \tag{2.12}$$

pričom dQ_S, dQ_V, δB označujú postupne zmeny počtov akcií, opcií a zmenu objemu bezrizikových dlhopisov držaných v portfóliu, ktoré sa použili na samofinancovanie nákupu, resp. predaja akcií a opcií. Pripomeňme, že pre bezrizikové dlhopisy nevyplácajúce kupóny platí jednoduchá oceňovacia rovnica $B(t) = B(0)e^{rt}$, kde $r > 0$ je spojitá miera úročenia dlhopisu. Táto rovnica sa v diferenciálnom tvare dá prepísať ako $dB = rB\,dt$. Zmena objemu dlhopisov by bola doteraz závislá iba na spojitom úročení istiny $B(0)$. Keďže však dlhopisy dynamicky používame aj na samofinancovanie portfólia prostredníctvom ich kúpy, resp. predaja v objeme δB (viď (2.12)), celková zmena peňažného objemu dlhopisov dB je potom daná vzťahom

$$dB = rB\,dt + \delta B\,. \tag{2.13}$$

Diferencovaním vzťahu (2.11), následne dosadením (2.13) do (2.12) a vyjadrením ceny B z rovnice (2.11) nakoniec dostaneme, že musí platiť

$$\begin{aligned} 0 &= d\,(SQ_S + VQ_V + B) \\ &= SdQ_S + VdQ_V + \delta B + Q_S dS + Q_V dV + rB\,dt \\ &= Q_S dS + Q_V dV - r(SQ_S + VQ_V)\,dt, \end{aligned}$$

a teda po vydelení nenulovou hodnotou Q_V počtu opcií v portfóliu napokon získavame

$$dV - rV\,dt - \Delta(dS - rS\,dt) = 0\,, \quad \text{kde } \Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}\,. \tag{2.14}$$

Pripomeňme, že oba náhodné procesy, t. j. cena akcie S, ako i cena opcie na akciu V, vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam

$$\begin{aligned} dS &= \mu S\,dt + \sigma S\,dw\,, \\ dV &= \left(\tfrac{\partial V}{\partial t} + \mu S \tfrac{\partial V}{\partial S} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \tfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \tfrac{\partial V}{\partial S}\,dw\,. \end{aligned}$$

Dosadením týchto vzťahov pre diferenciály dS a dV, po úpravách dostávame

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV - \Delta\mu S + \Delta r S\right) dt$$
$$+\sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dw = 0\,.$$

Cieľom investora je teraz skombinovať svoje portfólio pozostávajúce z akcií, opcií a dlhopisov tak, aby neutralizoval vystavenie svojho portfólia riziku. Takéto správanie sa investora sa označuje ako averzia investora k riziku. Zrejme jediný rizikový člen vo vyššie uvedenej rovnici je reprezentovaný stochastickým členom dw Wienerovho náhodného procesu. Neutralizovanie vplyvu tohto stochastického, a tým pádom rizikového, člena sa dá výberom pomeru Δ

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}\,. \tag{2.15}$$

Následným dosadením takéhoto výberu Δ do deterministického zvyšku rovnice, dostávame výslednú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right) dt = 0,$$

a teda

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\,, \tag{2.16}$$

ktorá je známa ako Black–Scholesova rovnica na oceňovanie derivátov akcií. Odvodenie tejto rovnice bolo prvýkrát uvedené v práci Blacka a Scholesa [8]. Veľmi dobrá referencia je aj novší článok Dewynne a kol. [15], kde sa čitateľ môže oboznámiť s rôznymi aspektami oceňovania nielen európskeho typu opcií, ale aj amerických opcií.

Uveďme ešte jedno užitočné zovšeobecnenie Black–Scholesovej rovnice pre prípad akcie, ktorá spojite vypláca dividendy s ročnou dividendovou mierou $D \geq 0$. V tomto prípade držaním akcie v hodnote S získame za čas dt dividendový podiel $DSdt$. Vyplatením dividend však samotná cena akcie klesá, čo sa prejaví na zníženom trende ceny akcie. Teda cena akcie bude vyhovovať stochastickej rovnici

$$dS = (\mu - D)S\,dt + \sigma S dw\,.$$

Na druhej strane, získaním dividend dostávame nové prostriedky do nášho samofinancujúceho sa portfólia v celkovom objeme $DSQ_S\,dt$ za čas dt. Túto sumu by sme mohli ako dodatočný príjem prirátať do pravej strany rovnice pre zmenu objemu dlhopisov (2.13), t. j. $dB = rB\,dt + \delta B + DSQ_S\,dt$. Tento doplnok sa prejaví v modifikácii rovnice (2.14), ktorá nadobudne tvar

$$dV - rV\,dt - \Delta(dS - (r - D)S\,dt) = 0\,.$$

Opakovaním ďalšieho postupu nakoniec prídeme k modifikovanej rovnici (2.16) zahrňujúcej dividendovú mieru D

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\,. \tag{2.17}$$

Literatúra

[1] ALOBAIDI, G., MALLIER, R., DEAKIN, S. (2004): Laplace transforms and installment options. *Math. Models & Methods in Appl. Science* **18**(8), 1167–1189.

[2] ANKUDINOVA J., EHRHARDT, M. (2008): On the numerical solution of nonlinear Black–Scholes equations. *Computers and Mathematics with Applications* **56**, 799–812.

[3] AVELLANEDA, M., PARAS, A. (1994): Dynamic Hedging Portfolios for Derivative Securities in the Presence of Large Transaction Costs. *Applied Mathematical Finance* **1**, 165–193.

[4] AVELLANEDA, M., LEVY, A., PARAS, A. (1995): Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance* **2**, 73–88.

[5] BARLES, G., SONER, H. M. (1998): Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black–Scholes equation. *Finance Stochast.* **2**, 369-397.

[6] BARONE-ADESI, B., WHALEY, R. E. (1987): Efficient analytic approximations of American option values. *J. Finance* **42**, 301–320.

[7] BAXTER, M. W., RENNIE, A. J. O. (1996): *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge, Cambridge University Press.

[8] BLACK, F., SCHOLES, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Economy* **81**, 637–654.

[9] BRIGO, D., MERCURIO, F. (2006): *Interest rate models - Theory and practice. With smile, inflation and credit.* Springer.

[10] CARR, P., JARROW, R., MYNENI, R. (1992): Alternative characterizations of American put options. *Mathematical Finance* **2**, 87–105.

[11] COLLATZ, L. (1970): *Funkcionální analýza a numerická matematika*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.

[12] CORZO T.S., SCHWARTZ, E.S. (2003): Convergence Within the EU: Evidence from Interest Rates. *Economic Notes* **29**, 243–266.

[13] COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica* **53**, 385-408.

[14] COX, J.C., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. (1979): Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* **7**, 229–264.

[15] DEWYNNE, J. N., HOWISON, S. D., RUPF, J., WILMOTT, P. (1993): Some mathematical results in the pricing of American options. *Euro. J. Appl. Math.* **4**, 381–398.

[16] DURING, B., FOURNIER, M., JUNGEL, A. (2003): High order compact finite difference schemes for a nonlinear Black–Scholes equation. *Int. J. Appl. Theor. Finance* **7**, 767–789.

[17] ELLIOTT, C.M., OCKENDOM, J.R. (1982): *Weak and Variational Methods for Free and Moving Boundary Problems*. Pitman.

[18] EVANS, J. D., KUSKE, R., KELLER, J.B. (2002): American options on assets with dividends near expiry. *Mathematical Finance* **12**, 219–237.

[19] FADDEJEV, D.K., FADDEJEVA, V.N. (1964): *Numerické metody lineární algebry*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.

[20] FIEDLER, M. (1981): *Speciálni matice a jejich použití v numerické matematice*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.

[21] FONG, H. G., VASICEK, O. A. (1991): Fixed-Income Volatility Management. *Journal of Portfolio Management* (Summer), 41-46.

[22] FREY, R., PATIE, P. (2002): Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: A Simulation Study. *In: Advances in Finance and Stochastics*, Springer, Berlin, 137–159.

[23] FREY, R., STREMME, A. (1997): Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging. *Mathematical Finance* **4**, 351–374.

[24] GESKE, R., JOHNSON, H. E. (1984): The American put option valued analytically. *J. Finance* **39**, 1511–1524.

[25] GESKE, R., ROLL, R. (1984): On valuing American call options with the Black–Scholes European formula. *J. Finance* **89**, 443–455.

[26] GRANDITS, P., SCHACHINGER, W. (2001): Leland's approach to option pricing: the evolution of a discontinuity. *Mathematical Finance* **11**(3), 347–355.

[27] HO T.S.Y., LEE S.B. (1986): Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* **41** 1011–1029.

[28] HOGGARD, T., WHALLEY, A. E., WILMOTT, P. (1994): Hedging option portfolios in the presence of transaction costs. *Advances in Futures and Options Research* **7**, 21–35.

[29] HULL, J. C. (1989): *Options, Futures and Other Derivative Securities*. Prentice Hall.

[30] CHADAM, J. (2008): Free Boundary Problems in Mathematical Finance. *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006*, Vol. 12, Springer Berlin Heidelberg.

[31] CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A., SANDERS, A. B. (1992): An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *The Journal of Finance* **47**, 1209-1227.

[32] JANDAČKA , M., ŠEVČOVIČ, D. (2005): On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics* **3**, 235–258.

[33] JOHNSON, H. (1983): An analytic approximation of the American put price. *J. Finan. Quant. Anal.* **18**, 141–148.

[34] KARATZAS, I. (1988): On the pricing American options. *Appl. Math. Optim.* **17**, 37–60.

[35] KARATZAS I., SHREVE S. (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed.) Berlin: Springer.

[36] KNESSL, C. (2001): A note on a moving boundary problem arising in the American put option. *Studies in Applied Mathematics* **107**, 157–183.

[37] KOMORNÍK, J., KOMORNÍKOVÁ, M., MIKULA, K. (1998): *Modelovanie ekonomických a finančných procesov*, Vydavateľstvo UK, Bratislava.

[38] KRATKA, M. (1998): No Mystery Behind the Smile. *Risk* **9**, 67–71.

[39] KUSKE R. A., KELLER, J. B. (1998): Optimal exercise boundary for an American put option. *Applied Mathematical Finance* **5**, 107–116.

[40] KWOK, Y. K. (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer-Verlag.

[41] LELAND, H. E. (1985): Option pricing and replication with transaction costs. *Journal of Finance* **40** 1283–1301.

[42] MACMILLAN, L. W. (1986): Analytic approximation for the American put option. *Adv. in Futures Options Res.* **1**, 119–134.

[43] MALLIER, R. (2002): Evaluating approximations for the American put option. *Journal of Applied Mathematics* **2**, 71–92.

[44] MALLIER, R., ALOBAIDI, G. (2004): The American put option close to expiry. *Acta Mathematica Univ. Comenianae* **73**, 161–174.

[45] MELICHERČÍK I., OLŠAROVÁ L. A ÚRADNÍČEK, V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky 1*. Bratia Sabovci, Zvolen.

[46] MELICHERČÍK I. OLŠAROVÁ L. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky 2*. Bratia Sabovci, Zvolen.

[47] MELICHERČÍK I., OLŠAROVÁ L. A ÚRADNÍČEK V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, Bratislava.

[48] MYNENI, R. (1992): The pricing of the American option. *Annal. Appl. Probab.* **2**, 1–23.

[49] NOWMAN, K. B. (1997): Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates. *Journal of Finance* **52**, 1695-1706.

[50] OKSENDAL B.K. (2003): *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer.

[51] PAPANICOLAOU, G.C. (1973): Stochastic Equations and Their Aplications. *American Mathematical Monthly* **80**, 526 - 545.

[52] RIEČANOVÁ,Z. A KOL. (1987): *Numerické metódy a matematická štatistika*. Bratislava: Alfa, Praha: SNTL.

[53] ROLL, R. (1977): An analytic valuation formula for unprotected American call options on stock with known dividends. *J. Finan. Economy* **5**, 251–258.

[54] STAMICAR, R., ŠEVČOVIČ, D.. CHADAM, J. (1999): The early exercise boundary for the American put near expiry: numerical approximation. *Canad. Appl. Math. Quarterly* **7**, 427–444.

[55] STRAKA, M. (1999): *O*ceňovanie finančných derivátov, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK.

[56] ŠEVČOVIČ, D. (2001): Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option. *Euro. Journal on Applied Mathematics* **12**, 25–37.

[57] ŠEVČOVIČ, D. (2007): An iterative algorithm for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for a nonlinear Black–Scholes equation. *Canad. Appl. Math. Quarterly* **15**, 77–97.

[58] ŠEVČOVIČ, D. (2008): *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie.* IRIS, vydavateľstvo a tlač, s.r.o.

[59] SCHÖNBUCHER, P., WILMOTT, P. (2000): The feedback-effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **61** 232–272.

[60] URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. (2008): *Calibration of term structure models*. PhD thesis, Comenius University.

[61] VASICEK, O. A. (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics* **5**, 177-188.

[62] VITÁSEK, E. (1987): *Numerické metody*. SNTL – Statní nakladatelství technické literatury, Praha.

[63] WIDDICKS, M., DUCK, P. W., ANDRICOPOULOS, A.D., NEWTON, D. P. (2005): The Black–Scholes equation revisited: Asyptotic expansions and singular perturbations. *Mathematical Finance* **15**, 373–391.

[64] WILMOTT, P., DEWYNNE, J., HOWISON, S.D. (1995): *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. UK: Oxford Financial Press.

[65] ZHU, S.P. (2006): A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **9**, 1141–1177.

Register

O

P

R

S

T

U

V

W

Y

Z

ISBN 978-80-227-3014-3