

Vydavatelstvo a tlač, s.r.o.

Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie

Daniel Ševčovič

Vydal IRIS, Vydavateľstvo a tlač, s.r.o. ako vysokoškolskú učebnicu

Autor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., 2008

Recenzent: doc. RNDr. Eugen Vizsus, CSc.

Jazyková úprava: doc. RNDr. Andrea Ševčovičová, PhD.

ISBN 978-80-89238-15-6

Obsah

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Parciálne diferenciálne rovnice a matematické modelovanie | 10 |
| 1.1 | Zákon zachovania hmoty | 11 |
| 1.2 | Rovnica vedenia tepla | 15 |
| 1.3 | Rovnica priečného kmitania struny | 18 |
| 1.4 | Black – Scholesov model | 20 |
| 2 | Klasifikácia a rád parciálnych diferenciálnych rovníc | 25 |
| 2.1 | Rád diferenciálnej rovnice | 26 |
| 2.2 | Rovnice prvého rádu | 27 |
| 2.3 | Klasifikácia rovníc druhého rádu | 28 |
| 3 | Parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu | 31 |
| 3.1 | Homogénne rovnice prvého rádu | 31 |
| 3.2 | Nehomogénne a kvázilineárne rovnice | 39 |
| 3.3 | Príklady | 44 |
| 4 | Parabolické parciálne diferenciálne rovnice | 46 |
| 4.1 | Metóda Greenovej funkcie | 47 |
| 4.1.1 | Motivácia a hlavná myšlienka | 47 |
| 4.1.2 | Princíp porovnávania riešení | 54 |
| 4.1.3 | Princíp zhladzovania a ďalšie dôsledky | 55 |
| 4.1.4 | Nehomogénne parabolické rovnice | 56 |
| 4.1.5 | Prípad viacrozmernej oblasti | 58 |
| 4.1.6 | Aplikácia na Black – Scholesov model | 59 |
| 4.1.7 | Príklady | 64 |
| 4.2 | Fourierova metóda separácie premenných | 65 |
| 4.2.1 | Motivácia a hlavná myšlienka | 65 |
| 4.2.2 | Metóda hľadania riešenia pomocou separácie premenných | 66 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2.3 | Príklady výpočtu riešenia použitím Fourierovej metódy | 72 |
| 4.2.4 | Princíp porovnávania riešení | 72 |
| 4.2.5 | Princíp zhladzovania riešenia | 75 |
| 4.2.6 | Nehomogénne rovnice | 77 |
| 4.2.7 | Príklady | 81 |
| 5 | Eliptické parciálne diferenciálne rovnice | 84 |
| 5.1 | Motivácia štúdia eliptických rovníc | 84 |
| 5.2 | Harmonické funkcie | 87 |
| 5.3 | Greenov vzorec | 89 |
| 5.4 | Greenova reprezentácia riešení | 91 |
| 5.5 | Princíp maxima | 95 |
| 5.6 | Metódy riešenia eliptických rovníc | 98 |
| 5.7 | Príklady | 101 |
| 6 | Hyperbolické rovnice | 104 |
| 6.1 | Rovnice na neohraničenom intervale | 104 |
| 6.1.1 | Príklady riešenia vlnovej rovnice na neohraničenom intervale | 106 |
| 6.2 | Vlastnosti riešení hyperbolickej rovnice | 108 |
| 6.3 | Rovnice na ohraničenom intervale | 109 |
| 6.4 | Príklady | 114 |
| 7 | Niektoré vybrané aplikácie parciálnych diferenciálnych rovníc | 116 |
| 7.1 | Parabolické rovnice a filtrácia signálu | 116 |
| 7.2 | Parabolické rovnice a filtrácia obrazu | 118 |
| 7.3 | Eliptické rovnice a základná veta algebry | 123 |
| | <i>Literatúra</i> | 127 |
| | <i>Register</i> | 128 |

Úvod

Aký matematický objekt predstavujú parciálne diferenciálne rovnice? To je prirodzená otázka, ktorá napadne asi každého, kto sa začína oboznamovať s touto rozsiahlou oblasťou matematiky. Nuž veľmi zjednodušene povedané, sú to *rovnice, v ktorých okrem hľadanej funkcie viac premenných vystupujú aj jej parciálne derivácie rôznych rádov a podľa rôznych premenných*. Cieľom tohto textu je poskytnúť základné znalosti z metód riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Pokúsime sa predstaviť tieto rovnice ako rozumné modely rôznych, najmä fyzikálnych zákonitostí a javov. Zároveň je aj cieľom poskytnúť čitateľovi základné metódy riešenia rôznych typov parciálnych diferenciálnych rovníc. Snahou pri písaní tohto textu bolo nájsť vyváženú mieru medzi matematickým detailom a presnosťou na jednej strane a názornosťou výkladu na strane druhej. Autorovi išlo predovšetkým o podanie presvedčivého argumentu a o rozvíjanie fyzikálnej intuície pri predkladaní jednotlivých častí teórie parciálnych diferenciálnych rovníc.

V každom úvode do problematiky by nemala chýbať motivácia prečo vôbec študovať ten, či onen matematický predmet. Parciálne diferenciálne rovnice nám poskytujú možnosť elegantného skĺbenia rozvíjanej teórie s pozorovanou realitou. Dôraz pri písaní textu bol teda kladený aj na zhrnutie základných metód a myšlienok, o ktoré sa opiera matematické modelovanie fyzikálnych procesov a tak zvýrazniť účelnosť štúdia PDR.

Teraz si niečo bližšie povedzme o usporiadaní tohto textu. V Kapitole 1 sa zaoberáme odvodzovaním niektorých matematických modelov, ktoré opisujú rôzne (väčšinou) fyzikálne javy, akými sú zákon zachovania hmoty, problém vedenia tepla, priečne kmity struny či Black – Scholesov model oceňovania derivátov finančných aktív. Cieľom časti je poskytnúť motiváciu a rozumné príklady na štúdium parciálnych diferenciálnych rovníc. V druhej kapitole sa sústredíme na klasifikáciu PDR. Vysvetlíme pojem rádu rovnice, čo je to lineárna a kvázilineárna rovnica prvého rádu, klasifikujeme lineárne rovnice druhého rádu. V Kapitole 3 sa

zameriame na analýzu rovníc prvého rádu. Najprv objasníme geometrický význam lineárnych homogénnych rovníc prvého rádu, ktorého dôsledkom je nájdenie efektívne metódy ako riešiť takéto rovnice. V kapitole sa zaoberáme ako lineárnymi, tak aj kvázilineárnymi rovnicami prvého rádu. Kapitoly 4,5,6 sú zamerané na štúdium lineárnych rovníc druhého rádu. V Kapitole 4 sa najprv zaoberáme parabolickými rovnicami, pričom obsah kapitoly je rozdelený do dvoch samostatných celkov. V prvom celku sa zaoberáme parabolickými rovnicami s neohraničenou priestorovou premennou. Odvodíme explicitný vzorec poskytujúci explicitné vyjadrenie riešenia rovnice. Zvláštnu pozornosť venujeme odvodeniu vzorca pre oceňovanie európskej kúpnej opcie, ktorý je založený na parabolickej Black – Scholesovej rovnici. V druhom celku je pozornosť sústredená na parabolické rovnice s ohraničenou priestorovou premennou. Základom odvodenia vzorca pre tvar riešenia je Fourierova metóda separácie premenných. V oboch celkoch sa zameriavame aj na skúmanie kvalitatívnych vlastností riešení parabolických rovníc, akými sú: princíp usporiadania riešení, princíp zhladzovania riešení a asymptotické vlastnosti riešení. Ako prototyp a motív týchto princípov uvádzame vždy parabolickú rovnicu vedenia tepla a jej fyzikálny význam. V Kapitole 5 sa zameriavame na eliptické rovnice. Ich základným fyzikálnym prototypom sú stacionárne úlohy, t. j. fyzikálne deje nezávislé od času alebo v čase už ustálené - nemenné. Najprv sa zaoberáme istými špeciálnymi riešeniami tzv. Laplaceovej rovnice. Tieto riešenia sa nazývajú harmonické funkcie a ich význam tkvie v tom, že pomocou nich a istých integrálnych transformácií (potenciálov) dokážeme konštruovať aj riešenia zložitejších, napr. nehomogénnych eliptických rovníc. Opäť je pozornosť venovaná kvalitatívnym vlastnostiam riešení ako napríklad princíp maxima, vlastnosť strednej hodnoty harmonických funkcií, hladkosť riešenia eliptickej rovnice a jeho rozklad na objemové a povrchové potenciály. V Kapitole 6 študujeme hyperbolické rovnice. V prvom rade poskytneme explicitný vzorec pre riešenie priečného kmitania nekonečnej struny - tzv. d'Alembertov vzorec. V druhej časti kapitoly rozoberáme riešenie hyperbolickej rovnice na ohraničenom intervale. Podobne ako v Kapitole 4 základnou metódou riešenia je Fourierova metóda separácie premenných. Cieľom analýzy riešení je aj poukázať na kvalitatívny rozdiel medzi riešeniami parabolických a hyperbolických rovníc. Zhruba povedané, ukážeme, že kým parabolické rovnice majú zhladzovací efekt ako aj efekt postupného zabúdania informácie o počiatkovej podmienke, tak v prípade hyperbolických rovníc ani jeden z týchto princípov neplatí a ich riešenia sú s postupom času tak hladké či nehladké, akými boli na počiatku. V poslednej Kapitole 7 uvedieme niekoľko aplikácií poznatkov o kvalitatívnych vlastnostiach riešení parciálnych diferenciálnych rovníc.

Kapitoly sú dopĺňané riešeniami príkladmi ako aj príkladmi určenými na samostatnú prácu čitateľa. Názornosť výkladu je podporená grafickými

výstupmi znázorňujúcimi riešenia skúmaných rovníc. Všetky obrázky riešení ako aj riešenia samotné boli získané za podpory matematického systému symbolického a numerického výpočtu *Mathematica*©.

Od čitateľa nasledujúceho textu sa vyžadujú iba základné znalosti z matematickej analýzy funkcií viacerých premenných. Istá fyzikálna intuícia a schopnosť porozumieť fyzikálnemu javu sú vítané, hoci tento text nemá ambíciu zastupovať príručku matematického modelovania fyzikálnych procesov. Jednotlivé kapitoly sa dajú čítať samostatne.

Obsah tohto textu bol prednášaný v rámci prednášky z parciálnych diferenciálnych rovníc pre študentov tretieho resp. štvrtého ročníka odboru Ekonomická a finančná matematika na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Rozsahom pokrýva 12 týždňový cyklus dvojhodinových prednášok.

Autor je vďačný všetkým kolegom a študentom, ktorí prispeli k zlepšeniu tohto textu. Obzvlášť ďakujem recenzentovi dr. E. Vizsusovi za starostlivé preštudovanie materiálu a cenné pripomienky.

Daniel Ševčovič, Bratislava, január 2008.

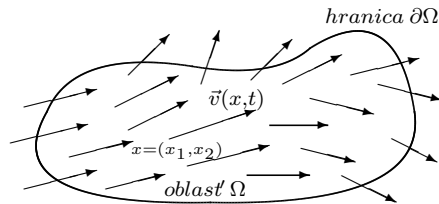
Kapitola 1

Parciálne diferenciálne rovnice a matematické modelovanie

V tejto kapitole ukážeme význam parciálnych diferenciálnych rovníc v matematickom modelovaní rôznych väčšinou fyzikálnych zákonitostí. Všade tam, kde do úvah vstupujú neznáme funkcie - fyzikálne veličiny - závisiace na viacerých premenných, je možné očakávať, že matematický model bude v sebe obsahovať parciálne derivácie hľadanej funkcie podľa jednotlivých premenných. Uvedením týchto príkladov matematického modelovania chceme súčasne zdôrazniť význam matematických aparátov analýzy funkcií viac premenných, najmä s ohľadom na integrovanie funkcií viac premenných. Prirodzene sa ukáže význam pojmov, akými sú napríklad divergencia, gradient, či Laplaceov operátor.

Prvým fyzikálnym modelom bude zákon zachovania hmoty. Odvodíme matematickú formuláciu tohto zákona. Ďalej sa venujeme modelovaniu šírenia tepla, ako i matematickému opisu kmitania struny. Z iných, nefyzikálnych aplikácií sa zameriame na Black – Scholesov model oceňovania derivátov akcií. Význam konkrétnych modelov tkvie aj v tom, aby si čitateľ uvedomil fyzikálne rozmery jednotlivých veličín a aké sú medzi nimi a ich vzťah k hľadanému riešeniu.

Je zrejmé, že na takom malom priestore, akým je predkladaný úvod do problematiky, nie je možné postihnúť všetky aspekty matematického modelovania. Okrem nutných matematických zručností treba mať aj rozvinutú fyzikálnu intuíciu a cit pre vystihnutie podstaty modelu. Práve pochopenie, čo je v modeli podstatné a čo je možné zanedbať, nám umožňuje konštruovať rozumné matematické modely, ktoré sa budú približovať k pozorovanej realite. Väčšina fyzikálnych, a nielen fyzikálnych modelov, má v sebe obsiahnutý fenomenologický aspekt v takom zmysle, že cieľom úspešného modelovania má byť taký model, ktorý je schopný postihnúť a



Obr. 1.1: Oblasť s naznačenými vektormi prúdenia kvapaliny zvnútra a do vnútra oblasti.

vysvetliť fyzikálne pozorované javy - fenomény. Druhá funkcia modelovania je jeho predikčná schopnosť, teda možnosť predpovedať dosiaľ nepozorované javy, ktoré môžu potencionálne vznikáť vo fyzikálnej realite. Nie je výnimkou, že práve na základe toho, aké javy model úspešne zahŕňa a na druhej strane, ktoré javy nepostihuje, sa rozhodujeme medzi tým či oným modelom. Inak povedané, vo všeobecnosti nejestvuje univerzálny matematický model. Môžu existovať len viac či menej dobré priblíženia reality a zdôrazňujeme, že ide o priblíženia z rôznych uhlov pohľadu.

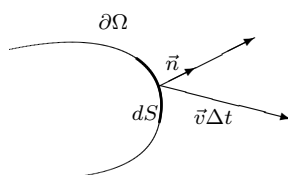
1.1 Zákon zachovania hmoty

Medzi základné fyzikálne zákony sa bezpochyby radí zákon zachovania hmoty, ktorý nám hovorí, že celkové množstvo látky (hmoty) je nemenné - konštantné.¹ V tejto časti sa pokúsime matematicky sformulovať zákon zachovania hmoty. Ako uvidíme neskôr, matematická formulácia vedie na parciálnu diferenciálnu rovnicu. Z dôvodu geometrickej názornosti budeme zákon skúmať v zjednodušenom prípade rovinatej geometrie. Spôsob prenesenia výsledkov do trojrozmernej geometrie sa ukáže ako priamočiary. Obmedzíme sa preto na Euklidovský priestor \mathbb{R}^n , $n = 2$.

Predpokladajme, že čiastočky hmoty sú unášané v rovine pozdĺž vektorového poľa \vec{v} . Pod pojmom vektorové pole rozumieme vektorovú funkciu $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ktorá každému bodu priestoru $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ priradí smer (vektor) $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})^T$, v ktorom sa má pohybovať častica hmoty nachádzajúca sa na počiatku pohybu v bode \vec{x} (pozri Obr. 1.1).

Na obrázku je súčasne zachytená aj oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, do ktorej istá časť hmoty „vteká“ istá časť „vyteká“. Označme:

¹Michail V. Lomonosov (1711-1765) ruský encyklopedista. Filozof, básnik, prírodovedec. Zakladateľ ruskej fyzikálnej chémie. Astronóm, objavil atmosféru Venuše. Vyslovil a dokázal fundamentálny zákon zachovania hmoty.



Obr. 1.2: Časť hranice s výtokom kvapaliny v smere vektora rýchlosti. Projekcia vektora dráhy kvapaliny za elementárny čas na vektor vonkajšej normály.

- $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ - zadané vektorové pole $\vec{v}(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ v bode \vec{x} a čase $t \geq 0$,
- $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ - hľadaná hustota hmoty v bode \vec{x} a čase $t \geq 0$.

Naším cieľom je vyjadriť zákonitosť, podľa ktorej je možné určiť hustotu ρ v ľubovoľnom bode \vec{x} a čase $t > 0$. Verbálne vyjadrenie zákona zachovania hmoty je, že množstvo hmoty, ktoré do oblasti Ω vtečie cez hranicu $\partial\Omega$, zmenšené o hmotu, ktorá vytečie cez hranicu za čas Δt , sa musí v konečnom dôsledku rovnať zmene množstva hmoty vo vnútri oblasti Ω za čas Δt . Pozrime sa bližšie na niektorý bod \vec{x} hranice $\partial\Omega$. V tomto bode je zadaný vektor rýchlosti $\vec{v}(\vec{x}, t)$ a to znamená, že za malý čas Δt sa čiastočka hmoty z bodu \vec{x} presunie do bodu $\vec{x} + \vec{v}\Delta t$ (pozri Obr. 1.2).

Objem hmoty, ktorý vytečie za čas Δt cez plôšku dS , je potom zrejme objem orezaného valca s podstavou dS a výškou rovnajúcou sa kolmému priemetu vektora $\vec{v}\Delta t$ na vektor normály \vec{n} k plôške dS v bode \vec{x} . Zrejme veľkosť tohto priemetu je daná vzťahom $(\vec{v}, \vec{n})\Delta t$, kde (\vec{v}, \vec{n}) je Euklidovský skalárny súčin vektora rýchlosti a jednotkového vektora normály, t. j.

$$(\vec{v}, \vec{n}) = \sum_{i=1}^n v_i n_i.$$

Potom celkové množstvo hmoty (hmota = hustota \times objem) vytečenej, resp. vtečenej cez plôšku dS sa potom rovná

$$\rho \cdot (\vec{v}, \vec{n}) \Delta t dS.$$

Celková bilancia Q_1 (výtok - vtok) prestupu látky hranicou $\partial\Omega$ je potom integrál cez celú hranicu $\partial\Omega$, t. j.

$$Q_1 = \int_{\partial\Omega} \rho \cdot (\vec{v}, \vec{n}) \Delta t dS = \Delta t \int_{\partial\Omega} \rho \cdot (\vec{v}, \vec{n}) dS.$$

Hodnota Q_1 preto reprezentuje rozdiel medzi vtečenou a vytečenou látkou cez hranicu $\partial\Omega$. Poznamenajme, že kladné znamienko Q_1 nám hovorí, že viac látky z oblasti vytečie ako do nej vtečie.

Na základe zákona zachovania hmoty musí byť množstvo hmoty Q_1 kompenzované zmenou množstva hmoty Q_2 vo vnútri oblasti Ω za čas Δt . Keďže množstvo hmoty v oblasti Ω je rovné $\int_{\Omega} \rho \, dx$ (hmota=hustota \times objem), potom sa táto zmena dá vyjadriť ako

$$Q_2 = \frac{d}{dt}(\text{hmota})\Delta t = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \, dx \right) \Delta t.$$

Kladné znamienko hodnoty Q_2 znamená, že za čas Δt došlo k zvýšeniu množstva hmoty v Ω . S ohľadom na diskutovaný zmysel znamienok Q_1 a Q_2 je potom zákon zachovania hmoty vyjadrený rovnosťou

$$Q_1 + Q_2 = 0.$$

Túto rovnosť môžeme však ďalej upraviť a tak dostaneme

$$\Delta t \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dx + \Delta t \int_{\partial\Omega} \rho \cdot (\vec{v}, \vec{n}) \, dS = 0$$

a teda použijúc pravidlo o derivovaní parametrického integrálu získavame

$$\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx + \Delta t \int_{\partial\Omega} \rho \cdot (\vec{v}, \vec{n}) \, dS = 0. \quad (1.1)$$

Čomu je však rovný druhý integrál po hranici $\partial\Omega$? V Kapitole 5 sa s použitím Greenovho vzorca integrovania *per partes* pre funkcie viac premenných nakoniec podarí odvodiť rovnosť

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w} \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n w_i n_i \, dS = \int_{\partial\Omega} (\vec{w}, \vec{n}) \, dS,$$

ktorá platí pre každú hladkú vektorovú funkciu $\vec{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (pozri vzorec (5.17)). V našom prípade zvolíme $\vec{w} = \rho \vec{v}$. Potom dostávame

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \, dx = \int_{\partial\Omega} \rho (\vec{v}, \vec{n}) \, dS,$$

kde pripomíname, že div je operátor divergencie definovaný ako $\operatorname{div} \vec{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$. Potom sa vzťah (1.1) po vynásobení $(\Delta t)^{-1}$ redukuje na rovnicu

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \, dx = 0$$

teda

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \right) \, dx = 0. \quad (1.2)$$

Na tomto mieste zdôraznime, že oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bola zvolená ľubovoľne. Teraz si uvedomme, že ak spojitá funkcia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovuje rovnosti $\int_{\Omega} \phi \, dx = 0$ pre ľubovoľnú oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tak nevyhnutne $\phi = 0$. Rozmyslite si prečo! Zo vzťahu (1.2) vyplýva, že hľadaná funkcia hustoty $\varrho = \varrho(\vec{x}, t)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (1.3)$$

Pripomeňme, že $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ je zadané vektorové pole, ktoré môže závisieť aj od času $t > 0$. Poznamenajme, že rovnica (1.3) môže byť „po súradniciach“ zapísaná v tvare

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho v_i) = 0. \quad (1.4)$$

Táto rovnica je vskutku parciálna diferenciálna rovnica, pričom neznámou je funkcia hustoty $\varrho = \varrho(x_1, \dots, x_n, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Rovnica (1.3) sa niekedy nazýva aj rovnica kontinuity.

Poznámka 1.1. Rovnica (1.3) resp. (1.4) riadi správanie sa vo všeobecnosti stlačiteľnej látky (napr. plyn). Ak však uvažujeme iba nestlačiteľné látky (napr. voda), tak nevyhnutne hustota je konštantná a teda $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ a $\frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho v_i) = \varrho \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$. Matematické vyjadrenie zákona o zachovaní hmoty (1.4) potom predstavuje určité obmedzenie na vôľu výberu vektorového poľa \vec{v} . Konkrétne pre nestlačiteľné látky dostávame, že vektorové pole \vec{v} , ktoré unáša danú látku vyhovuje rovnici

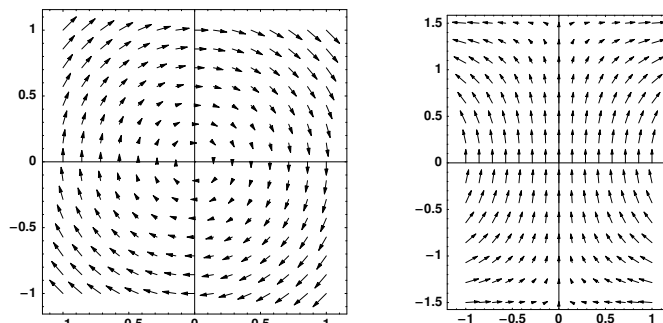
$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (1.5)$$

Príkladmi vektorových polí, ktoré vyhovujú rovnici (1.5) a tým pádom môžu potenciálne slúžiť ako vektorové polia unášajúce nestlačiteľné látky, sú napríklad

- $\vec{v} = (x_2, -x_1)^T$ pozri Obr. 1.3 vľavo,
- $\vec{v} = (x_1 \sin(x_2), \cos(x_2))^T$ pozri Obr. 1.3 vpravo

a vo všeobecnosti ľubovoľné vektorové pole \vec{v} tvare $\vec{v}(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^T$, kde $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je nejaká skalárna, dvakrát spojitá diferencovateľná funkcia.

Poznámka 1.2. Geometrický zmysel divergencie. Na základe predošlej poznámky je jasné, že jedinými poľami, ktoré môžu byť vektorovými poľami prenosu nestlačiteľných látok sú také, ktoré vyhovujú rovnici (1.5). Keďže nestlačiteľná látka nemôže nikde vzniknúť a ani zaniknúť, musí byť prenosové pole \vec{v} také, že nikde nemá body vzniku (žriedla) a ani body zániku. Také pole nazývame nežriedlové pole alebo aj solenoidálne pole. A teda, ak divergencia vektorového poľa je nulová v nejakej podoblasti, tak v nej toto pole nemá ani body vzniku, ani body zániku. Naopak, jedinými kandidátmi na žriedla vektorového poľa sú práve tie body, v ktorých je jeho divergencia nenulová. Odtiaľ je aj zrejмый význam pomenovania tohto operátora ako divergencia, teda výtok.



Obr. 1.3: Príklady vektorových polí.

1.2 Rovnica vedenia tepla

Cieľom tejto časti je matematicky objasniť a popísať fyzikálny jav vedenia tepla. Uvažujme o nekonečnej rovinatej doske, ktorú stotožníme s Euklidovským priestorom \mathbb{R}^n , $n = 2$. Zovšeobecnenie do dimenzie $n = 3$ je opäť priamočiare. Každému bodu priestoru \mathbb{R}^n a času $t \geq 0$ zodpovedá nejaká hodnota teploty $u(\vec{x}, t)$ v tomto mieste. Naša úloha spočíva v nájdení matematickej rovnice, ktorá by opisovala vývoj rozloženia teploty v priestore a čase. Podobne ako v predošlej kapitole východiskom odvodzovania bude opäť bilančná analýza. V tomto prípade budeme bilancovať tepelnú energiu systému.

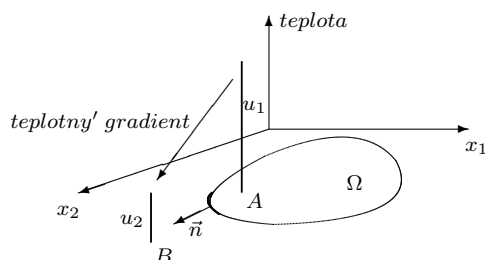
Pripomenieme jeden fyzikálny princíp, na základe ktorého tepelný tok prestupuje z miest s vyššou teplotou do miest s nižšou teplotou. Presnejšie, hustota tepelného toku w z bodu A do bodu B (t. j. množstvo tepla za jednotku času) je úmerné rozdielu teplôt $u_1 - u_2$ v bodoch A resp. B . Zrejme úlohu rozdielu (gradientu) teplôt v smere $\vec{n} = B - A$ bude zohrávať smerová derivácia $\frac{du}{d\vec{n}} = (\nabla u, \vec{n})$. Teda pre hustotu tepelného toku w dostávame zákonitosť

$$w = -k \frac{du}{d\vec{n}}. \quad (1.6)$$

Konštanta $k > 0$ je konštantou tepelnej vodivosti materiálu a záporné znamienko pred k signalizuje spomenutý fakt, že teplo má tendenciu prestupovať z miest teplejších do miest chladnejších. Zákon (1.6) sa nazýva Fourierov zákon podľa mena svojho objaviteľa.²

Uvažujme nejakú oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s hladkou hranicou $\partial\Omega$ (pozri Obr. 1.4). Skúmame prestup tepla časťou hranice dS , ktorej zodpovedá jednotkový

²Jean Baptiste Fourier (1768-1830) fr. matematik. Zaoberal sa fyzikou tepelnej vodivosti (Fourierov zákon). Venoval sa aj teórii funkcií, študoval integrálne transformácie (Fourierova transformácia), s čím úzko súvisí aj možnosť rozvoja funkcií do tzv. Fourierovho radu.



Obr. 1.4: Zobrazenie teplotného gradientu medzi teplejším miestom vo vnútri oblasti a chladnejším bodom mimo oblasti.

normálový vektor \vec{n} k hranici $\partial\Omega$. Označme Q_1 množstvo tepla, ktoré z oblasti prúdi von cez hranicu za čas Δt zmenšené o teplo, ktoré do oblasti prúdi dnu cez hranicu. Potom Q_1 je vlastne súčtom (integrálom) jednotlivých vtečení resp. vytečení cez $\partial\Omega$, t. j.

$$Q_1 = \int_{\partial\Omega} w \Delta t \, dS = \Delta t \int_{\partial\Omega} w \, dS.$$

Na základe Fourierovho zákona (1.6) napokon dostávame

$$Q_1 = -\Delta t \int_{\partial\Omega} k \frac{du}{d\vec{n}} \, dS. \quad (1.7)$$

Poznamenajme, že kladné znamienko Q_1 nám signalizuje, že viac tepla z oblasti vyteklo, ako do nej vteklo.

Teraz sa bližšie venujme bilancii tepelných zmien vo vnútri oblasti Ω . Označme Q_2 množstvo tepla potrebného na zmenu teploty o Δu za čas Δt . Zrejme pre malé hodnoty $\Delta \ll 1$ bude platiť $\Delta u / \Delta t \approx \frac{\partial u}{\partial t}$ a teda $\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$. Ak označíme

- $\rho > 0$ - hustotu látky a
- $c > 0$ - tepelnú kapacitu látky, t. j. množstvo tepla potrebného na zahriatie 1kg látky o jeden stupeň Kelvina,

tak objem látky Δx (a teda množstvo hmoty $\rho \Delta x$) potrebuje na zahriatie o Δu stupňov množstvo tepla rovnajúce sa $\Delta Q = c \Delta u \rho \Delta x \approx c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \Delta x$. Preto celkové množstvo tepla bude integrál z funkcie ΔQ cez celú oblasť Ω , t. j.

$$Q_2 = \int_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \, dx = \Delta t \int_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dx. \quad (1.8)$$

Celková tepelná energia spotrebovaná za čas Δt na prestup tepla hranicou teda Q_1 , a na zahriatie vnútra oblasti Q_2 je potom prirodzene ich súčtom

$Q_1 + Q_2$. Táto spotrebovaná tepelná energia sa však musí vyrovnat' (vybilancovať) s dodanou energiou vonkajších zdrojov Q_3 , t. j.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3. \quad (1.9)$$

Ak označíme

- $f = f(\vec{x}, t)$ - hustotu tepelného zdroja, t. j. množstvo dodaného tepla v bode \vec{x} a čase $t > 0$ za jednotku času,

tak

$$Q_3 = \int_{\Omega} f(\vec{x}, t) \Delta t dx = \Delta t \int_{\Omega} f(\vec{x}, t) dx. \quad (1.10)$$

Sumarizujme získané vzťahy (1.8)-(1.10) a dostaneme, že musí byť splnená rovnosť

$$-\Delta t \int_{\partial\Omega} k \frac{du}{d\vec{n}} dS + \Delta t \int_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx = \Delta t \int_{\Omega} f(\vec{x}, t) dx. \quad (1.11)$$

Podobne ako v predošlej kapitole využijeme dôsledok Greenovho vzorca na určenie integrálu cez hranicu. Na základe vzorca (5.17) platí

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n w_i n_i dS = \int_{\partial\Omega} (\vec{w}, \vec{n}) dS,$$

pre každú vektorovú funkciu $\vec{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. V našom prípade zvolíme $\vec{w} = k\nabla u$. Potom pre hladkú funkciu teploty u platí: $(\vec{w}, \vec{n}) = k(\nabla u, \vec{n}) = k \frac{du}{d\vec{n}}$ a teda

$$\int_{\partial\Omega} k \frac{du}{d\vec{n}} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} (k\nabla u) dx.$$

Po vynásobení s $(\Delta t)^{-1}$ sa rovnosť (1.11) redukuje na rovnicu

$$\int_{\Omega} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k\nabla u) - f(\vec{x}, t) \right) dx = 0. \quad (1.12)$$

Nakoniec zdôraznime, že oblasť Ω bola ľubovoľná a preto ten istý argument ako v predošlej časti nám umožní dedukovať, že integrovaná funkcia v (1.12) musí byť nevyhnutne identicky nulová. To je ekvivalentné tvrdeniu, že funkcia rozloženia teploty $u = u(\vec{x}, t)$ musí vyhovovať parciálnej diferenciálnej rovnici

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k\nabla u) = f(\vec{x}, t), \quad (1.13)$$

ktorá sa nazýva rovnica vedenia tepla.

Poznámka 1.3. Ak je koeficient $k > 0$ konštanta, tak $\operatorname{div}(k\nabla u) = k \operatorname{div}(\nabla u) = k \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = k \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = k \Delta u$, kde Δu je Laplaceov operátor. Potom rovnica vedenia tepla sa redukuje na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \tilde{f}(\vec{x}, t), \quad (1.14)$$

kde $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ a $\tilde{f} = \frac{f}{c\rho}$.

Poznámka 1.4. Niekedy je užitočné uvažovať o jednorozmernom zjednodušení rovinatej geometrie. Namiesto rovinatej dosky s premennými polohy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ budeme uvažovať jednorozmernú tyč s premennou polohy $x \in \mathbb{R}$. Takúto tyč je možné stotožniť aj s doskou, ktorej jeden rozmer y je zanedbateľne malý a preto v smere y nedochádza k prestupu tepla, teda $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Rovnica vedenia tepla sa potom redukuje na parciálnu diferenciálnu rovnicu s jednou priestorovou $x \in \mathbb{R}$ a časovou $t > 0$ premennou

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad (1.15)$$

resp. ak $k > 0$ je konštantná, na rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f}(x, t). \quad (1.16)$$

Podrobnejšie sa o riešení týchto rovníc vedenia tepla zmienime v Kapitole 4.

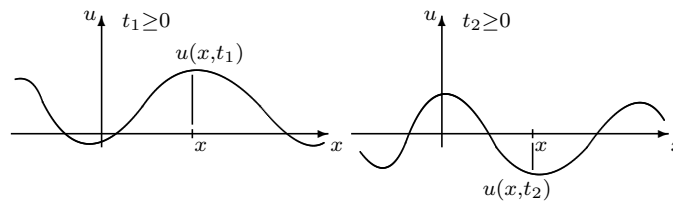
1.3 Rovnica priečneho kmitania struny

V tejto časti naznačíme odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorá opisuje priečne kmitanie struny. Presnejšie, nájdeme rovnicu, ktorá vystihuje správanie sa výchylky $u = u(x, t)$ kmitajúcej struny od rovnovážnej polohy $u = 0$ (pozri Obr. 1.5). Pôjde nám skôr o intuitívne odvodenie a preto je potrebné poznamenať, že rigorózne odvodenie sa dá nájsť v rôznych učebniciach fyziky, napríklad v Arseninovej knihe [1].

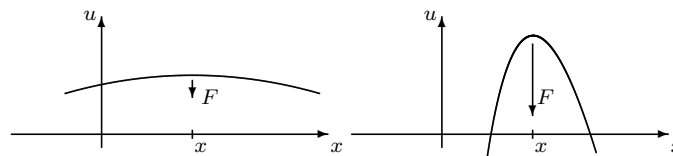
Východiskom pre odvodenie pohybovej rovnice bude tretí Newtonov zákon, ktorý nám hovorí, že zrýchlenie a pohybujúceho sa bodu je proporcionálne sile F , ktorá na bod pôsobí.³ Presnejšie,

$$m \cdot a = F, \quad (1.17)$$

³sir Issac Newton (1643-1727) brit. matematik, fyzik a astronóm. Jeden z posledných polyhistorov tohto sveta. Výrazne obohatil matematiku (infinitesimálny počet), mechaniku (pohybové rovnice), astronómiu (nebeská mechanika a teória gravitácie). Hlavné dielo: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.



Obr. 1.5: Kmitanie struny.



Obr. 1.6: Pôsobenie sily pružnosti na vychýlenú strunu.

kde m je hmotnosť bodu. Pripomeňme, že pre rýchlosť v a zrýchlenie a pohybujúceho sa bodu, ktorý je opísaný polohou $u = u(t)$ bodu v čase t , platí

$$v = \frac{du}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2}. \quad (1.18)$$

Zdôraznime, že v našom probléme kmitania struny sa nejedná o priestorovo oddelené kmitanie samostatných bodov. V danom časovom okamihu $t \geq 0$ pôsobí na bod s priestorovou súradnicou x sila F , ktorá nezávisí od výchylky $u(x, t)$ v danom bode x , ale len od vzájomnej polohy výchyliek $u(x, t)$ a $u(x \pm \Delta x, t)$ v bode x a v susedných bodoch $x \pm \Delta x$. Vysvetlíme si to pomocou Obr. 1.6.

Zrejme sila F pôsobiaca na bod s priestorovou súradnicou x bude proporcionálna krivosti struny v danom bode podľa pravidla: čím väčšia je krivosť, tým väčšia bude pôsobiaca sila. Pre malé deformácie struny, t. j. pre malé hodnoty výchylky u , bude krivosť krivky - funkcie $x \mapsto u(x, t)$ proporcionálna druhej derivácii $\frac{d^2u}{dx^2}$. Rozmyslite si prečo! Keďže funkcia $u = u(x, t)$ je funkciou dvoch premenných, musíme použiť parciálnu deriváciu, teda

$$F = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.19)$$

kde $k > 0$ je konštanta úmernosti. Kladné znamienko pred k je v súlade s realitou, pretože napr. druhá derivácia konkávnej funkcie je záporná a

preto sila pôsobí smerom nadol k rovnovážnej polohe (pozri Obr. 1.6). Nakoniec, ak použijeme tretí Newtonov zákon (1.17) dostaneme, že zrýchlenie pohybu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ je proporcionálne sile, t. j. druhej derivácii $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Zo vzťahov (1.18) a (1.19) dostávame tak parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.20)$$

kde $\kappa > 0$ je kladná konštanta. Rovnica (1.20) sa nazýva Kirchhoffova rovnica alebo rovnica priečných kmitaní struny.

1.4 Black – Scholesov model oceňovania derivátov akcií

V tejto časti naznačíme spôsob a hlavné myšlienky odvodenia matematického modelu známeho pod názvom Black – Scholesova rovnica⁴, ktorá opisuje časový vývoj ceny derivátu akcie na finančnom trhu. V tomto prípade sa teda už nepôjde o rigorózný fyzikálny model, ale o aplikáciu matematického modelovania v analýze finančných trhov. Ako sa ukáže neskôr, výsledný model je parciálnou diferenciálnou rovnicou. Zároveň zdôraznime, že na tomto mieste nemáme dostatok priestoru, aby sme vysvetlili všetky prostriedky, ktoré sú potrebné na dôkladné odvodenie. Konkrétne máme na mysli teóriu stochastických procesov a stochastické diferenciálne rovnice. Objem týchto samotných teórií by určite s rezervou prevýšil kapacitu tohto textu. Sústreďme sa preto iba na hlavné body odvodenia a na intuitívne pochopenie pojmu náhodný proces a na základy stochastického diferenciálneho počtu.

Vysvetlime si najskôr niekoľko užitočných pojmov z teórie finančných trhov európska Call opcia alebo aj kúpna opcia je kontrakt, v ktorom jedna strana získava právo kúpiť akciu v presne určenom expiračnom čase $t = T$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu E . Zdôraznime, že daná strana získava právo, ale nie povinnosť kúpiť akciu. Toto právo má teda samo o sebe istú hodnotu a preto treba zaň v čase uzavretia kontraktu $t = 0$ zaplatiť istú prémie V . Pre obe strany, t. j. pre vypisovateľa opcie ako aj držiteľa opcie je zaujímavé vedieť, aká je optimálna hodnota prémie tak, aby ani jedna zo strán nebola znevýhodnená. Označme

- S - cenu akcie,
- V_{ec} - hodnotu európskej kúpnej opcie,
- T - expiračnú dobu, t. j. termín vypršania opcie,

⁴F. Black a M. Scholes uverejnili odvodenie svojho modelu na oceňovanie derivátov akcií v časopise Journal of Political Economy v roku 1973. Ich práca bola ocenená cenou Švédskej banky za ekonómiu na pamiatku A. Nobela (Nobelovou cenou za ekonómiu).

- E - expiračnú cenu, t. j. vopred dohodnutú cenu akcie.

Časovú premennú označíme t , pričom $t \in [0, T]$. Úloha spočíva v nájdení matematickej rovnice, ktorá by opisovala vzťah pre funkciu ceny opcie $V = V(S, t)$ na akciu v cene S a čase t . Prirodzene potom cena opcie - prémia bude rovná $V_{ec} = V(S, 0)$.

Odvodenie rovnice pozostáva z troch krokov. V prvom z nich určíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa vývoj samotnej ceny akcie S . V druhom kroku odvodíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa funkcia $V = V(S, t)$ od náhodne sa meniacej ceny akcie S . Funkciu V vo všeobecnosti hovoríme finančný derivát. V treťom kroku zostavíme tzv. bezrizikové portfólio vhodnou kombináciou (proporciou) medzi množstvom akcií a opcií na danú akciu.

◇ 1. krok - Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie. Na modelovanie náhodného vývoja ceny akcie ako funkcie času $S = S(t)$ sa používa stochastická diferenciálna rovnica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad (1.21)$$

kde dS znamená zmenu ceny akcie za časový okamih dt , μ je očakávaná návratnosť akcie, σ je volatilita časového vývoja akcie. Znakom dw sme označili zmenu tzv. Wienerovho procesu.⁵ Štandardný Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín taký, že $w(0) = 0$, pričom prírastky $dw(t) = w(t + dt) - w(t)$ sú normálne rozdelené náhodne premenné a navzájom nekorelované v čase, pričom stredná hodnota je nulová, t. j. $E(dw) = 0$ a variancia je lineárnou funkciou času, t. j. $\text{var}(dw) = dt$. Voľne povedané $dw = \Phi \sqrt{dt}$, kde $\Phi \sim N(0, 1)$ je náhodná premenná s normalizovaným normálnym rozdelením. Dôvod, prečo sa vo výraze pre dw objavuje odmocnina z časového prírastku dt , je dôsledkom lineárnej závislosti variance $\text{var}(dw)$ a dt . Tvrdenie, že Φ je náhodná premenná s normálnym rozdelením je založené na využití tzv. centrálnej limitnej vety z matematickej štatistiky.

Poznamenajme, že stochastická rovnica (1.21) sa dá prepísať aj do tvaru

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw,$$

pričom z tohto zápisu je jasnejšie, že v časovej analýze je podstatnou informáciou iba relatívna zmena $\frac{dS}{S}$ a nie absolútna zmena ceny dS . Rozmyslite si prečo! Nakoniec poznamenajme, že ak volatilita $\sigma = 0$, tak vývoj ceny $S = S(t)$ je úplne deterministický a keďže $dS = \mu S dt$ dostávame integráciou $S(t) = S(0)e^{\mu t}$, čiže cena by narastala exponenciálne podľa očakávanej návratnosti akcie μ . Teraz, ak volatilita $\sigma \neq 0$, tak na túto očakávanú

⁵Norbert Wiener (1894-1964) amer. matematik. Pracoval v oblasti matematickej analýzy, teórii pravdepodobnosti a teórii informácie. Založil vedný odbor kybernetika.

exponenciálnu závislosť sa moduluje náhodný šum - vopred nepredvídateľné výchyľky ceny smerom nahor alebo nadol. Grafické znázornenie náhodného procesu S a podrobnejšiu diskusiu o náhodných procesoch je možné nájsť v učebnici [16].

◇ 2. krok - *Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj funkcie - derivátu akcie*. Úloha je jednoducho formulovateľná. Ak funkcia $V = V(S, t)$ je nejaká hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná S je sama o sebe funkciou času $S = S(t)$ a vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (1.21), tak otázka znie: akú stochastickú rovnicu bude spĺňať funkcia od premennej S a času t , t. j. derivát $V = V(S, t)$. Odpoveď na túto otázku nám dáva dôležitý výsledok z teórie náhodných procesov - Itôova lema.

Tvrdenie 1.1. *Itôova lema. Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice $dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$, kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál $df = f(x + dx, t + dt) - f(x, t)$ funkcie f je daný vzťahom*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt, \quad (1.22)$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw. \quad (1.23)$$

Itôovu lemu možno intuitívne dokázať rozvinutím funkcie $f = f(x, t)$ do Taylorovho radu stupňa 2 a združením koeficientov s diferenciálmi dx a dt . Poznamenajme, že práve vďaka odmocnine \sqrt{dt} v definícii Wienerovho procesu niektoré členy rozvoja budú obsahovať vyššie mocniny dt , napr. $(dt)^{3/2}$, $(dt)^2$. Podrobnejší náčrt dôkazu Itôovej lemy sa dá nájsť v učebnici [16].

V našom prípade premenná S vyhovuje stochastickej rovnici (1.21), t. j. $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ a teda $\mu(S, t) = \mu S$, $\sigma(S, t) = \sigma S$. Na základe Itôovej lemy cena derivátu akcie, teda funkcia $V(S, t)$ náhodného procesu S bude vyhovovať stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \quad (1.24)$$

◇ 3. krok - *Kombinácia náhodných procesov*. Toto je kľúčový krok pri odvodení Black – Scholesovej rovnice. V tomto kroku budeme simulovať prácu zaisťovateľa, teda človeka, ktorý rozhoduje o skladbe portfólia akcií a opcií na

dané akcie. Pripomeňme, že oba náhodné procesy, t. j. cena akcie S ako i cena opcie na akciu V vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad (1.25)$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \quad (1.26)$$

Cieľom zaisťovateľa je skombinovať svoje portfólio P z akcií a opcií tak, aby minimalizoval svoje riziko. Tomu sa hovorí averzia k riziku. Zrejme jediný rizikový člen je v oboch rovniciach reprezentovaný nepredvídateľným členom dw náhodného procesu. V každom časovom okamihu sa teda zaisťovateľ rozhoduje skombinovať opcie v cene V a akcie v cene S podľa určitého pomeru, nazvime ho δ . To znamená, že jeho portfólio P bude dané vzťahom

$$P = V + \delta S,$$

t. j. na jednu jednotku opcie prípadne δ jednotiek akcií. Sčítanie rovnice (1.25) s δ násobkom rovnice (1.26) nám dáva stochastickú rovnicu pre portfólio P ,

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \delta \sigma S \right) dw.$$

Majúc na pamäti princíp averzie k riziku, Black a Scholes stanovili pomer δ tak, aby koeficient pred náhodným členom dw bol anulovaný. To sa podarí vtedy, ak volíme

$$\delta = - \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (1.27)$$

Potom pre cenu portfólia dostávame už diferenciálnu rovnicu (nie stochastickú)

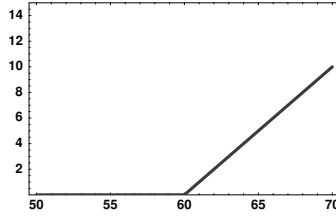
$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (1.28)$$

Na záver poznamenajme, že cena portfólia musí byť presne taká istá, akú by sme dosiahli uložením do banky so spojitým úrokovaním r . Inak by vznikol priestor pre arbitráž, t. j. bezrizikový zisk, ktorý síce môže v realite nastať, ale trvá len veľmi malú chvíľu. Pre spojitú úrokovanie istiny P platí zrejma závislosť $\frac{dP}{dt} = rP$, t. j. $dP = rP dt$. Dosadením vzťahu pre dP do rovnice (1.28) a po skrátaní výrazom dt dostávame

$$rP = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Keďže $P = V + \delta S = V - S \frac{\partial V}{\partial S}$ nakoniec dostávame rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1.29)$$



Obr. 1.7: Koncová podmienka európskej kúpnej Call opcie.

ktorá je známa ako Black – Scholesova parciálna diferenciálna rovnica na oceňovanie ceny derivátov akcií. Odvodenie tejto rovnice bolo prvýkrát uvedené v prácach Blacka a Scholesa [5] a Mertona. Veľmi dobrá referencia je aj novší článok Dewynne a kol. [6], kde sa čitateľ môže oboznámiť s rôznymi aspektmi oceňovania nielen európskeho typu opcií, ale aj tzv. amerických opcií.

Uved'me ešte jedno užitočné zovšeobecnenie Black – Scholesovej rovnice pre prípad akcie, ktorá vypláca spojité dividendy. V tomto prípade držaním akcie v hodnote S získame za čas dt dividendový podiel $qSdt$, kde $q > 0$ je miera vyplácania dividend (percentá p.a.). Teda zmena nášho portfólia pozostávajúca z jednej opcie a δ akcií bude mať za čas dt hodnotu

$$dP = dV + \delta dS + \delta qSdt.$$

Sledujúc horeuvedený postup odvodu Black – Scholesovej rovnice v prípade nevyplácania dividend nakoniec prídeme k rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1.30)$$

V prípade európskej kúpnej opcie sa k rovnici (1.29) resp. (1.30) dopĺňa koncová podmienka v čase expirácie T . Jej zmysel je v tom, že ak aktuálna cena S akcie v čase T prekročí hodnotu E , na ktorú bol uzavretý opčný obchod v čase $t = 0$, tak cena opcie - prémie (keby sa za ňu platilo v čase T) je zrejme rozdiel medzi aktuálnou cenou S a dohodnutou cenou E , t. j. $S - E$. Na druhej strane, pokiaľ aktuálna cena akcie neprekročí dohodnutú cenu E , tak opcia nemá žiadnu hodnotu, pretože ju vôbec neuplatníme. To znamená, že v čase $t = T$ je vyčíslenie ceny opcie jednoduché a je dané ako funkcia (pozri Obr. 1.7).

$$\bar{V}(S, T) = \max(S - E, 0)$$

Úlohou analýzy Black – Scholesovej rovnice je poskytnúť explicitný vzorec riešenia $V = V(S, t)$ pre ľubovoľný čas $t \in [0, T]$. Konkrétne nás zaujíma cena opcie na začiatku $t = 0$, t. j. v dobe uzatvárania opčného obchodu. Tento vzorec riešenia rovnice (1.29) odvodíme v Kapitole 4.1.6.

Kapitola 2

Klasifikácia a rád parciálnych diferenciálnych rovníc

Cieľom kapitoly je objasniť pojem parciálnej diferenciálnej rovnice. Jednoducho povedané, parciálna diferenciálna rovnica je funkcionálna rovnica, v ktorej okrem hľadanej funkcie viac premenných vystupujú aj jej parciálne derivácie rôznych rádov a podľa rôznych premenných. Na rozdiel od obyčajných diferenciálnych rovníc pripúšťame funkcie viac premenných ako aj vystupovanie parciálnych derivácií vo vzťahu rovnosti. Uvedme jednoduché príklady parciálnych diferenciálnych rovníc. Všetky uvádzané príklady boli uvedené v predošlej kapitole ako modely fyzikálnych javov a finančných derivátových trhov.

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- rovnica priečných kmitov struny (1.20). Neznámou je funkcia dvoch premenných $u = u(x, t)$,

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$

- rovnica zákona zachovania hmoty (1.4). Neznámou je funkcia štyroch premenných $\rho = \rho(\vec{x}, t)$,

- $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \tilde{f}(\vec{x}, t)$

- rovnica vedenia tepla (1.14). Neznámou je funkcia $n + 1$ premenných $u = u(\vec{x}, t) = u(x_1, \dots, x_n, t)$,

- $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$

- Black – Scholesova rovnica (1.29) na oceňovanie ceny derivátov akcií. Neznámou je funkcia $V = V(S, t)$ dvoch premenných S a t .

Skôr, ako pristúpime ku klasifikácii parciálnych diferenciálnych rovníc, zavedme užitočné zjednodušenie zápisov parciálnych derivácií pomocou

diferenciálnych symbolov. Nech $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je k -krát diferencovateľná funkcia. Označme

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- multiindex celých čísel $\alpha_i \geq 0$,
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
- dĺžku multiindexu α ,
- $D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$
- parciálnu deriváciu funkcie u podľa multiindexu α , kde $|\alpha| \leq k$.

Príkladom môžu byť parciálne derivácie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= D^\alpha u, \text{ kde } \alpha = (2, 0), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= D^\alpha u, \text{ kde } \alpha = (1, 1), \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3^2} &= D^\alpha u, \text{ kde } \alpha = (1, 0, 2), \\ u &= D^\alpha u, \text{ kde } \alpha = (0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Definícia 2.1. Pod parciálnou diferenciálnou rovnicou rozumieme funkcionálnu rovnicu, t. j. rovnicu, v ktorej ako neznáma vystupuje funkcia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá má vo všeobecnosti tvar

$$F(x, u, D^{(1,0,\dots,0)}u, D^{(0,1,\dots,0)}u, D^{(0,0,\dots,1)}u, \dots, D^{(2,0,\dots,0)}u, \dots, D^\alpha u) = 0,$$

kde $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkcia a α je multiindex s dĺžkou nepresahujúcou číslo k , ktoré sa nazýva rád parciálnej diferenciálnej rovnice.

Uvedomme, si že všetky uvedené príklady boli parciálnymi diferenciálnymi rovnicami.

2.1 Rád lineárnej parciálnej diferenciálnej rovnice

Definícia 2.1 je už na prvý pohľad neprehľadná, pretože má ambíciu postihnúť veľmi širokú triedu parciálnych diferenciálnych rovníc. V tejto časti zúžime svoj pohľad iba na istú špeciálnu triedu parciálnych diferenciálnych rovníc, a to rovníc, v ktorých je funkcia F z Definície 2.1 lineárna, resp. afínna vo všetkých premenných, ktoré obsahujú výraz $D^\alpha u$. Takým rovniciam budeme hovoriť lineárne parciálne diferenciálne rovnice.

Definícia 2.2. Pod lineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou rozumieme rovnicu, ktorá má tvar

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$

kde $a_\alpha : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú zadané funkcie. Suma sa uvažuje cez všetky multiindexy α , ktorých dĺžka nepresiahne k . Ak pravá strana $f = 0$, tak hovoríme o homogénnej lineárnej rovnici. Rovnica má rád k , ak pre každé $x \in \Omega$ $\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha(x)| \neq 0$, t. j. ak sa vždy nájde aspoň jedna funkcia a_α , $|\alpha| = k$, taký, že $a_\alpha(x) \neq 0$.

Príklady.

1) Rovnica zákona zachovania hmoty $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$ je príkladom rovnice prvého rádu, pretože sa dá prepísať do tvaru $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$.

2) Rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f(x_1, \dots, x_n, t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV &= 0, \end{aligned}$$

sú rovnicami druhého rádu.

2.2 Rovnice prvého rádu

V tejto časti sa budeme zaoberať rovnicami prvého rádu, t. j. takými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami, v ktorých vystupujú derivácie najviac prvého rádu.

Definícia 2.3. Pod lineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu rozumieme rovnicu, ktorá má tvar

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + b(x)u(x) = f(x),$$

kde $a_i, b, f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sú zadané koeficienty také, že pre každé $x \in \Omega$ je $\sum_{i=1}^n |a_i(x)| \neq 0$.

Uvedenú charakterizáciu lineárnych rovníc rozšírime na väčšiu triedu rovníc prvého rádu, ktoré budeme nazývať kvázilineárne rovnice.

Definícia 2.4. Pod kvázilineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu rozumieme rovnicu, ktorá má tvar

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = a_{n+1}(x, u(x)), \quad (2.1)$$

kde $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n+1$, sú funkcie, ktoré vo všeobecnosti môžu závisieť na hodnote hľadanej funkcie u , nie však na jej parciálnych deriváciách.

Príklady.

Ako už bolo spomenuté, lineárna rovnica prvého rádu je napr. rovnica zákona zachovania hmoty prepísaná v tvare

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + \varrho \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Kvázilineárna rovnica prvého rádu je napríklad Burgersova rovnica opisujúca časo-priestorový vývoj hustoty stlačiteľného plynu v adiabatickom režime

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\varrho^2) = 0.$$

Skutočne, úpravou dostaneme, že Burgersova rovnica je ekvivalentná rovnici

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0,$$

čo je kvázilineárna rovnica prvého rádu.

O spôsoboch a metódach riešenia, ako i o geometrickej interpretácii parciálnych diferenciálnych rovníc prvého rádu, sa podrobnejšie zmienime v Kapitole 3.

2.3 Klasifikácia rovníc druhého rádu

Z Definície 2.2 plynie, že lineárne rovnice druhého rádu majú vo všeobecnosti tvar

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad (2.2)$$

kde $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sú zadané koeficienty.

Cieľom tejto časti je poskytnúť klasifikáciu lineárnych rovníc druhého rádu. Táto klasifikácia je založená na analýze tzv. hlavnej časti diferenciálnej rovnice (2.2), t. j. členoch rovnice, ktoré obsahujú najvyššie parciálne

derivácie, v našom prípade rádu 2. Hlavná časť rovnice (2.2) je potom výraz

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Pre každý bod $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ zostavme $n \times n$ maticu $A(x)$,

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Bez ujmy na všeobecnosti zápisu hlavnej časti môžeme predpokladať, že matica A je symetrická. Skutočne, ak by napríklad hlavná časť mala tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, tak pre hladkú funkciu u zrejme túto hlavnú časť môžeme prepísať na tvar: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ a teda $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 2$.

Každá symetrická matica A má spektrum pozostávajúce len z reálnych vlastných čísel. Označme $\lambda_i = \lambda_i(x) \in \mathbb{R}$ pre $i = 1, \dots, n$, vlastné čísla matice $A(x)$. Na základe vlastností týchto vlastných čísel klasifikujeme lineárne parciálne diferenciálne rovnice nasledovne:

Definícia 2.5.

- 1) Ak všetky vlastné čísla $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, sú nenulové a majú rovnaké znamienko, tak rovnicu (2.2) nazývame eliptická parciálna diferenciálna rovnica.
- 2) Ak všetky vlastné čísla $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, sú nenulové a ich neprázdna podmnožina má kladné znamienka a neprázdna podmnožina má záporné znamienka, tak rovnicu (2.2) nazývame hyperbolická parciálna diferenciálna rovnica.
- 3) Nech jedno z vlastných čísel λ_i je nulové a všetky ostatné vlastné čísla $\lambda_j(x)$, $j \neq i$, sú nenulové a majú rovnaké znamienko. Ak po transformácii premenných $x = Q\eta$ sa rovnica (2.2) transformuje na rovnicu s diagonálnou maticou $a = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a príslušný transformovaný koeficient $\tilde{b}_i(\eta)$ odpovedajúci derivácii prvého rádu je nenulový, tak rovnicu (2.2) nazývame parabolická parciálna diferenciálna rovnica.

Na základe tejto klasifikácie môžeme ľahko klasifikovať nasledovné rovnice druhého rádu.

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$

je eliptická rovnica,

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

t. j. rovnica priečnych kmitov struny (1.20) je hyperbolická rovnica,

- $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t),$

t. j. rovnica vedenia tepla (1.14) je parabolická rovnica,

- $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$

t. j. Black – Scholesova rovnica (1.29) je parabolická rovnica pre $S \neq 0$.

Kapitola 3

Parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu

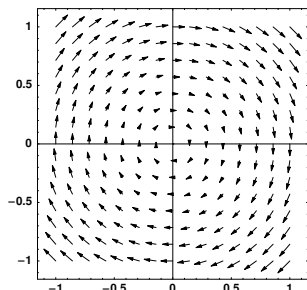
Lineárne parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu zväčša modelujú rôzne fyzikálne zákonitosti súvisiace so zákonmi zachovania. Typickým príkladom rovnice prvého rádu je rovnica zákona zachovania hmoty odvodená v Kapitole 1.1. Cieľom tejto časti je poskytnúť metódy na riešenie homogénnych ako i nehomogénnych a nelineárnych rovníc prvého rádu. Teória rovníc prvého rádu je dosť špecifická oblasť v rámci teórie parciálnych diferenciálnych rovníc. Ako neskôr nahliadneme, používané techniky (metóda charakteristík) na ich riešenie patria skôr do oblasti obyčajných diferenciálnych rovníc.

3.1 Homogénne rovnice prvého rádu

V tejto časti sa budeme zaoberať homogénnymi rovnicami prvého rádu. Na základe klasifikácie rovníc podľa rádu je lineárnou homogénnou parciálnou diferenciálnou rovnicou rovnica v tvare

$$a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (3.1)$$

kde $a_1, \dots, a_n : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú zadané spojitě diferencovateľné funkcie. Úloha spočíva v nájdení C^1 funkcie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takej, že v každom bode $x \in \Omega$ je splnená rovnosť (3.1). Homogénnosť rovnice (3.1) je vyjadrená nulovosťou pravej strany rovnice, linearita spočíva vo vlastnosti, že pokiaľ u_1, u_2 riešia (3.1), tak potom ich lineárna kombinácia $\alpha u_1 + \beta u_2$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, opäť rieši (3.1). Zdôraznime, že na základe schémy klasifikácie lineárnych rovníc by sa vo všeobecnej rovnici prvého rádu mohol



Obr. 3.1: Graf zadaného vektorového poľa.

vyskytovať aj člen obsahujúci funkciu u . Napriek tomu v tejto časti budeme uvažovať iba rovnice prvého rádu, ktoré obsahujú len hlavnú časť pozostávajúcu z prvých derivácií. Metódu ako previesť rovnicu s výrazom u na rovnicu typu (3.1) opíšeme v Kapitole 3.2.

Poznamenajme, že rovnicu (3.1) možno vyjadriť vektorovým zápisom nasledovne: označme vektorovú funkciu $\vec{a} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definovanú ako $\vec{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$. Keďže gradient ∇u je vektor $(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})^T$, tak rovnica (3.1) je vlastne rovnosť $(\nabla u(x), \vec{a}(x)) = 0$. Vektory \vec{a} a ∇u sú na seba kolmé a teda

$$\nabla u(x) \perp \vec{a}(x) \quad \text{pre každé } x \in \Omega. \quad (3.2)$$

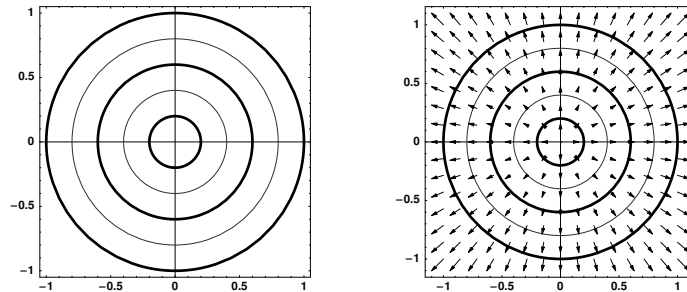
Pokúsme sa teraz vysvetliť geometrický význam rovnice (3.1), resp. (3.2).

◇ *Geometrický význam koeficientov a_1, \dots, a_n .* Zadaním koeficientov $a_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i = 1, \dots, n$, zadávame vektorovú funkciu $\vec{a} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definovanú ako $\vec{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$. Funkciu \vec{a} tiež nazývame vektorové pole v \mathbb{R}^n . Príklad vektorového poľa v rovine \mathbb{R}^2 je funkcia $\vec{a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{a}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^T$, t. j. $a_1(x_1, x_2) = x_2, a_2(x_1, x_2) = -x_1$ (pozri Obr. 3.1).

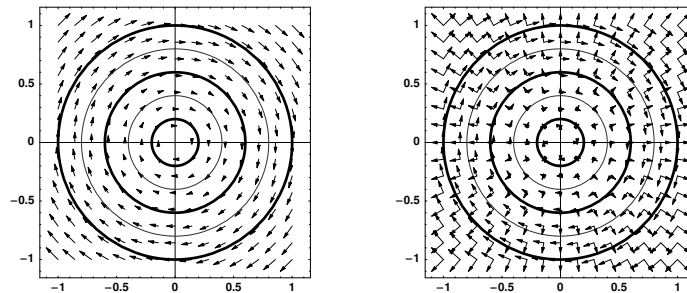
◇ *Geometrický význam gradientu funkcie.* Z analýzy funkcií viac premenných pripomeňme definíciu úroveňnej množiny funkcie. Nech $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkcia. Množinu

$$E_c = \{x \in \mathbb{R}^n, u(x) = c\} \quad (3.3)$$

nazývame úroveňná množina zodpovedajúca hodnote $c \in \mathbb{R}$. V typickom prípade je úroveňná množina E_c plocha dimenzie $n - 1$. V prípade \mathbb{R}^2 je to teda krivka, resp. zjednotenie kriviek. Ak uvažujeme príklad funkcie $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, tak úroveňné množiny $E_c, c > 0$, sú kružnice s polomerom \sqrt{c} (Obr. 3.2).



Obr. 3.2: Graf úrovnňových rovín funkcie u (vľavo). Úrovnňové roviny funkcie u a jej gradient (vpravo).



Obr. 3.3: Znáozornenie vektorového poľa dotýkajúceho sa úrovnňových rovín (vľavo). Zadané vektorové pole, úrovnňové roviny (vpravo).

Jediný (až na násobok) vektor kolmý na všetky krivky ležiace v úrovnňovej množine a ktoré prechádzajú bodom $x \in E_c$ je práve vektor gradientu $\nabla u(x)$. Preto geometricky zmysel gradientu $\nabla u(x)$ funkcie u tkvie v jeho normálnosti k úrovnňovej množine prechádzajúcej bodom x .

◇ *Geometrický význam rovnice (3.2).* Na základe predošlého výkladu je teraz už zrejmé, že geometrická rovnica (3.2) platí práve vtedy, keď vektorové pole \vec{a} je kolmé na vektor gradientu $\nabla u(x)$ a teda pole \vec{a} sa „dotýka“ úrovnňových množín E_c (pozri Obr. 3.3).

Obr. 3.3 nám ukazuje súčasné zobrazenie úrovnňových rovín (kružnice), vektorového poľa \vec{a} (dotykové pole) a gradientného poľa ∇u (pole kolmé na úrovnňové roviny).

Ako však konštruovať funkciu u tak, aby sa zadané vektorové pole dotýkalo úrovnňových rovín E_c ? Idea je založená na konštrukcii pomocného

systému obyčajných diferenciálnych rovníc v \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = \vec{a}(x(\tau)), & \tau \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.4)$$

ktorý sa nazýva charakteristický systém. Vzhľadom na to, že predpokladáme spojitú diferencovateľnosť funkcií a_i , tento systém má jediné riešenie. Bodkou $\dot{x}(\tau)$ sme označili deriváciu $\frac{dx}{d\tau}$ podľa parametra τ , ktorý parametrizuje získanú krivku riešenia $\{x(\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$. Riešenia tohto systému majú tú vlastnosť, že dotykový vektor $\dot{x}(\tau)$ pre $\tau = 0$ ku krivke $\{x(\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ je zhodný s vektorom $\vec{a}(x)$ v bode $x = x^0$. To znamená, že ak požadujeme, aby vektorové pole \vec{a} bolo dotykové k úrovňovým rovinám nejakej funkcie u , tak je nutné a stačí, aby každé riešenie (3.4) ležalo v nejakej úrovňovej rovine E_c . Inými slovami povedané, dostávame tvrdenie:

Tvrdenie 3.1. *Funkcia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je riešením rovnice (3.1) práve vtedy, keď funkcia u je konštantná na každej charakteristike, t. j. na každom riešení charakteristického systému.*

Dôkaz tohto tvrdenia je založený na derivovaní zloženej funkcie $h(\tau) = u(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))$. Keďže $h'(\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(\tau)) \dot{x}_i(\tau)$ a ak $x = x(\tau)$ je riešením charakteristického systému, tak $h'(\tau) = 0$ a teda $h(\tau)$ je konštantná na každej charakteristike. Naopak, ak u je konštantné na každej charakteristike, tak $h'(\tau) = 0$ a teda dosadením $\tau = 0$ dostávame, že u rieši lineárnu homogénnu rovnicu v bode x^0 . Keďže x^0 bol ľubovoľný bod, tak dôkaz tvrdenia je dokončený.

Príklad 3.1.1. Uvažujme príklad diferenciálnej rovnice

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

t. j. príklad vektorového poľa $\vec{a}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^T$, ktoré bolo zobrazené na Obr. 3.1. Charakteristický systém je sústava ODR

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \end{cases}$$

ktorého všeobecným riešením je dvojica

$$x_1(\tau) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau), \quad x_2(\tau) = -A \sin(\tau) + B \cos(\tau),$$

kde konštanty A, B závisia len od zvolenej počiatočnej podmienky x^0 . Jednoduchá algebra nám dáva, že $x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau) = A^2 + B^2$ pre každé $\tau \in \mathbb{R}$ a

teda funkcia $u = u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ostáva konštantná vzhľadom na τ pre každú charakteristiku, t. j. riešenie charakteristického systému. Na základe Vety 3.1 funkcia u je riešením našej parciálnej diferenciálnej rovnice, o čom sa je možné presvedčiť aj dosadením do rovnice.

Poznámka 3.1. Všimnime si, že tvar funkcie u sme mohli získať aj bez explicitného riešenia charakteristického systému. Myšlienka je založená na hľadani istého invariantu pre charakteristickú rovnicu. Skutočne, ak násobíme prvú rovnicu x_1 a druhú s x_2 a následne ich sčítame, tak dostaneme $x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$ čiže $\frac{d}{d\tau}(x_1^2 + x_2^2) = 0$ pre každé τ a teda opäť vidíme, že funkcia $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je konštantná na každej charakteristike. Zapamätajme si tento postup!

Poznámka 3.2. Získaná funkcia $u = x_1^2 + x_2^2$ je len jednou z mnohých funkcií, ktoré sú konštantné na charakteristikách. Zrejme takou bude aj zložená funkcia $u(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$, kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľná C^1 hladká funkcia. Skutočne, argument $x_1^2 + x_2^2$ tejto funkcie je konštantný na charakteristikách a teda aj zložená funkcia bude na nich konštantná. Táto črta sa dá využiť napríklad pri úlohe riešiť rovnice prvého rádu so zadanou okrajovou podmienkou. Napríklad, od riešenia u navyiac požadujeme, aby $u(x_1, 0) = x_1^3 + 5$. Hľadáme teda funkciu f tak, aby bola splnená zadaná podmienka. Zrejme musí platiť $x_1^3 + 5 = u(x_1, 0) = f(x_1^2 + 0) = f(x_1^2)$ a teda $f(\xi) = \xi^{3/2} + 5$. Riešením je potom funkcia $u(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + 5$.

Tvrdenie 3.2. Predpokladajme, že funkcie $u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú riešením rovnice (3.1) pre $k = 1, \dots, m$. Nech $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom funkcia $u(x) = \Phi(u_1(x), \dots, u_m(x))$ je riešením rovnice (3.1).

Dôkaz vychádza z faktu, že $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ a teda

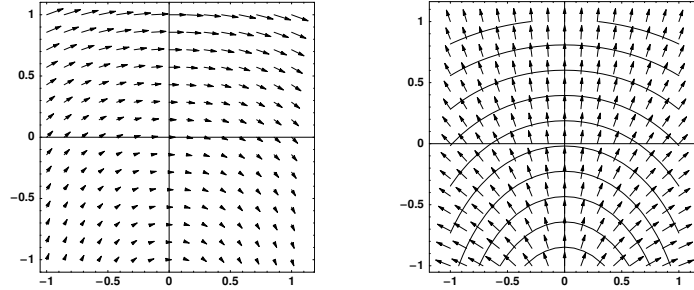
$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0.$$

Príklad 3.1.2. Nájďme všeobecný tvar riešenia rovnice

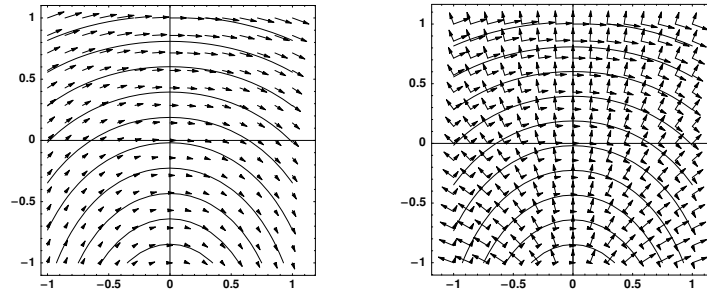
$$e^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Charakteristický systém je sústava ODR

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \end{aligned}$$



Obr. 3.4: Graf zadaného vektorového poľa (vľavo). Úrovňové roviny riešenia u a jeho gradientné pole (vpravo).

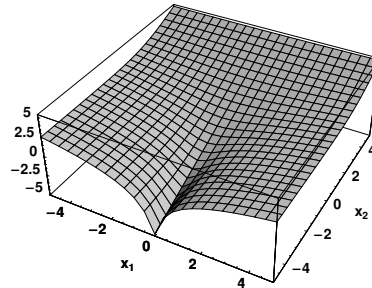


Obr. 3.5: Znázornenie vektorového poľa dotýkajúceho sa úrovňových rovín (vľavo). Zadané vektorové pole, úrovňové roviny riešenia a jeho gradient (vpravo).

Potom derivovaním prvej rovnice dostávame $\dot{x}_1 = e^{x_2} \dot{x}_2 = \dot{x}_1(-x_1) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(x_1^2)$. Teda $\frac{d}{d\tau}(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}x_1^2) = 0$, čo znamená, že výraz $\dot{x}_1 + \frac{1}{2}x_1^2$ je konštantný vzhľadom na τ . S využitím prvej rovnice $\dot{x}_1 = e^{x_2}$ dostávame, že výraz $e^{x_2(\tau)} + \frac{1}{2}x_1^2(\tau)$ je konštantný v τ . Všeobecným riešením je potom funkcia $u(x_1, x_2) = f(e^{x_2} + \frac{1}{2}x_1^2)$, kde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľná hladká funkcia. Ak navyše požadujeme, aby napríklad riešenie spĺňalo okrajovú podmienku $u(0, x_2) = x_2$, tak nevyhnutne $f(\xi) = \ln(\xi)$ a riešenie je $u(x_1, x_2) = \ln(e^{x_2} + \frac{1}{2}x_1^2)$. Pozri Obr. 3.4, 3.5, 3.6.

Príklad 3.1.3. Nájďme všeobecný tvar riešenia rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} - xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$



Obr. 3.6: Graf riešenia spĺňajúce zadanú okrajovú podmienku.

Charakteristickým systémom je sústava ODR

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = -xy \\ x(0) = x^0, y(0) = y^0, z(0) = z^0. \end{cases}$$

Násobiac druhú rovnicu premennou y a tretiu z , následne ich sčítaním dostaneme $y\dot{y} + z\dot{z} = 0$ čiže $\frac{d}{d\tau}(y^2 + z^2) = 0$ pre každé τ . Funkcia

$$u_1(x, y, z) = y^2 + z^2$$

je preto riešením rovnice, o čom sa je možné presvedčiť opäť aj dosadením. Nás však zaujíma otázka nájsť ďalšie riešenie u_2 , ktoré by nebolo iba triviálnou kompozíciou funkcie u_1 s nejakou funkciou f , ako je to opísané v Poznámke 3.2.

Vysvetlime si metódu ako hľadať ďalšie riešenia. Zaved' me substitúciu

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y^2 + z^2, \quad \bar{z} = z,$$

t. j. $y = \sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2}$. Položme $w(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = u(x, y, z)$, teda $u(x, y, z) = w(x, y^2 + z^2, z)$. Zdôraznime, že horeuvedená substitúcia bola zavedená práve s ohľadom na už získanú funkciu riešenia $u_1 = y^2 + z^2$. Pre parciálne derivácie funkcie u platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} 2z + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Pôvodná rovnica pre funkciu u sa potom transformuje na rovnicu pre w

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} - \bar{x} \sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Získali sme teda novú rovnicu pre w , ktorá však obsahuje iba dve nezávislé premenné \bar{x} , \bar{z} a jeden parameter \bar{y} . Jej charakteristická rovnica je

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = 1 \\ \dot{\bar{z}} = -\bar{x}\sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2} \end{cases}$$

Potom $\bar{x}(\tau) = \tau + A$ a $\frac{d\bar{z}}{\sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2}} = -\bar{x} = -\tau - A$ a teda $\int \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\bar{y} - \bar{z}^2}} = -\frac{1}{2}\tau^2 - A\tau$.

Integráciou získavame

$$\arcsin\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{y}}}\right) = -\frac{\tau^2}{2} - A\tau + B = -\frac{(\bar{x} - A)^2}{2} - A(\bar{x} - A) + B = -\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{A^2}{2} + B,$$

pričom našou snahou bolo eliminovať premennú τ z výrazu. Dostali sme

$$\arcsin\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{y}}}\right) + \frac{\bar{x}^2}{2} = \frac{A^2}{2} + B = \text{const.}$$

Preto funkcia $w(\bar{x}, \bar{z}) = \arcsin\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{y}}}\right) + \frac{\bar{x}^2}{2}$ je druhým riešením pomocnej rovnice. Prechodom k pôvodným premenným x, y, z dostaneme, že funkcia

$$u_2(x, y, z) = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right) + \frac{x^2}{2}$$

je druhým riešením pôvodnej rovnice.

Podľa predošlého tvrdenia, všeobecné riešenie zadanej rovnice potom môžeme hľadať ako kompozíciu už nájdených funkcií u_1, u_2 s ľubovoľnou hladkou funkciou dvoch premenných $\Phi(\xi, \eta)$, t. j.

$$u(x, y, z) = \Phi(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)).$$

Ak požadujeme, aby riešenie spĺňalo okrajovú podmienku $u(x, y, 0) = x^2 + y^2$, tak potrebujeme zvoliť $\Phi(\xi, \eta) = \xi + 2\eta$, t. j.

$$u(x, y, z) = y^2 + z^2 + 2 \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right) + x^2.$$

◇

Poznámka 3.3. Uvedený postup má všeobecné použitie. Ak sme už našli jedno riešenie $u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rovnice (3.1), tak zavedením substitúcie

$$\bar{x}_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{x}_i = x_i, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

môžeme ďalšie riešenie u rovnice (3.1) hľadať v tvare

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = v(u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Potom dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Využitím poznatku, že funkcia u_1 rieši (3.1) poľahky odvodíme, že funkcia u je riešením (3.1) práve vtedy, keď funkcia v vyhovuje rovnici

$$a_2(\bar{x}) \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} + a_3(\bar{x}) \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} + \dots + a_n(\bar{x}) \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_n} = 0,$$

ktorá predstavuje rovnicu obsahujúcu iba $n - 1$ premenných $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ a jeden parameter \bar{x}_1 . Znížili sme teda rád rovnice o jedna.

3.2 Nehomogénne a kvázilineárne rovnice prvého rádu

V tejto časti sa zameriame na riešenie kvázilineárnej rovnice prvého rádu v tvare

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = a_{n+1}(x, u), \quad (3.5)$$

kde $a_1, \dots, a_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú zadané spojité funkcie. Úloha spočíva v nájdení C^1 funkcie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takej, že v každom bode $x \in \Omega$ je splnená rovnosť (3.5). Na rozdiel od rovnice (3.1) pripúšťame, že koeficienty a_i môžu závisieť aj na samotnej hľadanej funkcii u . Navyac pripúšťame aj nenulovú pravú stranu $a_{n+1}(x, u)$, ktorá taktiež môže závisieť od hľadanej funkcie u . Skúmaná rovnica (3.5) je teda vo všeobecnosti nelineárna.

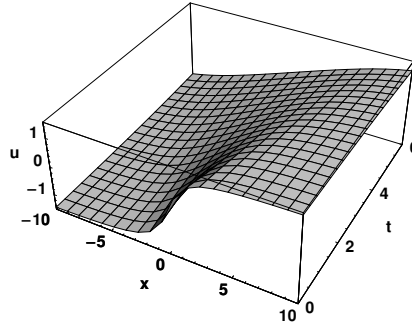
Idea riešenia nelineárnej rovnice (3.5) spočíva v konštrukcii pomocnej lineárnej rovnice v tvare (3.1). Uvažujme rovnicu

$$a_1(x, u) \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_2(x, u) \frac{\partial w}{\partial x_2} + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial w}{\partial x_n} + a_{n+1}(x, u) \frac{\partial w}{\partial u} = 0. \quad (3.6)$$

Zdôraznime, že v rovnici (3.6) je neznámou funkcia $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $w = w(x_1, \dots, x_n, u)$. Aký je však súvis medzi riešeniami rovnice (3.6) a (3.5)? Poskytnite nám ho nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 3.3. *Nech $w = w(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 hladké riešenie pomocnej rovnice (3.6). Nech $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 hladká funkcia taká, že*

- $w(x, u(x)) = \text{const}$ pre každé $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,
- $\frac{\partial w}{\partial u}(x, u(x)) \neq 0$ pre každé $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.



Obr. 3.7: Zobrazenie riešenia Burgersovej rovnice pre počiatočnú podmienku $u(0, x) = \phi(x) = \arctan(x)$.

Potom u je riešením rovnice (3.5) v oblasti Ω .

Dôkaz. Funkcia $h(x) = w(x, u(x))$ je podľa predpokladu konštantnou vzhľadom na x . Potom

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x_i}}{\frac{\partial w}{\partial u}}.$$

Nakoniec dostávame

$$\begin{aligned} & a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ &= -\frac{a_1(x, u) \frac{\partial w}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x, u) \frac{\partial w}{\partial x_n}}{\frac{\partial w}{\partial u}} = -\frac{-a_{n+1}(x, u) \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u}} = a_{n+1}(x, u), \end{aligned}$$

čo znamená, že funkcia u je riešením kvázilineárnej rovnice (3.5) \diamond

Príklad 3.2.1. Uvažujme príklad Burgersovej rovnice, ktorá predstavuje kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Burgersova rovnica je príklad rovnice opisujúcej stav plynu (hustotu) v jednorozmernom prostredí $x \in \mathbb{R}$ a v čase $t > 0$. Rovnica je dôsledkom úvah v časti 1.1, kde sme odvodili rovnicu kontinuity $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vu) = 0$. Ak rýchlosť plynu a jeho expanzie je priamo úmerná jeho hustote, napríklad ak $v = u/2$, tak dostávame Burgersovu rovnicu.

Pomocná lineárna rovnica je

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + 0 \frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

a jej charakteristický systém ODR má tvar

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = u, \\ \dot{u} = 0. \end{cases}$$

Teda $u(\tau) = A$ je konštanta. Potom $\dot{x}(\tau) = A$, z čoho dostávame $x(\tau) = A\tau + B$ a napokon $t(\tau) = \tau + C$, kde A, B, C sú konštanty závisiace od počiatočných podmienok charakteristiky. Úpravou získame vyjadrenie $x(\tau) = A\tau + B = u(\tau)\tau + B = u(\tau)(t - C) + B$ a teda $x - ut = -AC + B$, čo je konštanta vzhľadom na τ . Jedným riešením pomocnej rovnice je preto funkcia $w_1(t, x, u) = x - ut$. Zrejme druhým riešením pomocnej rovnice je funkcia $w_2(t, x, u) = u$. Všeobecné riešenie pomocnej rovnice je preto funkcia $w(t, x, u) = \Phi(w_1(t, x, u), w_2(t, x, u))$, kde Φ ľubovoľná hladká funkcia dvoch premenných. Ak zvolíme $\Phi(\xi, \eta) = \phi(\xi) - \eta$, kde ϕ je nejaká funkcia, tak dostaneme $w(t, x, u) = \phi(x - ut) - u$. Nakoniec určíme riešenie $u = u(t, x)$ pomocou tvrdenia Vety 3.3. Výraz $w(t, x, u(t, x))$ je konštantný (napr. rovný nule) vzhľadom na x, t práve vtedy, keď

$$u(t, x) = \phi(x - tu(t, x)).$$

To znamená, že pre každé t, x je hodnota riešenia $u(t, x)$ určená pomocou riešenia rovnice zadanej implicitným vzťahom. Poznamenajme, že funkcia ϕ určuje počiatočnú podmienku pre funkciu u . Skutočne, pre $t = 0$ máme

$$u(0, x) = \phi(x - 0u(0, x)) = \phi(x).$$

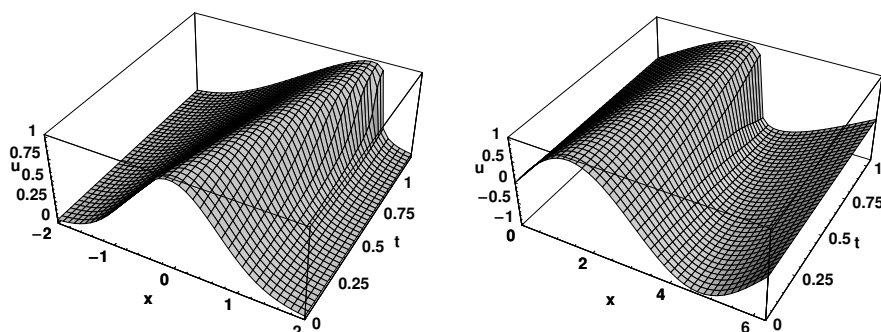
Ak napríklad $\phi(x) = x$, potom riešenie možno nájsť v tvare

$$u(t, x) = \frac{x}{1+t}.$$

Nasleduje ukážka numerického riešenia Burgersovej rovnice pre rôzne počiatočné podmienky. Na Obr. 3.8 si všimnime, že riešenie $u(t, x)$ má v čase $t = 1.2$ resp. $t = 1$ tendenciu vytvoriť neodstrániteľnú singularitu. Analyticky sa dá ukázať, že v týchto príkladoch skutočne dochádza k vytváraní singularít riešení v konečnom čase. Podstata problému spočíva v tom, že počiatočné podmienky nie sú rastúcimi funkciami. Na druhej strane, príklad zobrazený na Obr. 3.7 poukazuje na to, že ak počiatočná funkcia je rastúcou funkciou, tak riešenie existuje pre každé $t > 0$.

Nakoniec si všimnime jednu veľmi dôležitú vlastnosť riešení Burgersovej rovnice. Predpokladajme, že počiatočná podmienka $u(0, x) = \phi(x)$ je ohraničená funkcia a taká, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0$. Ukážeme, že hodnota integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx$$



Obr. 3.8: Riešenie $u(t, x)$ spĺňajúce $u(0, x) = \exp(-x^2)$ (vľavo). Riešenie $u(t, x)$ spĺňajúce $u(0, x) = \sin(x)$.

nezávisí od $t \in [0, T]$, kde $[0, T]$ je interval, na ktorom riešenie $u(t, x)$ existuje. Zvoľme $r > 0$. Využijúc fakt, že funkcia $u(t, x)$ je riešením Burgersovej rovnice potom dostávame

$$\frac{d}{dt} \int_{-r}^r u(t, x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{\partial}{\partial x} u^2(t, x) dx = -\frac{1}{2} (u^2(t, r) - u^2(t, -r)).$$

Integrovaním cez interval $[0, t]$ dostávame

$$\int_{-r}^r u(t, x) dx = \int_{-r}^r u(0, x) dx - \frac{1}{2} \int_0^t (u^2(\tau, r) - u^2(\tau, -r)) d\tau.$$

Pretože ϕ je ohraničená tak aj funkcia u musí byť ohraničená a teda

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x - tu(t, x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0.$$

Keďže $u(0, x) = \phi(x)$, tak pre $r \rightarrow \infty$ nakoniec dostávame

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$$

pre každé $t \in [0, T]$, t. j. hodnota integrálu nezávisí od času $t \in [0, T]$. Poznamenajme, že tento výsledok má svoju fyzikálnu interpretáciu. Burgersova rovnica modeluje prúdenie stlačiteľného plynu v nekonečne dlhej trubici a jeho závislosť na čase. Hodnota $u(t, x)$ zodpovedá hustote plynu v bode $x \in (-\infty, \infty)$ a čase $t \in [0, T]$. Nemennosť hodnoty horeuvedeného integrálu vyjadruje zachovanie celkovej hmoty plynu počas časového vývoja.

Príklad 3.2.2. Uvažujme príklad transportnej rovnice s rýchlosťou pol'a $v(x) = x$, ktorá predstavuje kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (xu) = 0.$$

Táto rovnica je jednorozmernou analógiou zákona zachovania hmoty, ktorý sme analyzovali v Kapitole 1.1. Ak derivujeme výraz podľa premennej x , dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = -u.$$

Pomocná lineárna rovnica je

$$\frac{\partial w}{\partial t} + x \frac{\partial w}{\partial x} - u \frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

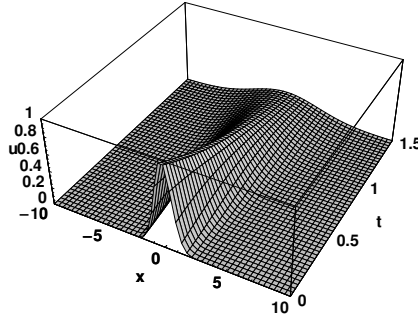
a jej charakteristická rovnica má tvar

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = x \\ \dot{u} = -u. \end{cases}$$

Postupne dostávame $\frac{d}{d\tau}(\ln(x)) = 1$ a tiež $\frac{d}{d\tau}(\ln(u)) = -1$. Preto výraz $\ln(u) + \ln(x)$ a teda aj výraz ux je konštantný vzhľadom na τ . Súčasne výraz $\ln(x) - t$ je konštantný vzhľadom na τ . To znamená, že všeobecným riešením pomocnej rovnice je funkcia $w = w(t, x, u)$ v tvare $w(t, x, u) = \Phi(\ln(x) - t, ux)$. Ak zvolíme $\Phi(\xi, \eta) = \eta - \phi(\xi)$, tak $w(t, x, u) = ux - \phi(\ln(x) - t)$. Na základe Vety 3.3 je funkcia $w(t, x, u(t, x))$ konštantná vzhľadom na t a x ak $u(t, x) = \phi(\ln(x) - t)/x$. Nakoniec ešte nájdeme funkciu ϕ tak, aby bola splnená počiatočná podmienka $u(0, x) = h(x)$, kde h je zadaná počiatočná podmienka. Zrejme musí platiť $h(x) = u(0, x) = \phi(\ln(x))/x$ a teda $\phi(\xi) = e^\xi h(e^\xi)$. Riešenie u je potom dané vzorcom

$$u(t, x) = e^{-t} h(xe^{-t}).$$

V prípade $h(x) = e^{-x^2}$ dostávame riešenie, ktorého časový vývoj pre $t \in [0, 1.5]$ je znázornený na Obr. 3.9.



Obr. 3.9: Znárodnenie riešenia transportnej rovnice.

3.3 Príklady

Príklad 1. Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa okrajovú podmienku $u(0, y) = y$.

Príklad 2. Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Príklad 3. Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $(x+y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa okrajovú podmienku $u(1, y) = 2y$.

Príklad 4. Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 1$, kde a, b sú dané konštanty.

Príklad 5. . Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

Príklad 6. Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $x \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial u}{\partial y} = xy$.

Príklad 7. Nájdite všeobecný tvar riešenia rovnice $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$.

Príklad 8. Nájdite všeobecný tvar riešenia Burgersovej rovnice s pravou stranou $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

Príklad 9. Príklad 3.1.2. sa dá vyriešiť aj inak. Položme $v(x, t) = xu(x, t)$. Potom v rieši lineárnu homogénnu rovnicu. Ukážte, že týmto postupom dostanete to isté riešenie, ako v príklade 3.1.2.

Príklad 10. Nájdite riešenie $u = u(x, y)$ rovnice $(x^2 - 2xy) \frac{\partial u}{\partial x} + (2xy - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, pre ktoré platí $u(2\xi, \xi) = \xi^6$ pre každé $\xi \in \mathbb{R}$.

Príklad 11. Zistite, či existuje riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $(2x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, pre ktoré navyše platí $z(\xi, \xi) = \xi$ pre každé $\xi \in \mathbb{R}$.

Príklad 12. Nájdite riešenie $z = z(x, y)$ rovnice $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, pre ktoré platí $z(0, y) = y$.

Príklad 13. Nájdite všeobecné riešenie $u = u(x, y)$ rovnice $(x^2 - xy)\frac{\partial u}{\partial x} + (xy - y^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Príklad 14. Nájdite riešenie $u = u(x, y)$ rovnice $\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = au$, pričom platí $u(x, 0) = 1$ pre každé $x > 0$ a $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ je konštanta.

Príklad 15. Nájdite riešenie $u = u(x, y)$ rovnice $2xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, pre ktoré platí $u(x, 1) = 2x$.

Príklad 16. Nech $a > 0$. Nájdite riešenie $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, rovnice $(x - at)\frac{\partial u}{\partial t} + u^3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ v tvare postupujúcej vlny, t. j. v tvare $u(x, t) = F(x - at)$.

Kapitola 4

Parabolické parciálne diferenciálne rovnice

Parabolické parciálne diferenciálne rovnice sa zväčša vyskytujú ako matematické modely rôznych evolučných fyzikálnych zákonitostí. V prvej kapitole sme spomenuli, že k takýmto modelom patrí rovnica vedenia tepla, rovnica difúzie, resp. Black – Scholesova rovnica na oceňovanie derivátov akcií. Premenné v parabolických rovniciach sa obvykle úzko viažu s fyzikálnymi premennými ako sú čas $t > 0$ a priestorová premenná $x \in \mathbb{R}^n$. Prítomnosť časovej premennej t poukazuje na evolučný charakter opisovaného problému. Medzi základné problémy riešenia evolučných úloh patrí odpoveď na otázku, do akého stavu sa vyvinie riešenie v danom čase $t > 0$ poznajúc pritom jeho počiatočný stav v čase $t = 0$. Inými slovami povedané, úloha spočíva v nájdení riešenia $u(x, t)$ pre $t > 0$, pričom hodnota počiatočného riešenia $u(x, 0)$ je vopred zadaná.

Obsah Kapitoly 4 je rozdelený do dvoch celkov. V prvej podkapitole 4.1 sa zameriame na riešenie parabolickej rovnice v prípade, že priestorová premenná prebieha celý priestor \mathbb{R} . Hlavný výsledok tejto časti nám poskytne explicitný vzorec na to, ako nájsť riešenie lineárnej parabolickej rovnice na neohraničenom intervale. Okrem fyzikálnych aplikácií v úlohách vedenia tepla ukážeme, ako tento explicitný vzorec riešenia možno účelne aplikovať práve na získanie vzorca na oceňovanie derivátov akcií založeného na Black – Scholesovom modeli.

V druhej podkapitole 4.2 sa zameriame na riešenie parabolickej rovnice v prípade, že priestorová premenná náleží ohraničenému intervalu. Ukážeme význam zadania okrajových podmienok. Idea hľadania riešenia je založená na rozvíjaní neznámeho riešenia do funkcionálneho radu (Fourierov trigonometrický rad) a určenia koeficientov v rozvoji so zadaných údajov. Hlavným výsledkom tejto časti je opäť poskytnutie vzorca na rie-

šenie parabolickej rovnice na ohraničenom intervale. V rámci aplikácií sa sústreďíme najmä na diskusiu o rovnici vedenia tepla v ohraničenej tyči.

V oboch podkapitolách je dôraz kladený na dôsledky, ktoré vyplývajú z poznania vzorcov na riešenie parabolickej rovnice. Medzi tieto dôsledky patria také vlastnosti riešení parabolických rovníc, akými sú: 1) princíp porovnávania riešení, t. j. riešenia s usporiadanými počiatočnými podmienkami ostanú usporiadané počas časovej evolúcie; 2) zhladzujúci efekt, t. j. riešenie s nehladkou počiatočnou podmienkou sa stane nekonečne diferencovateľným v ľubovoľnom kladnom čase); 3) konvergencia riešení a asymptotické správanie sa riešení.

4.1 Metóda Greenovej funkcie pre neohraničenú oblasť

4.1.1 Motivácia a hlavná myšlienka

V tejto podkapitole sa zameriame na hľadanie riešenia parabolickej rovnice

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{pre všetky } (x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T); \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre všetky } x \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

kde premenná x prebieha neohraničený interval všetkých reálnych čísel. Úloha spočíva v nájdení funkcie $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T))$, pričom u rieši parabolickú PDR (4.1) a spĺňa počiatočnú podmienku u^0 v čase $t = 0$, ktorá je vopred zadaná a známa. Symbolom $C^{2,1}$ sme označili triedu funkcií, ktoré sú dvakrát spojitely diferencovateľné v premennej x a raz spojitely diferencovateľné v premennej t . Táto úloha sa v literatúre označuje aj ako Cauchyho úloha¹ pre parabolickú rovnicu.

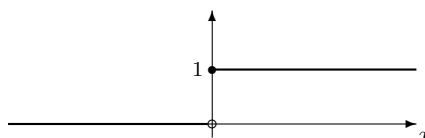
Na základe poznámok v 1. kapitole, hlavnou fyzikálnou aplikáciou je problém určenia rozloženia teploty v nekonečnej tyči, pričom je známe počiatočné rozloženie teploty.

Cieľom kapitoly je poskytnúť explicitný vzorec na výpočet riešenia úlohy (4.1). Vzorec musí predstavovať funkciu, ktorá priradí ľubovoľnej počiatočnej podmienke u^0 riešenie $u = u(x, t)$ pre každý čas $t > 0$ a bod priestoru $x \in \mathbb{R}$.

¹Augustin Luis Cauchy (1789-1857) fr. matematik. Významne obohatil najmä matematickú analýzu, teóriu funkcií, komplexnú premennú, diferenciálne rovnice. Pracoval tiež v aplikáciách algebr. Významnou mierou sa zasadil o zavedenie „epsilon-deltaanalýzy“ na vyjadrenia spojitosti funkcií. Vypracoval základy teórie holomorfných funkcií komplexnej premennej.

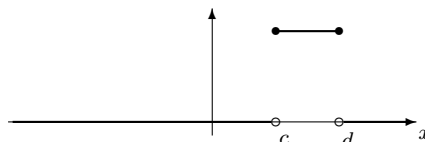
Idea odvodenia vzorca pre riešenie (4.1) sa skladá zo štyroch krokov. V každom kroku budeme hľadať vzorec pre stále širšiu triedu počiatočných podmienok - začnúc od najjednoduchšej a končiac pri všeobecnej počiatočnej podmienke.

1.krok



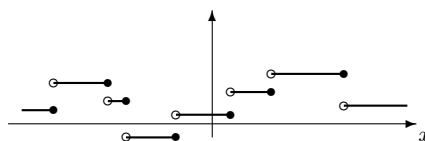
spočíva v odvodení vzorca pre charakteristickú funkciu intervalu $[0, \infty)$ ako počiatočnej podmienky u^0 .

2.krok



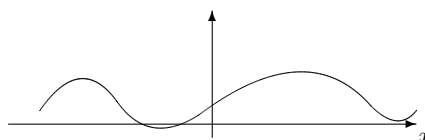
spočíva v odvodení vzorca pre charakteristickú funkciu intervalu $[c, d]$ ako počiatočnej podmienky u^0 .

3.krok



spočíva v odvodení vzorca pre jednoduchú schodovitú funkciu u^0 (viď obrázok).

4.krok



spočíva v odvodení vzorca pre ľubovoľnú po častiach spojitú počiatočnú podmienku u^0 .

◇ 1. krok - Elementárna počiatočná podmienka. Predpokladajme, že počiatočná podmienka je jednoduchá Heavisidova funkcia

$$u^0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Myšlienka odvodenia vzorca pre riešenie $u(x, t)$ parabolickej rovnice (4.1) je založená na hľadaní istého špeciálneho typu riešenia v tvare tzv. samopodobnej funkcie. Presnejšie, funkciu $u(x, t)$ budeme hľadať v tvare

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{t^\alpha}\right),$$

kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia reálnej premennej (aspoň C^2 hladká), pričom parameter α určíme neskôr. Použitím pravidla o derivovaní zloženej

funkcie dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f' \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) (-\alpha) x t^{-\alpha-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f' \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) t^{-\alpha}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) t^{-2\alpha}.$$

Dosadením týchto výrazov do rovnice, ktorú má spĺňať funkcia u získame

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -\alpha f' \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) \frac{x}{t^\alpha} \frac{1}{t} - a^2 f'' \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) \frac{1}{t^{2\alpha}} \\ &= -\alpha f'(z) z \frac{1}{t} - a^2 f''(z) \frac{1}{t^{2\alpha}}, \end{aligned}$$

kde sme si označili $z = \frac{x}{t^\alpha}$. Všimnime si, že ak $\alpha = 1/2$ tak v oboch členoch sa bude vyskytovať rovnaká mocnina t^{-1} . Pre $t > 0$ môžeme rovnosť $0 = (\dots)t^{-1}$ násobiť t a dostaneme nakoniec obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre funkciu f s novou premennou z

$$-\frac{1}{2} f'(z) z - a^2 f''(z) = 0.$$

Z teórie ODR je známe, že na jednoznačné určenie funkcie f je potrebné zadať počiatočné, resp. okrajové podmienky. Pripomeňme, že sme zaviedli novú premennú z , pre ktorú zrejme platí

$$\left(\text{pre } z = \frac{x}{t^{1/2}} \right) \quad \begin{array}{ll} \text{ak } x < 0 & \text{tak } z \rightarrow -\infty \text{ pre } t \rightarrow 0^+, \\ \text{ak } x > 0 & \text{tak } z \rightarrow +\infty \text{ pre } t \rightarrow 0^+. \end{array}$$

Keď využijeme špeciálny tvar počiatočnej podmienky u^0 dostaneme, že platí pre $x < 0$:

$$0 = u^0(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f \left(\frac{x}{t^{1/2}} \right) = \lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = f(-\infty);$$

a pre $x > 0$:

$$1 = u^0(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f \left(\frac{x}{t^{1/2}} \right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = f(+\infty).$$

Odvodili sme teda, že u je riešenie PDR (4.1) s počiatočnou podmienkou, ktorá je Heavisideovou funkciou u^0 práve vtedy, keď funkcia f je riešením ODR

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} f'(z) z - a^2 f''(z) = 0, \\ f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

so zadanými okrajovými podmienkami v $\pm\infty$. Nájďme riešenie rovnice (4.2) pomocou známych metód riešenia ODR. Zavedením novej funkcie $g(z) = f'(z)$ sa úloha prevedie na ODR v separovanom tvare $\frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{z}{2a^2}$,

ktorá po integrácii dáva riešenie $g(z)$ v tvare $g(z) = C_1 e^{-\frac{z^2}{4a^2}}$, kde C_1 je nejaká konštanta. Poznamenajme, že pre ľubovoľné $-\infty < R < z < \infty$ platí $f(z) = f(R) + \int_R^z f'(\xi) d\xi$ a teda prechodom k limite $\mathbb{R} \rightarrow -\infty$ a berúc do úvahy, že $f(-\infty) = 0$ dostávame

$$f(z) = \int_{-\infty}^z f'(\xi) d\xi = C_1 \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi.$$

Konštantu C_1 nakoniec určíme z podmienky $f(\infty) = 1$, t. j.

$$1 = f(\infty) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi = 2aC_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = 2aC_1 \sqrt{\pi},$$

t. j. $C_1 = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi}}$. Teda

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi.$$

Vyjadrenie pre hľadané riešenie $u = u(x, t) = f(xt^{-1/2})$ dostávame v tvare

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} dr,$$

kde sme použili substitúciu $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Po zavedení substitúcie $s = x - r$ dáva vzťah

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds.$$

Nakoniec použijeme „malý“ trik a využijeme fakt, že počiatočná podmienka $u^0(x) = 0$ pre $x < 0$ a $u^0(x) = 1$ pre $x > 0$. Tým pádom môžeme písať $\int_0^{\infty} (\dots) ds = \int_{-\infty}^0 (\dots) 0 ds + \int_0^{\infty} (\dots) 1 ds = \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) u^0(s) ds$. t. j.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} u^0(s) ds.$$

Z dôvodu zjednodušenia ďalších zápisov zaved' me funkciu

$$G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}, \quad (4.3)$$

ktorá sa nazýva Greenova funkcia parabolickej úlohy na nekonečnom intervale. S využitím tohto označenia môžeme riešenie $u = u(x, t)$ problému (4.1) vyjadriť ako

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u^0(s) ds. \quad (4.4)$$

◇ 2. krok - Počiatková podmienka je charakteristickou funkciou intervalu. Najprv poznamenajme, že užitočná vlastnosť plynúca zo štruktúry problému (4.4) je možnosť ľubovoľného posúvania riešenia v smere osi x . Presnejšie, ak $u = u(x, t)$ je riešenie (4.1) s počiatkovou podmienkou $u^0 = u^0(x)$, tak dosadením do rovnice $u_t - u_{xx} = 0$ ľahko preveríme, že posunutá funkcia $\tilde{u}(x, t) = u(x + c, t)$ opäť vyhovuje rovnici $u_t - u_{xx} = 0$ a spĺňa počiatkovú podmienku $\tilde{u}^0(x) = u^0(x + c)$. Keďže riešenie $u = u(x, t)$ sa dá podľa 1. kroku vyjadriť v tvare integrálu $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u^0(s) ds$, tak zavedením substitúcie $s \leftrightarrow s - c$ postupne dostaneme $\tilde{u}(x, t) = u(x + c, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x + c - s, t) u^0(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u^0(s + c) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) \tilde{u}^0(s) ds$. Inými slovami povedané, vzorec (4.4) platí aj pre počiatkovú podmienku v tvare skokovej Heavisideovej funkcie so skokom v ľubovoľnom bode c .

Ďalšia užitočná vlastnosť riešenia problému (4.1) je jeho linearita v tom zmysle, že ak

$$\begin{array}{ccc} u_1^0(x), & u_2^0(x) & \text{sú dve počiatkové podmienky} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ u_1(x, t), & u_2(x, t) & \text{sú zodpovedajúce riešenia,} \end{array}$$

tak potom pre ľubovoľné konštanty α, β je riešením (4.1) aj

$$\text{lineárna kombinácia funkcií } u_1, u_2: \quad u(x, t) = \alpha u_1(x, t) + \beta u_2(x, t)$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$\text{spĺňajúca počiatkovú podmienku:} \quad u^0(x) = \alpha u_1^0(x) + \beta u_2^0(x).$$

(4.5)

Z vlastnosti linearitu integrálu potom ale vyplýva, že vzorec (4.4) platí aj pre počiatkovú podmienku v tvare $u^0(x) = \alpha u_1^0(x) + \beta u_2^0(x)$, pokiaľ platí pre počiatkové podmienky v tvare $u_1^0(x)$ resp. $u_2^0(x)$. S pomocou hore uvedených užitočných vlastností už poľahky nahliadneme, že vzorec (4.4) platí aj pre riešenie problému (4.1) v prípade, že u^0 je charakteristickou funkciou nejakého konečného intervalu (c, d) (pozri obrázok pri 2. kroku). Skutočne, taká počiatková podmienka sa dá rozpísať ako $u^0(x) = u_c^0(x) - u_d^0(x)$, kde u_c^0, u_d^0 sú Heavisideove funkcie so skokmi v bodoch c resp. d . Keďže počiatková podmienka je lineárnou kombináciou počiatkových podmienok, pre ktoré vzorec (4.4) platí, tak potom (4.4) určuje riešenie $u(x, t)$ s počiatkovou podmienkou u^0 .

◇ 3. krok - Počiatková podmienka je jednoduchá schodovitá funkcia. Tento prípad teraz môžeme vyriešiť veľmi rýchlo práve na základe vlastnosti (4.5), t. j. s

využitím linearity problému (4.1). Skutočne, každá jednoduchá schodovitá funkcia u^0 je lineárnou kombináciou charakteristických funkcií nejakých intervalov a teda na základe 2. kroku vzorec (4.4) platí aj pre takéto počiatkové podmienky a určuje príslušné riešenie parabolickej rovnice (4.1).

◇ 4. krok - Počiatková podmienka je ľubovoľná spojitá funkcia, pričom predpokladáme, že rastie v $\pm\infty$ nanajvyš ako exponenciálna funkcia, t. j. existujú konštanty $M, \beta > 0$ také, že

$$|u^0(x)| \leq M e^{\beta|x|} \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

K takej ľubovoľnej spojitaj funkcii u^0 môžeme skonštruovať postupnosť u_n^0 jednoduchých schodovitých funkcií tak, že $u_n^0(x) \rightarrow u^0(x)$ konverguje bodovo pre všetky $x \in \mathbb{R}$, keď $n \rightarrow \infty$. Navyiac výber funkcií u_n^0 môžeme uskutočniť tak, že pre všetky u_n^0 platí odhad (4.6) s konštantou M zmenenou povedzme na $2M$ (rozmyslite si prečo!).

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí vzorec (4.4), t. j. riešenie $u_n(x, t)$ prislúchajúce počiatkovej podmienke u_n^0 sa dá vyjadriť ako

$$u_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t) u_n^0(s) ds.$$

Pre pevne zvolené $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$ je vďaka rovnomernému odhadu na $u_n^0(s)$ možné použiť Lebesgueovu vetu o dominovanej konvergencii a následne dokázať, že postupnosť funkcií $u_n(x, t)$ konverguje k funkcii $u(x, t)$, ktorá spĺňa $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t) u^0(s) ds$. Uvedomme si, že pre pevne zvolené $t > 0$, ľubovoľná parciálna derivácia $\frac{\partial^k G}{\partial \xi^k}(\xi, t)$, $k = 0, 1, \dots$, je opäť funkcia $G(\xi, t)$ násobená nejakým polynómom stupňa k . Porovnaním rastu polynomiálnej a exponenciálnej funkcie ľahko nahliadneme, že určite existujú konštanty M_k, β_k také, že

$$\left| \frac{\partial^k G}{\partial \xi^k}(\xi, t) \right| \leq M_k e^{-\beta_k |\xi|^2}. \quad (4.7)$$

Preto na základe tvrdení o derivovaní parametrických integrálov môžeme výraz pre funkciu $u_n(x, t)$ derivovať podľa x ľubovoľne veľa krát a navyiac môžeme uskutočniť limitný prechod pre $n \rightarrow \infty$. Zhrnieme to do nasledovnej schémy

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial x^k}(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t) u_n^0(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x-s, t) u_n^0(s) ds$$

pre $n \rightarrow \infty \quad \Downarrow$

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t) u^0(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x-s, t) u^0(s) ds.$$

To ale znamená, že $\frac{\partial^k u_n}{\partial x^k}(x, t) \rightarrow \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t)$, keď $n \rightarrow \infty$, pre každé $k \in \mathbb{N}$

$$u(., t) \in C^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x-s, t) u^0(s) ds. \quad (4.8)$$

Podobne, opäť s využitím Lebesgueovej vety o dominovanej konvergencii, môžeme ukázať, že $\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}(x, t) \rightarrow \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t)$, keď $n \rightarrow \infty$ a pre každé $k \in \mathbb{N}$

$$u(x, .) \in C^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k G}{\partial t^k}(x-s, t) u^0(s) ds. \quad (4.9)$$

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ funkcia $u_n(x, t)$ rieši parabolickú rovnicu (4.1). Teda s využitím dokázaných konvergencií derivácií funkcie u_n k u dostávame nasledovný diagram

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) & = & a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \\ \Downarrow & \text{pre } n \rightarrow \infty & \Downarrow \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & = & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \end{array}$$

čo implikuje, že funkcia $u = u(x, t)$ je riešením parabolickej rovnice, pričom u sa dá vyjadriť vzorcom (4.4).

Nakoniec ešte dokážeme, že funkcia $u(x, t)$ skutočne spĺňa počiatočnú podmienku u^0 . Najprv si uvedomme, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$ platí

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} u^0(x - \sqrt{2a^2 t} \xi) d\xi.$$

Keďže $\lim_{t \rightarrow 0^+} u^0(x - \sqrt{2a^2 t} \xi) = u^0(x)$ pre každý bod x , ktorý je bodom spojitosti funkcie u^0 , a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi = \sqrt{2\pi}$ tak napokon dostávame $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u^0(x)$. Inak povedané, funkcia $u(x, t)$ môže byť dedefinovaná aj pre $t = 0$ a to tak, že $u(x, 0) = u^0(x)$, kde $u^0(x)$ je zadanou počiatočnou podmienkou.

Výsledkom našich odvodzovaní je potom nasledovné tvrdenie:

Tvrdenie 4.1. *Nech $u^0(x)$ je po častiach spojitá funkcia spĺňajúca rastovú podmienku (4.6) (t. j. u^0 nerastie rýchlejšie ako exponenciála v $\pm\infty$). Potom existuje riešenie $u = u(x, t)$ začiatočnej (Cauchyho) úlohy*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

spĺňajúce počiatočnú podmienku v zmysle

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u^0(x),$$

pre každý bod $x \in \mathbb{R}$, ktorý je bodom spojitosti funkcie $u^0(x)$. Toto riešenie môže byť explicitne vyjadrené vzorcom

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u^0(s) ds,$$

kde G je Greenovou funkciou definovanou v (4.3).

Poznámka 4.1. V priebehu odvodzovania sme niekoľkokrát mlčky využili poznatok, že existuje najviac jedno riešenie parabolickej rovnice (4.1), ktorého dôkaz možno nájsť v knihe Arsenina [1].

4.1.2 Princíp porovnávania riešení

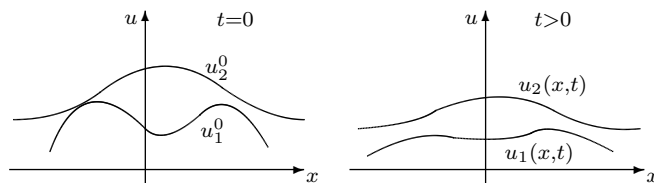
Prvým dôležitým dôsledkom poznatku o tvare riešenia Cauchyho úlohy (4.1) je princíp porovnávania riešení pre parabolickú úlohu na neohraničenom intervale. Fyzikálna motivácia k štúdiu princípu porovnávania môže byť nasledovná. Na základe Kapitoly 1 vieme, že parabolická rovnica (4.1) so zadanou počiatočnou podmienkou u^0 opisuje časový vývoj rozloženia teploty v nekonečne dlhej tyči, pričom stav rozloženia teploty na začiatku $t = 0$ je práve zadaná počiatočná podmienka u^0 . Nech u_1^0, u_2^0 sú dve rôzne počiatočné podmienky, ktoré sú usporiadané v tom zmysle, že $u_1^0(x) \leq u_2^0(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Inými slovami povedané, uvažujeme o dvoch tepelných dejoch (dve zahriate tyče), pri ktorých je rozloženie teploty na začiatku v usporiadanom stave, t. j. že v danom bode priestoru je teplota v prvej tyči menšia alebo rovná teplote v druhej na tom istom mieste $x \in \mathbb{R}$. Skúsenosť nám hovorí, že rozloženie teploty v každom budúcom čase $t > 0$ opäť bude v usporiadanom stave, teda $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$, kde $u_1(x, t), u_2(x, t)$ sú príslušné teploty v bode $x \in \mathbb{R}$ a čase $t > 0$.

Pokiaľ je fyzikálny model rozumný, musí sa táto vlastnosť preniesť aj na riešenia Cauchyho úlohy (4.1) ako adekvátneho modelu pre rozloženie teploty. Skutočne, ak $u_1^0(x) \leq u_2^0(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak na základe vzorca (4.4) a s využitím očividného faktu, že Greenova funkcia $G(\xi, t)$ je všade kladná, dostávame

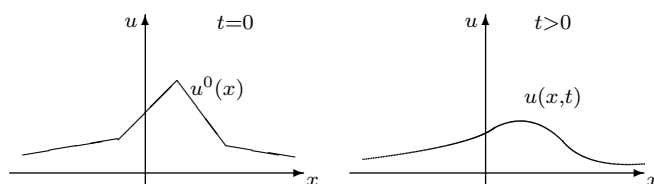
$$u_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u_1^0(s) ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u_2^0(s) ds = u_2(x, t)$$

a teda i riešenia $u_1(x, t), u_2(x, t)$ ostávajú usporiadané v každom budúcom čase $t > 0$. Z kladnosti G ďalej plynie, že rovnosť môže nastať iba v tom prípade, že $u_1^0 \equiv u_2^0$. Získali sme teda nasledovný princíp porovnávania riešení:

$$\begin{aligned} &\text{ak } u_1^0(x) \leq u_2^0(x) \text{ a } u_1^0 \not\equiv u_2^0, \\ &\text{tak } u_1(x, t) < u_2(x, t) \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$



Obr. 4.1: Znáročnenie princípu porovnávania riešení. Usporiadané počiatocné podmienky v začiatocnom čase (ľavý obrázok) a stav riešení v kladnom budúcom čase $t > 0$ (pravý obrázok).



Obr. 4.2: Znáročnenie zhladzovacieho efektu. Počiatocná podmienka je len spojitou funkciou (ľavý obrázok); v ľubovoľnom budúcom čase je riešenie už hladkou funkciou v priestorovej premennej (pravý obrázok).

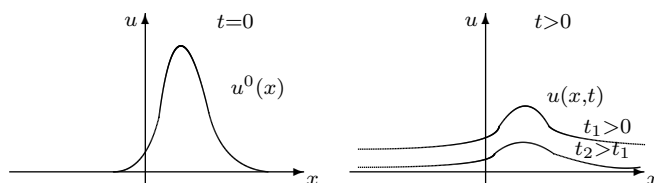
4.1.3 Princíp zhladzovania a ďalšie dôsledky

Prvý dôsledok vzorca (4.4) sa týka hladkosti získaného riešenia. Pripomeňme, že na základe vzťahu (4.8), pre každý kladný čas $t > 0$, je riešenie $u(x, t)$ Cauchyho úlohy (4.1) dané vzorcom (4.4), ľubovoľne veľakrát diferencovateľná funkcia v premennej x . Nech by počiatocná podmienka bola čo len spojitou funkciou nemajúcou deriváciu v každom bode. Inými slovami povedané, riešenie $u(x, t)$ sa stáva C^∞ hladkým v ľubovoľne krátkom čase $t > 0$ hoci takým nemuselo byť na začiatku. Tejto vlastnosti hovoríme zhladzovací efekt parabolických rovníc.

Druhý dôsledok vzorca (4.4) sa týka asymptotického správania sa riešenia parabolickej rovnice. Uvažujme o funkcii - počiatocnej podmienke, pre ktorú platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u^0(x) = 0.$$

Skúmame asymptotické správanie sa zodpovedajúceho riešenia $u(x, t)$, t. j. limitu $t \rightarrow \infty$. Skúsenosť so zahriatou tyčou nám hovorí, že teplota bude postupne klesať, až sa nevyrovná na všetkých miestach na istú konštantu. Keďže uvažujeme nekonečnú tyč a celkovej tepelnej energie je len konečne veľá, musí limitnou konštantou teplotou byť nula. Matematicky dôkaz tohto fyzikálneho pozorovania je jednoduchý. Na základe vzorca (4.4) a



Obr. 4.3: Znáznornenie asymptotického správania sa riešenia s počiatočnou podmienkou, ktorá má nulové nevlastné limity. Počiatočná podmienka (ľavý obrázok) a riešenie v ľubovoľnom budúcom čase konvergujúce k nule pre čas plynúci do nekonečna (pravý obrázok).

vyjadrenia Greenovej funkcie dostávame, že pre riešenie platí

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} u^0(s) ds,$$

čo pri pevne zvolenom parametri $t > 0$ a po zavedení novej premennej $r = -\frac{x-s}{\sqrt{4a^2t}}$ dáva

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} u^0(x - r\sqrt{4a^2t}) dr.$$

Teraz poznamenajme, že funkcia $r \mapsto u^0(x - r\sqrt{4a^2t})$ je ohraničenou nezávisle od $t > 0$ a pre každé pevne zvolené $r \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} u^0(x - r\sqrt{4a^2t}) = 0$ vďaka predpokladu na funkciu u^0 . Podľa Lebesgueovej vety o dominovanej konvergencii môžeme zameniť poradie limitovania a integrovania. Potom už ľahko nahliadneme, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} \lim_{t \rightarrow \infty} u^0(x - r\sqrt{4a^2t}) dr = 0. \quad (4.11)$$

4.1.4 Nehomogénne parabolické rovnice

V tejto časti sa budeme zaoberať nehomogénnymi parabolickými úlohami

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & \text{pre } (x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T); \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre } x \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (4.12)$$

kde, na rozdiel od homogénnej úlohy (4.1), na pravej strane vystupuje zdrojový člen - zadaná funkcia $f = f(x, t)$. Úloha opäť spočíva v nájdení hladkej funkcie $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T))$, pričom u rieši parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu z (4.12) a splňa počiatočnú podmienku u^0 v čase $t = 0$, ktorá je vopred zadaná a známa.

Idea nájdenia vzorca pre riešenie má svoj koreň v metóde variácie konštánt pre riešenie nehomogénnych obyčajných diferenciálnych rovníc. Prí-
pomeňme, že ak ODR $\frac{du}{dt} + Au = 0$ s počiatočnou podmienkou $u(0) = u^0$
má riešenie $u(t) = e^{-At}u^0$, tak podľa metódy variácie konštanty neho-
mogénna úloha $\frac{du}{dt} + Au = f(t)$, $u(0) = u^0$ má riešenie v tvare $u(t) =$
 $e^{-At}u^0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}f(\tau) d\tau$. Analogicky pre riešenie nehomogénnej PDR
(4.12) bude úlohu riešiaceho operátora $e^{-At}f$ zohrávať práve vzťah (4.4)
pre riešenie homogénnej úlohy (4.1). Túto analógiu môžeme vystihnúť dia-
gramom

- *homogénna úloha*

(ODR)

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad u(0) = u^0 \Rightarrow u(t) = G(t)u^0, \quad \text{kde } G(t) = e^{-At}$$

(PDR)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(., 0) = u^0(.) \Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t)u^0(s) ds$$

- *nehomogénna úloha*

(ODR)

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = u^0 \Rightarrow u(t) = G(t)u^0 + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau) d\tau$$

(PDR)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(., t), \quad u(., 0) = u^0(.) \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t)u^0(s) ds \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t-\tau)f(s, \tau) dsd\tau \end{aligned}$$

teda riešenie nehomogénnej parabolickej rovnice (4.12) nachádzame v tvare

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t)u^0(s) ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t-\tau)f(s, \tau) dsd\tau. \quad (4.13)$$

O správnosti odvodeného vzorca (4.13) sa dá presvedčiť aj dosadením do
rovnice (4.12).

4.1.5 Prípád viacrozmernej oblasti

Cieľom tejto časti je rozšíriť vzorec riešenia aj pre prípad parabolickej rovnice v $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.14)$$

Cauchyho úloha opäť spočíva v nájdení funkcie $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$, ktorá rieši parabolickú rovnicu z (4.14) a spĺňa vopred zadanú počiatočnú podmienku u^0 v čase $t = 0$. Postup hľadania vzorca riešenia je založený na myšlienke separácie premenných $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Predpokladajme, že hľadané riešenie sa dá napísať v tvare súčiny

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = u_1(x_1, t)u_2(x_2, t) \cdots u_n(x_n, t).$$

Ak každá z funkcií $u_i = u_i(x_i, t)$ je riešením jednorozmernej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

tak potom sa poľahky dá presvedčiť, že funkcia u rieši rovnicu (4.14). S využitím vzorca riešenia pre každú funkciu u_i dostaneme

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1 - s_1, t) \cdots G(x_n - s_n, t) u_1^0(s_1) \cdots u_n^0(s_n) ds_1 \cdots ds_n.$$

Keďže

$$G(\xi_1, t)G(\xi_2, t) \cdots G(\xi_n, t) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a^2t}} =: G_n(\xi, t),$$

kde $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$, tak potom pre riešenie u dostávame vyjadrenie

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x - s, t) u^0(s) ds.$$

Uvedený vzorec sme dokázali odvodiť za predpokladu, že aj samotná počiatočná podmienka sa dá napísať ako súčin

$$u^0(x) = u_1^0(x_1)u_2^0(x_2) \cdots u_n^0(x_n).$$

Overenie vyššie uvedeného vzorca riešenia aj v prípade ľubovoľnej spojitej počiatočnej podmienky $u^0(x)$, ktorá vyhovuje rastovej podmienke (4.6), je už však analogické ako v jednorozmernom prípade $n = 1$.

4.1.6 Aplikácia na Black – Scholesov model

V tejto časti ukážeme ako uplatniť získaný vzorec na výpočet riešenia Black – Scholesovej rovnice na oceňovanie derivátov akcií. Pripomeňme, že Black – Scholesova rovnica opisujúca vývoj ceny opcie na danú akciu vyplácajúcu spojitú dividendu je parabolickou rovnicou v tvare

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & S > 0, t \in [0, T], \\ V(S, T) = \bar{V}(S), & S > 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

kde význam jednotlivých veličín je nasledovný:

- $V = V(S, t)$ je cenou opcie na akciu, pričom $S > 0$ je súčasnou cenou akcie v čase $t \in [0, T]$, $T > 0$ je časom vypršania (expirácie) opcie.

Parametrami úlohy sú:

- σ volatilita akcie, t. j. štandardná odchýlka časového vývoja ceny akcie,
- r úroková miera,
- q miera spojite vyplácanej dividendy,
- koncová podmienka $\bar{V}(S)$ je v prípade európskej Call opcie zadaná nasledovne

$$\bar{V}(S) = \begin{cases} S - E, & \text{pre } S \geq E, \\ 0, & \text{pre } 0 < S < E, \end{cases}$$

kde E je cenou akcie, na ktorú je dohodnutý opčný obchod v čase T (pozri Obr. 4.5 nižšie).

Základná myšlienka riešenia rovnice (4.15) so zadanou koncovou podmienkou spočíva v istej postupnosti transformácií tejto parabolickej rovnice, ktorá v konečnom dôsledku prejde na tvar parabolickej rovnice $u_t - u_{xx} = 0$, $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T)$ so zadanou počiatočnou podmienkou. Vo zvyšku tejto časti budeme analyzovať tieto transformácie.

◇ 1. krok - Zámena času. Spočíva v transformovaní času tak, aby plynul opačným smerom, t. j. od času vypršania expirácie T do počiatočného času $t = 0$. Zaved' me preto novú premennú $\tau = T - t$. Položme

$$W(S, \tau) = V(S, T - \tau) \text{ teda } V(S, t) = W(S, T - t).$$

S využitím vzťahu $dt = -d\tau$ rovnica (4.15) prechádza do tvaru

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - (r-q)S \frac{\partial W}{\partial S} + rW = 0, & S > 0, \tau \in (0, T), \\ W(S, 0) = \bar{V}(S), & S > 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

◇ 2. krok - *Logaritmickej transformácie ceny akcie*. Spočíva v zavedení substitúcie $S = e^x$, $x = \ln S$ a zavedení novej funkcie

$$Z(x, \tau) = W(e^x, \tau) \text{ teda } W(S, \tau) = Z(\ln S, \tau).$$

Poznamenajme, že $S \in (0, \infty)$ práve vtedy, keď $x \in (-\infty, \infty)$. Viacnásobným použitím pravidla o derivovaní zloženej funkcie dostávame

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = S \frac{\partial W}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + S \frac{\partial W}{\partial S} = S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Rovnicu (4.16) potom môžeme prepísať nasledovne:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + q\right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0, & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T), \\ Z(x, 0) = \bar{V}(e^x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.17)$$

◇ 3. krok - *Transformácia na základnú rovnicu* $u_t - a^2 u_{xx} = 0$. Členov Z a $\frac{\partial Z}{\partial x}$ sa môžeme zbaviť prostredníctvom exponenciálnej transformácie

$$u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau) \text{ t. j. } Z(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau),$$

kde konštanty α, β budú určené neskôr. Zrejme platí

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-\alpha x - \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\right), \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = e^{-\alpha x - \beta \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u\right),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = e^{-\alpha x - \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta u\right).$$

PDR pre novú funkciu u potom je

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0, & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T), \\ u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

kde $A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r + q$ a $B = (1 + \alpha)r - \beta - \alpha q - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}$. Nech konštanty α, β sú určené tak, že výrazy A, B sú nulové. Jednoduché algebraické úpravy nás presvedčia, že je to práve vtedy, keď

$$\alpha = \frac{r-q}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r+q}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-q)^2}{2\sigma^2}. \quad (4.18)$$

Takáto voľba α, β nám teda zaručí, že rovnica pre funkciu u nakoniec má tvar

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T), \\ u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.19)$$

◇ 4. krok - Aplikácia vzorca na výpočet riešenia. Rovnica (4.19) má na základe Vety 4.1 riešenie $u(x, \tau)$, ktoré sa dá napísať v tvare integrálu

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s, 0) ds.$$

Postupnosťou spätných transformácií $u \mapsto Z \mapsto W \mapsto V$ nakoniec prideme k vzťahu

$$V(S, t) = e^{-\beta(T-t)} e^{-\alpha \ln S} u(\ln S, T-t)$$

a teda

$$V(S, t) = \frac{e^{-\beta(T-t)}}{\sqrt{2\sigma^2\pi(T-t)}} S^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\ln S-s)^2}{2\sigma^2(T-t)}} e^{\alpha s} \bar{V}(e^s) ds. \quad (4.20)$$

Pre európsky typ Call opcie je našou úlohou určiť riešenie v čase $t = 0$, t. j. ako máme v súčasnosti oceniť opciu. Pre $t = 0$ a s využitím tvaru funkcie \bar{V} pre Call opciu sa vzťah (4.20) dá ďalej zjednodušiť a

$$V(S, 0) = \frac{e^{-\beta T}}{\sqrt{2\sigma^2 T}} S^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\ln E}^{\infty} e^{-\frac{(\ln S-s)^2}{2\sigma^2 T}} e^{\alpha s} (e^s - E) ds.$$

Po zavedení substitúcie $y = s - \ln S$ dostaneme

$$V(S, 0) = \frac{e^{-\beta T}}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ln \frac{S}{E}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} \left(S e^{(1+\alpha)y} - E e^{\alpha y} \right) dy. \quad (4.21)$$

Praktická realizácia výpočtu podľa horeuvedeného vzorca však vyžaduje ďalšiu úpravu tak, aby sme cenu V vyjadrili pomocou známych a tabelovaných funkcií.

Pripomeňme, že zvyšková funkcia $\text{erf}(x)$ normálneho rozdelenia je definovaná pomocou Eulerovho integrálu ako

$$\frac{1 - \text{erf}(x)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (4.22)$$

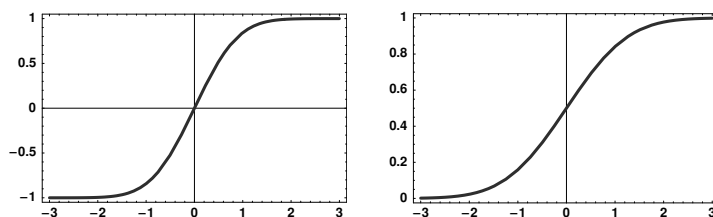
a spĺňa $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$, $\text{erf}(x) \in (-1, 1)$.

Skúmajme teraz integrál

$$I_1 = \frac{e^{-\beta T}}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ln \frac{S}{E}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T} + (1+\alpha)y} dy.$$

Zavedením transformácie $\xi = \frac{y}{\sqrt{2\sigma^2 T}} - \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{2\sigma^2 T}$ s využitím vzťahov (4.18) dostávame

$$-\frac{y^2}{2\sigma^2 T} + (1+\alpha)y = -\xi^2 + (1+\alpha)^2 \frac{\sigma^2 T}{2} = -\xi^2 + (\beta - q)T$$



Obr. 4.4: Graf zvyškovej funkcie $\text{erf}(x)$ (vľavo) a kumulatívnej distribučnej funkcie $N(x)$ (vpravo).

a teda

$$\begin{aligned}
 I_1 &= e^{-qT} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{2\sigma^2 T} - \frac{\ln \frac{S}{E}}{\sqrt{2\sigma^2 T}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\
 &= \frac{e^{-qT}}{2} \left(1 - \text{erf} \left(-\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{2\sigma^2 T} - \frac{\ln \frac{S}{E}}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \right) \right) \\
 &= \frac{e^{-qT}}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-q + \frac{\sigma^2}{2})T + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Podobne vypočítame integrál

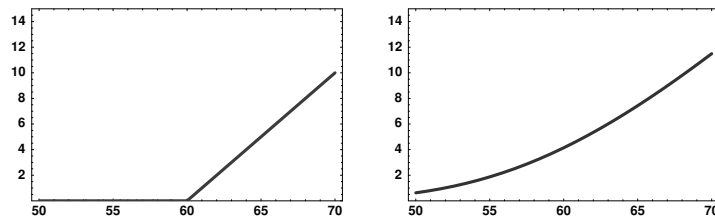
$$I_2 = \frac{e^{-\beta T}}{\sqrt{2\sigma^2 T}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ln \frac{S}{E}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T} + \alpha y} dy$$

pomocou zavedenia transformácie $\xi = \frac{y}{\sqrt{2\sigma^2 T}} - \frac{\alpha}{2}\sqrt{2\sigma^2 T}$. Pomocou vzťahu $\frac{\alpha^2}{2}\sigma^2 = \beta - r$ transformovaný integrál opäť zjednodušíme pomocou zvyškovej funkcie erf nasledovne

$$I_2 = \frac{e^{-rT}}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-q - \frac{\sigma^2}{2})T + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right)$$

Využívajúc hore uvedené vzťahy pre integrály I_1 a I_2 môžeme vzorec (4.21) pre cenu opcie $V(S, 0)$ napokon napísať v tvare:

$$\begin{aligned}
 V(S, 0) &= \frac{S e^{-qT}}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-q + \frac{\sigma^2}{2})T + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{E e^{-rT}}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(r-q - \frac{\sigma^2}{2})T + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right).
 \end{aligned}$$



Obr. 4.5: Koncová podmienka Call opcie $V(S, T)$ (vľavo). Graf riešenia oceňovania opcie $V(S, 0)$ (vpravo).

Poznamenajme, že pre zvyškovú funkciu erf platí vzťah

$$\frac{1}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi = N(x),$$

kde $N(x)$ je kumulatívna distribučná funkcia normálneho rozdelenia. Preto cena opcie $V(S, 0)$ sa dá vyjadriť aj ako

$$V(S, 0) = S e^{-qT} N(d_1) - E e^{-rT} N(d_2) \quad (4.23)$$

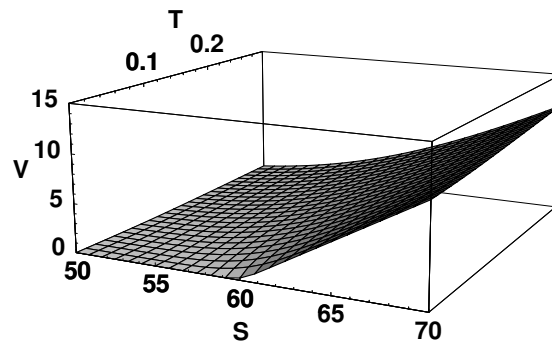
kde

$$d_1 = \frac{(r - q + \frac{\sigma^2}{2})T + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{(r - q - \frac{\sigma^2}{2})T + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Vyjadrenie (4.23) sa nazýva Black – Scholesov vzorec pre oceňovanie európskej Call opcie. Všetky konštanty a parametre vystupujúce vo vzorci by mali byť vopred známe. Štandardný príklad na výpočet ceny opcie je nasledovný:

Súčasná cena akcie firmy IBM je $S = 58,5$ \$. Jej ročná volatilita je $\sigma = 29\%$, t. j. $\sigma = 0,29$. Ročná úroková miera predstavuje $r = 4\%$, t. j. $r = 0,04$. Uzatvárame opčný obchod na cenu tejto akcie $E = 60$ \$ v expiračnej dobe opcie $T = 0,3$ roku. Dosadením týchto veličín do Black – Scholesovho vzorca dostávame, že cena opcie $V = V(58,5, 0)$ je 3.348\$.

Obrázok 4.5 (vľavo) zobrazuje koncovú podmienku $V(S, T) = \bar{V}(S)$ v čase expirácie T . Obrázok 4.5 (vpravo) zobrazuje vypočítané riešenie $V(S, 0)$ pre rôzne hodnoty súčasnej ceny S akcie IBM. Obrázok 4.6 zachytáva vývoj ceny opcie pre rôzne hodnoty expiračnej doby $T \in (0,001, 0,3)$ roka.



Obr. 4.6: Graf časového vývoja oceňovania opcie.

4.1.7 Príklady

Príklad 1. Nájdite riešenie nasledovnej Cauchyho úlohy pomocou vzorca, resp. pomocou zdravého úsudku.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T); \\ u(x, 0) = 1 & \text{pre všetky } x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Príklad 2. Nájdite riešenie nasledovnej Cauchyho úlohy.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T); \\ u(x, 0) = e^x & \text{pre všetky } x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Príklad 3. Nájdite riešenie nasledovnej nehomogénnej Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 & \text{pre všetky } (x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T); \\ u(x, 0) = e^x & \text{pre všetky } x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Príklad 4. Použitím Black – Scholesovho vzorca nájdite deriváciu ceny opcie $V(S, 0)$ vzhľadom na cenu akcie S . Načrtnite graf funkcie $\Delta(S, 0) = \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0)$.

Príklad 5. Nájdite analógiu Black – Scholesovho vzorca (4.23) (t. j. Call opcia) aj pre Put opciu, ktorá vlastne predstavuje koncovú podmienku v Black – Scholesovom modeli typu

$$\bar{V}_{put}(S) = \begin{cases} E - S, & \text{pre } 0 < S \leq E, \\ 0, & \text{pre } E < S. \end{cases}$$

Príklad 6. Ukážte, že riešenie Cauchyho úlohy (4.1) má tú vlastnosť, že pokiaľ počiatočná podmienka je integrovateľná tak, pre každý kladný čas $t > 0$ platí $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u^0(x) dx$. Výsledok sa pokúste interpretovať fyzikálne na základe modelu rozloženia teploty v nekonečnej tyči. Čo predstavuje veličina $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$?

Príklad 7. Nájdite riešenie $u = u(x, t)$ rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, pričom $u(x, 0) = e^{-x^2/2}$. Nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ pre každé $t > 0$.

Príklad 8. Nech $u = u(x, t)$ je riešenie rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, pričom $u(x, 0) = e^{-|x|}$. Nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ pre každé $t > 0$.

Príklad 9. Nech $z = z(x, t)$ je riešenie rovnice $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, pričom $z(x, 0) = e^{-x^2}$. Nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} z(x, t) dx$ pre každé $t > 0$.

Príklad 10. Nech $u = u(x, t)$ je riešenie rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, pričom $u(x, 0) = e^{x/2}$. Vypočítajte hodnotu $u(0, t)$ pre $t > 0$.

Príklad 11. Nech $u = u(x, t)$ je riešenie rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, pričom $u(x, 0) = x^{2007}$. Ukážte, že pre každé $t > 0$ je funkcia $u(x, t)$ rastúca v premennej x .

Príklad 12. Pomocou transformácie $x = \ln s$ nájdite riešenie $u = u(s, t)$ rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + s \frac{\partial u}{\partial s}$, $s > 0, t > 0$, pričom $u(s, 0) = 1$, $s > 0$.

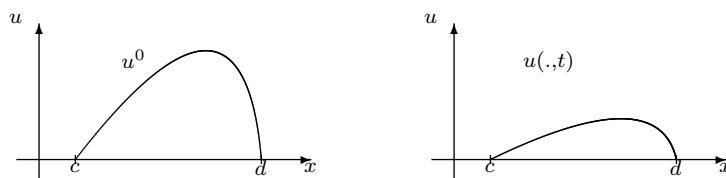
Príklad 13. Ukážte, že samotná Greenova funkcia $G(x, t)$ je riešením rovnice (4.1). S využitím tohto faktu ukážte, že $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t)u^0(s)ds$ je riešením rovnice (4.1).

4.2 Fourierova metóda separácie premenných pre ohraničenú oblasť

4.2.1 Motivácia a hlavná myšlienka

Prvotnou motiváciou je štúdium rozloženia teploty v ohraničenej tyči. Na rozdiel od neohraničeného prípadu, významnú úlohu teraz zohráva nastavenie teploty na koncoch tyče. Je očividné, že rôznym tzv. okrajovým podmienkam teploty, budú zodpovedať rôzne riešenia.

Uvažujme prípad, keď je tyč na koncoch chladená (alebo zahrievaná) tak, že sa nám darí udržiavať konštantnú nulovú teplotu. Tyč budeme chápať ako ohraničený interval (c, d) reálnej osi. Na začiatku v čase $t = 0$



Obr. 4.7: Počiatočné rozloženie teploty a vývoj teploty v čase $t > 0$

predpokladajme, že tyč je zahriata tak, že rozdelenie teploty je funkciou $u^0(x)$ (pozri Obr. 4.70, ktorá sa nazýva počiatočná podmienka. Obrázok 4.7 (vľavo) znázorňuje počiatočné rozloženie teploty, pričom sú splnené aj okrajové podmienky. Obrázok 4.7 (vpravo) zachytáva vývoj rozloženia teploty v ohraničenej tyči v kladnom čase $t > 0$. Navyše požadujeme splnenie okrajovej podmienky $u(c, t) = u(d, t) = 0$ pre všetky $t > 0$. Okrajová podmienka tohto typu sa nazýva Dirichletova okrajová podmienka.

Poznámka 4.2. Poznamenajme, že udržiavaním nulovej teploty v koncových bodoch dochádza z energetického hľadiska k odčerpávaniu tepelnej energie z vnútra tyče smerom von do okolitého prostredia. To znamená, že sa dá očakávať, že riešenie klesá pozdĺž smeru vonkajšej normály v koncových bodoch, t. j. $du/d\vec{n} < 0$ v $x = c$ a $x = d$, ak $u > 0$ v intervale (c, d) . \diamond

Podobne ako v prípade nekonečne dlhej tyče, tak aj v prípade ohraničenej tyče bude základnou fyzikálnou rovnicou parabolická PDR vedenia tepla. Doplnená bude začiatočnou a okrajovými podmienkami.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in (c, d) \times (0, T), \\ u(c, t) = u(d, t) = 0 & \text{pre všetky } t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre všetky } x \in (c, d). \end{cases} \quad (4.24)$$

Úloha spočíva v nájdení funkcie $u \in C^2((c, d) \times (0, T)) \cap C([c, d] \times (0, T))$, (t. j. u je funkcia dvakrát spojitely diferencovateľná vo vnútri oblasti $(c, d) \times (0, T)$ a je spojitá až do hranice $[c, d]$), pričom u rieši parabolickú PDR a spĺňa okrajové podmienky a počiatočnú podmienku. Poznamenajme, že počiatočná podmienka je vopred zadaná a známa.

4.2.2 Metóda hľadania riešenia pomocou separácie premenných

Myšlienka metódy separácie premenných pochádza od J.B. Fouriera, idey rozkladu hľadaných riešení do radov funkcií však boli známe aj skôr. Zá-

klad metódy tvorí predpoklad o konštruovaní riešenia pomocou istých základných stavebných kameňov – funkcií, ktoré sa dajú písať v separovateľnom tvare premenných x a t . Hľadáme preto riešenie $u(x, t)$ rovnice (4.24) v tvare

$$u(x, t) = \alpha(t)\phi(x), \quad (4.25)$$

kde funkcie α, ϕ sú reálnymi funkciami jednej reálnej premennej.

V ďalšom texte prijmeme označenie, na základe ktorého deriváciu podľa t budeme značiť $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ a deriváciu podľa priestorovej premennej x ako $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$. Potom PDR rovnica v (4.24) sa transformuje nasledovne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 \\ \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow & \\ \dot{\alpha}(t)\phi(x) - a^2\alpha(t)\phi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Z tohto vzťahu však poľahky vyplýva, že pokiaľ riešenie u má mať tvar (4.25), tak nevyhnutne musí byť splnená rovnosť

$$-\frac{1}{a^2} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = -\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad (4.26)$$

pre každé $t > 0$ a $x \in (c, d)$. Teraz si všimnime, že

- ľavá strana je iba funkciou premennej t , kým
- pravá strana je iba funkciou premennej x .

Keďže premenné x a t na sebe nezávisia, znamená to, že musí existovať jedna spoločná konštanta λ nezávislá od x a od t taká, že

$$-\frac{1}{a^2} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = \lambda \quad \text{a zároveň} \quad -\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \lambda,$$

pre všetky $x \in (c, d)$ a $t > 0$. Pôvodný problém hľadania funkcie u dvoch premenných x, t sa teda rozštiepil na dva samostatné problémy pre každú z premenných zvlášť. Konkrétne, úloha pre funkciu $\alpha = \alpha(t)$ predstavuje nájsť riešenie počiatkovej úlohy pre ODR

$$(P) \quad \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -\lambda a^2 \alpha(t), & t > 0, \\ \alpha(0) = \alpha^0, \end{cases} \quad (4.27)$$

kde α^0 je počiatkovou podmienkou, ktorú určíme neskôr.

Na to, aby sme zabezpečili splnenie Dirichletovej okrajovej podmienky pre funkciu $u(x, t)$, musíme vyžadovať, aby funkcia ϕ spĺňala Dirichletove

okrajové podmienky v bodoch c a d . Funkcia ϕ preto musí byť (netriviálnym) riešením okrajovej úlohy pre ODR:

$$(O) \quad \begin{cases} -\phi''(x) = \lambda\phi(x), \\ \phi(c) = \phi(d) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Zdôraznime, že systémy (4.27) a (4.28) sú navzájom previazané stále neznámou hodnotou parametra λ .

◇ *Riešenie okrajovej úlohy (O)*. Začnime riešiť okrajovú úlohu (O). Hľadáme netriviálne riešenie ϕ , t. j. funkciu, ktorá nie je identicky nulová. Z dôvodu lepšej názornosti výkladu sa obmedzíme iba na prípad, keď interval $(c, d) = (0, 1)$. Riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu zistíme, že riešenie ϕ musí byť nevyhnutne lineárnou kombináciou funkcií $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ a $\cos(\sqrt{\lambda}x)$, t. j. $\phi(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$. Dosadením požiadavky na splnenie okrajových podmienok $\phi(0) = \phi(1) = 0$ dostávame, že $B = 0$ a nevyhnutne $\lambda = k^2\pi^2$ pre niektoré prirodzené $k \in \mathbb{N}$. Konštanta $A \neq 0$ je ľubovoľná. Vezmime preto $A = 1$, t. j.

$$\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}x) \text{ pre } x \in (0, 1), \quad \lambda_k = k^2\pi^2, \quad (4.29)$$

pričom indexom $k \in \mathbb{N}$ chceme zvýrazniť ten fakt, že existuje spočítateľne veľa riešení - dvojíc (ϕ_k, λ_k) , $k \in \mathbb{N}$, ktoré riešia okrajový problém (O).

V prípade všeobecného intervalu (c, d) sa čitateľ ľahko presvedčí, že riešeniami úlohy (O) sú dvojice (ϕ_k, λ_k)

$$\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x - c)) \quad x \in (c, d), \quad \lambda_k = \frac{k^2}{(d - c)^2}\pi^2. \quad (4.30)$$

Poznamenajme, že v lineárnej algebre sa úloha na určenie netriviálneho vektora ϕ a čísla λ takých, že $A\phi = \lambda\phi$, kde A je daná matica, nazýva problém vlastných hodnôt a vlastných vektorov. Analogicky, keď úlohu matice A preberie operátor druhej derivácie, môžeme na problém (O) nahliadať aj ako na vlastnohodnotový problém vo vhodnom priestore funkcií. Na rozdiel od konečnorozmerných matic, v našom prípade existuje spočítateľne nekonečne veľa vlastných vektorov ϕ_k a vlastných čísel λ_k , $k \in \mathbb{N}$.

◇ *Riešenie počiatkovej úlohy (P)*. Poznajúc hodnotu konštanty $\lambda = \lambda_k$ môžeme pristúpiť k vyriešeniu počiatkovej úlohy (P). Tá je však v separovanom tvare a tak integráciou poľahky dostávame, že riešenie $\alpha = \alpha_k(t)$ je dané vzťahom

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 e^{-\lambda_k a^2 t}, \quad (4.31)$$

kde konštanta α_k^0 je počiatkovou podmienkou. Potom riešenie $u = u_k(x, t)$ má tvar

$$u_k(x, t) = \alpha_k^0 e^{-\lambda_k a^2 t} \phi_k(x). \quad (4.32)$$

Táto funkcia je skutočne riešením PDR spĺňajúca Dirichletovu okrajovú podmienku. Všimnime si jeden podstatný nedostatok tohto riešenia a to fakt, že funkcia u_k nemusí vo všeobecnosti vyhovovať počiatkovej podmienke $u(x, 0) = u^0(x)$, pretože podľa (4.32) je $u_k(x, 0) = \alpha_k^0 \phi_k(x)$, kde α_k^0 je nejakou konštantou. Teda $u_k(x, t)$ je len multiplikatívny násobok funkcie $\sin(k\pi x)$.

◇ *Riešenie úlohy (4.24) pre ľubovoľnú počiatkovú podmienku.* Úlohu s ľubovoľnou počiatkovou podmienkou vyriešime tak, že funkcie $u_k(x, t)$ budeme vhodne násobiť a sčítavať tak, aby sme v ich súčte získali funkciu $u(x, t)$, ktorá už bude spĺňať zadanú počiatkovú podmienku. Pripomeňme, že máme stále k dispozícii voľbu konštant $\alpha_k^0, k \in \mathbb{N}$.

Uvažujme opäť pre jednoduchosť interval premennej $x \in (c, d) = (0, 1)$. Predpokladajme, že počiatková podmienka $u^0(x)$ má tú vlastnosť, že jej Fourierov trigonometrický rad k nej konverguje bodovo v intervale $(0, 1)$, t. j. $u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \sin(k\pi x)$. Pripomeňme, že (nie celkom iba zhodou náhod platí) $\lambda_k = k^2\pi^2$ a $\sin(k\pi x) = \phi_k(x)$ a teda

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \phi_k(x). \quad (4.33)$$

pripomeňme, že každá, po čiastkach spojitá funkcia, sa dá rozvinúť do trigonometrického radu, ktorý konverguje k funkcii $u^0(x)$ v každom bode spojitosti funkcie $u^0(x)$.

Všeobecná idea konštrukcie riešenia úlohy (4.24) spočíva v hľadaní funkcie $u(x, t)$ v tvare trigonometrického radu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \phi_k(x) \quad (4.34)$$

s časovo závislými koeficientami $\alpha_k(t)$. Predpokladajúc, že môžeme uskutočniť všetky zámény sumovania a derivovania, formálne dosadíme horeuvedený rad do rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{\alpha}_k(t) \phi_k(x) + a^2 \alpha_k(t) (-\phi_k''(x))) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} ((\dot{\alpha}_k(t) + a^2 \lambda_k \alpha_k(t)) \phi_k(x)) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

V predposlednej rovnosti sme využili fakt, že vlastná funkcia $\phi_k(x)$ rieši okrajovú úlohu (O). V poslednej rovnosti sme využili fakt, že funkcia $\alpha_k(t)$

rieši počiatočnú úlohu (P). Získali sme tak (zatiaľ iba formálne) výraz pre hľadané riešenie v tvare radu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k a^2 t} \phi_k(x), \quad (4.36)$$

kde koeficienty α_k^0 sú určené vzťahom (4.33).

Zostáva nám preveriť, že sme skutočne mohli derivovať rad (4.36) člen po člene, dvakrát podľa premennej x a raz podľa premennej t . Trigonometrický Fourierov rad $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k\pi x)$ funkcie f môžeme p -krát derivovať člen po člene pokiaľ je známe, že číselný rad koeficientov $|f_k|$ je dominovaný konvergentným radom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$. V našom prípade pre každý pevne zvolený čas $t > 0$ platí, že koeficient $\alpha_k(t)$ klesá ako exponenciálna funkcia vzhľadom na k pre $k \rightarrow \infty$ a tým skôr klesá rýchlejšie ako ľubovoľná mocnina $\frac{1}{k^{p+1}}$. To ale znamená, že rad (4.36) sme skutočne mohli derivovať člen po člene ľubovoľne veľakrát podľa x . Podobný argument uplatnený vzhľadom na parameter t v tvare (4.36) nám umožní dokázať, že sme mohli derivovať aj vzhľadom na premennú t . Tým sme ukázali, že funkcia $u(x, t)$ definovaná vzťahom (4.36) je skutočne riešením rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = 0$.

Na koniec nám ostáva ešte diskutovať zmysel splnenia počiatočnej podmienky $u^0(x)$. Keďže $\alpha_k(0) = \alpha_k^0$ tak podľa (4.33) zrejme platí, že $u(x, 0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u^0(x)$ v bodoch spojitosti funkcie $u^0(x)$.

Poznamenajme, že ako bočný výsledok analýzy o diferencovaní riešenia $u(x, t)$ sme ukázali aj jeho vlastnosť, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ a pevne zvolené $t > 0$ platí

$$u(\cdot, t) \in C^k(c, d). \quad (4.37)$$

Nakoniec tejto časti uvedieme príklad konkrétneho výpočtu riešenia homogénnej parabolickej rovnice.

Príklad 4.2.2.1 Hľadáme riešenie nasledovnej úlohy Fourierovou metódou separácie premenných.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(c, t) = u(d, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0, \\ u(x, 0) = x(1-x) & \text{pre všetky } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (4.38)$$

Na základe predošlej analýzy je kľúčovým krokom riešenia určenie koeficientov α_k^0 tak, aby $u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \phi_k(x)$. Poznamenajme, že platí

$$\int_0^1 \phi_k(x) \phi_m(x) dx = \int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 1/2 & \text{pre } m = k, \\ 0 & \text{pre } m \neq k. \end{cases} \quad (4.39)$$

To znamená, že ak má platiť trigonometrický rozvoj (4.33) funkcie $u^0(x)$, tak vynásobením u^0 funkciou ϕ_m a následným integrovaním dostaneme $\int_0^1 u^0(x)\phi_m(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \int_0^1 \phi_k(x)\phi_m(x) dx = \alpha_m^0/2$, a teda

$$\alpha_m^0 = 2 \int_0^1 u^0(x)\phi_m(x) dx = 2 \int_0^1 u^0(x) \sin(m\pi x) dx. \quad (4.40)$$

V našom prípade $u^0(x) = x(1-x)$ a teda, po krátkom výpočte integrálu dostávame

$$\alpha_m^0 = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} -\frac{8}{m^3\pi^3} & \text{pre } m \text{ nepárne} \\ 0 & \text{pre } m \text{ párne} \end{cases}$$

Nakoniec riešenie $u(x, t)$ môžeme písať v tvare trigonometrickej sumy

$$u(x, t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^3} e^{-(2l-1)^2\pi^2 t} \sin((2l-1)\pi x).$$

◇

Sumarizovaním tvrdení tejto časti dostávame nasledovnú vetu o riešení parabolického problému (4.24) spĺňajúce zadanú počiatočnú podmienku a nulové Dirichletove okrajové podmienky.

Tvrdenie 4.2. *Nech $u^0(x)$ je po častiach spojitá funkcia na intervale $[c, d]$. Potom existuje riešenie $u = u(x, t)$ parabolickej úlohy*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in (c, d), t > 0,$$

vyhovujúce počiatočnej podmienke $u(x, 0^+) = u^0(x)$ v bodoch spojitosti funkcie u^0 a Dirichletovým okrajovým podmienkam $u(c, t) = u(d, t) = 0$ pre $t > 0$. Toto riešenie môže byť explicitne vyjadrené v tvare trigonometrického Fourierovho radu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k a^2 t} \phi_k(x),$$

kde dvojice $(\phi_k(x), \lambda_k)$, $k \in N$, sú riešeniami vlastnohodnotového problému (O) – (4.28) a sú určené vzťahom (4.30). Koeficienty α_k^0 sú Fourierove koeficienty rozvoja (4.33) funkcie u^0 a s sú dané vzťahom (4.40).

4.2.3 Príklady výpočtu riešenia použitím Fourierovej metódy

V tejto časti sa zameriame na konkrétne vyčíslenie riešenia $u(x, t)$ pre parabolické rovnice. V oboch nižšie uvedených príkladoch použijeme Fourierovu metódu separácie premenných. Na výpočet Fourierových koeficientov α_m^0 bol použitý algoritmus na numerický výpočet určitého integrálu (4.40) nachádzajúci sa v programovom balíku `Mathematica`.

Príklad 4.2.3.1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

kde počiatková podmienka je po častiach lineárna funkcia zobrazená na Obr. 4.8-4.9. Numerické riešenie bolo získané Fourierovou metódou separácie premenných, pričom na dostatočne dobré aproximovanie riešenia bolo využité iba prvých päť členov Fourierovho radu, t. j. $u(x, t) \approx \sum_{k=1}^5 \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi x)$. Jednotlivé koeficienty $\alpha_k^0, k = 1, \dots, 5$, rozvoja funkcie $u(x, t)$ boli vypočítané nasledovne:

$$\alpha_1^0 = 1,146318, \alpha_2^0 = 0,202642, \alpha_3^0 = 0,127368, \alpha_4^0 = 0, \alpha_5^0 = -0,04585.$$

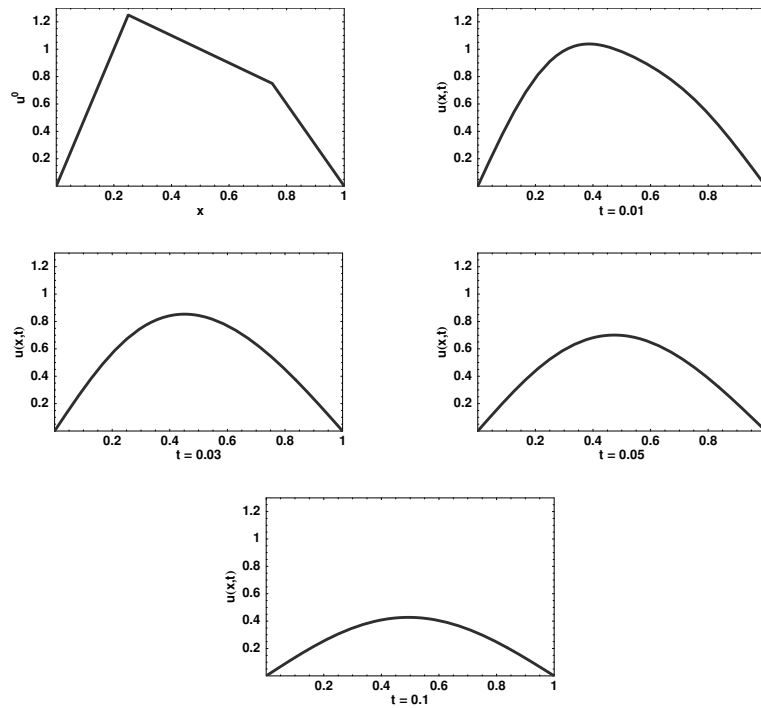
Príklad 4.2.3.2

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

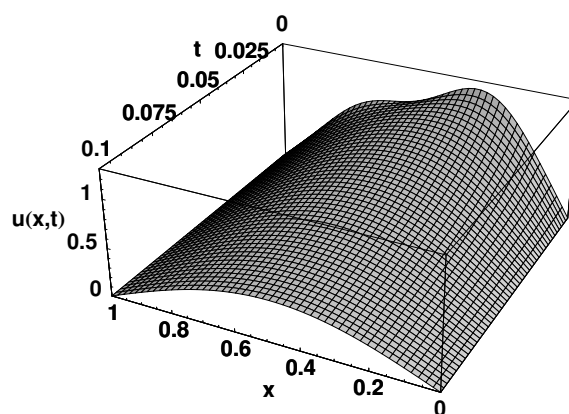
kde funkcia $f(x) = e^{-100(x-0,2)^2}$ je zobrazená na Obr. 4.10-4.11. Numerické riešenie bolo opäť získané Fourierovou metódou separácie premenných za použitia algoritmov numerického integrovania zo systému `Mathematica`. Jednotlivé koeficienty $\alpha_k^0, k = 1, \dots, 5$, rozvoja funkcie $u(x, t)$ boli vypočítané nasledovne: $\alpha_1^0 = 0,203340, \alpha_2^0 = 0,305562, \alpha_3^0 = 0,270161, \alpha_4^0 = 0,140607, \alpha_5^0 = 0,000249$.

4.2.4 Princíp porovnávania riešení

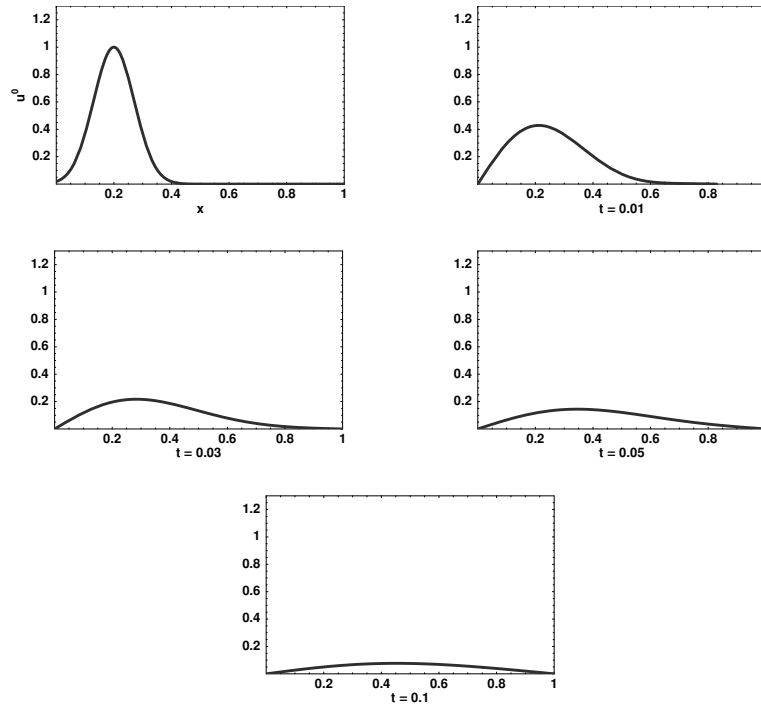
Podobne ako v časti 4.1.2 (princíp porovnania riešení pre Cauchyho úlohu na neohraničenom intervale), môžeme aj pre úlohu (4.24) sformulovať podobný výsledok. Nech u_1^0, u_2^0 sú dve rôzne počiatkové podmienky, ktoré sú usporiadané v tom zmysle, že $u_1^0(x) \leq u_2^0(x)$ pre všetky $x \in (c, d)$. Používajúc fyzikálnu motiváciu úlohou o rozložení teploty v tyči konečnej dĺžky môžeme opäť uvažovať o dvoch tepelných dejoch (dve zahriate tyče), pri ktorých je rozloženie teploty na začiatku v usporiadanom stave, t. j. že v danom bode priestoru je teplota v prvej tyči menšia alebo rovná teplote v



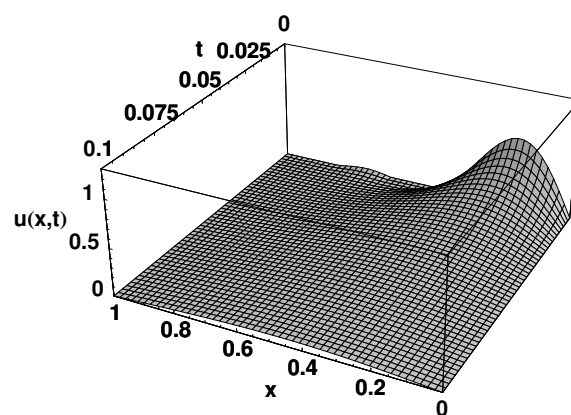
Obr. 4.8: Znázornenie časového vývoja riešenia parabolickej rovnice (4.41) na ohraničenom intervale so zadanými Dirichletovými okrajovými podmienkami a počiatkovou podmienkou. Postupom času je vidno vyhladenie riešenia a postupné rozpadanie sa riešenia, t. j. vplyv difúzneho procesu na tvar riešenia.



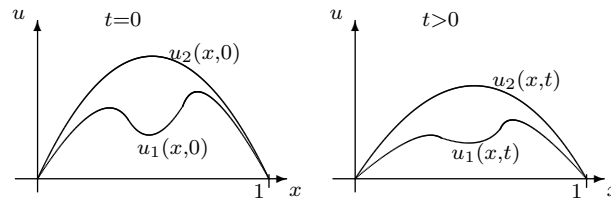
Obr. 4.9: Časopriestorový graf vývoja získaného riešenia.



Obr. 4.10: Znáznorenie časového vývoja riešenia parabolickej rovnice (4.42). Opäť je možno pozorovať rozpad riešenia a konvergenciu riešenia k nule.



Obr. 4.11: Časopriestorový graf vývoja získaného riešenia.



Obr. 4.12: Znázornenie princípu porovnania riešení. Usporiadané počiatočné podmienky v začiatočnom čase (ľavý obrázok) a stav riešení v kladnom budúcom čase (pravý obrázok).

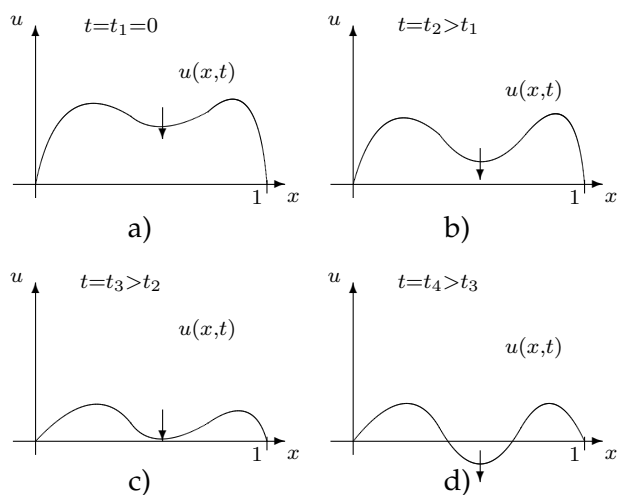
druhej na tom istom mieste $x \in (c, d)$. Tá istá fyzikálna skúsenosť ako pri odvodzovaní princípu porovnania v Kapitole 4.1.2, nám hovorí, že rozloženie teploty v každom budúcom čase $t > 0$ bude znovu v usporiadanom stave, teda $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$. Keďže PDR $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ je lineárna rovnica, môžeme skúmať rozdiel riešení $u(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$. Cieľom je teda nahliadnuť, že platí implikácia:

$$u(x, 0) > 0 \text{ pre } x \in (c, d) \Rightarrow u(x, t) > 0 \text{ pre každé } x \in (c, d) \text{ a } t > 0. \quad (4.43)$$

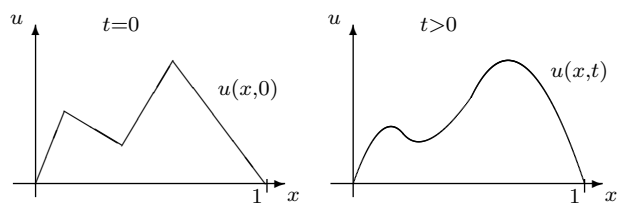
Predpokladajme sporom, že neplatí implikácia (4.43). To ale znamená, že nastáva prípad, ktorý je znázornený na Obr. 4.13. Teda predpokladáme, že by sa v nejakom kladnom čase $t = t_3$ riešenie „dotklo“ nuly (Obr. 4.13 – c)) a následne by pre nasledujúce časy malo aj záporné hodnoty. Všimnime si čas $t = t_3$ a bod x_{min} minima funkcie $u(\cdot, t)$ (naznačený vektor). V tomto bode musí byť druhá derivácia $u_{xx}(x_{min}, t_3)$ nevyhnutne nezáporná. Keďže platí $u_t = a^2 u_{xx}$, tak potom je nezáporná aj časová derivácia $u_t(x_{min}, t_3)$. Preto „minimum“ nemôže v ďalšom časovom okamihu pokračovať smerom nadol k záporným hodnotám, ale musí naopak stúpať. Teda naznačené vektory pohybu sú v rozpore s požiadavkou, že $u(x, t)$ rieši parabolickú rovnicu. To je spor, na základe ktorého môžeme usudzovať, že implikácia (4.43) platí. Poznamenajme však súčasne, že geometrický argument má svoje nedostatky a predvedený „dôkaz“ nie je úplne korektný. Je však názorný a vystihuje podstatu veci. Presný dôkaz sa dá nájsť v Arseninovej alebo Evansovej knihe [1, 7].

4.2.5 Princíp zhladzovania riešenia

Podobne ako v prípade Cauchyho úlohy na neohraničenom intervale (4.1) sa prvý dôsledok získania riešenia v tvare trigonometrickej sumy (4.36)



Obr. 4.13: Znáznorenie sporu pri nedodržíaní princípu usporiadania riešení. Kladná počiatková podmienka (a), z ktorej sa postupne vytvára riešenie, ktoré zmení znamienko (b)-(d).



Obr. 4.14: Znáznorenie zhladzovacieho efektu. Počiatková podmienka je iba spojité funkcia (ľavý obrázok); v ľubovoľnom budúcom čase je už riešenie hladká funkcia v priestorovej premennej (pravý obrázok).

týka hladkosti riešenia. Konkrétne si všimnime vlastnosť (4.36), ktorá nám hovorí, že pre každý kladný čas $t > 0$ je riešenie $u(x, t)$ ľubovoľne veľakrát spojitely diferencovateľné v premennej $x \in (c, d)$, nech už počiatková podmienka bola akákoľvek spojitá funkcia.

Efekt zhladzovania riešenia je dobre badateľný aj na príklade 4.2.3.1, kde počiatkovou podmienkou je po častiach lineárna funkcia kým riešenie $u(x, t)$, $t > 0$, je už hladká funkcia v x (pozri Obr. 4.14).

Druhý dôsledok sa týka asymptotického správania sa riešenia pre $t \rightarrow \infty$. Keď formálne zameníme poradie limitovania a sumovania v rade (4.36) dostaneme, že platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k a^2 t} \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_k a^2 t} \phi_k(x) = 0,$$

t. j. riešenie $u(x, t)$ problému (4.24) bodovo konverguje k nule pre $t \rightarrow \infty$. Konvergenzie k nule je zreteľná aj z druhého numericky vyriešeného príkladu 4.2.3.2 a Obr. 4.9. Samozrejme si musíme byť vedomí formálnosti predvedeného argumentu o zámene limitovania a sumovania. Presný argument je založený na dôkaze, že integrál kvadrátu parciálnej derivácie $\int_c^d |u_x(x, t)|^2 dx$ konverguje k nule pre $t \rightarrow \infty$ (to je dôsledok tzv. Parsevalovej rovnosti pre Fourierove rady) a nerovnosti

$$\max_{x \in (c, d)} |f(x)| \leq \int_c^d |f'(x)| dx \leq \sqrt{(d-c) \int_c^d |f'(x)|^2 dx},$$

ktorá platí pre každú funkciu f takú, že $f(c) = 0$.

4.2.6 Nehomogénne rovnice

V tejto časti sa budeme zaoberať nehomogénnymi parabolickými rovnicami. Konkrétne budeme uvažovať parabolickú úlohu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & \text{pre všetky } (x, t) \in (c, d) \times (0, T), \\ u(c, t) = u(d, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre všetky } x \in (c, d), \end{cases} \quad (4.44)$$

so zadanou počiatkovou podmienkou a okrajovými podmienkami. Na rozdiel od homogénneho prípadu (4.24), uvažujeme pôsobenie (vo všeobecnosti nenulovej) pravej strany $f(x, t)$.

Myšlienka riešenia je opäť založená na hľadaní riešenia v tvare trigonometrického Fourierovho radu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \phi_k(x) \quad (4.45)$$

s časovo závislými koeficientami $\alpha_k(t)$. Predpokladajme, že poznáme rozklad zadanej funkcie $f(x, t)$ do trigonometrického Fourierovho radu

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x),$$

pričom predpokladáme, že tento Fourierov rad konverguje bodovo v intervale (c, d) s výnimkou konečného počtu bodov. To je napríklad splnené, ak $f(x, t)$ je po častiach spojitá funkcia v premennej $x \in [c, d]$. Ak teraz dosadíme funkciu $u(x, t)$ vyjadrenú pomocou radu (4.44) do rovnice $u_t - a^2 u_{xx} = f$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t) \\ \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{\alpha}_k(t) \phi_k(x) + a^2 \alpha_k(t) (-\phi_k''(x))) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x) \\ \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{\alpha}_k(t) \phi_k(x) + a^2 \lambda_k \alpha_k(t) \phi_k(x)) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x). \end{aligned}$$

To ale znamená, že jednotlivé koeficienty na ľavej a pravej strane pri každej funkcii $\phi_k(x)$ musia byť rovnaké, t. j.

$$\dot{\alpha}_k(t) + a^2 \lambda_k \alpha_k(t) = f_k(t) \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \quad (4.46)$$

Počiatkové hodnoty $\alpha_k^0 = \alpha_k(0)$ sú určené na základe zadanej počiatkovej podmienky $u(x, 0) = u^0(x)$,

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \phi_k(x). \quad (4.47)$$

V prípade intervalu $(c, d) = (0, 1)$ máme

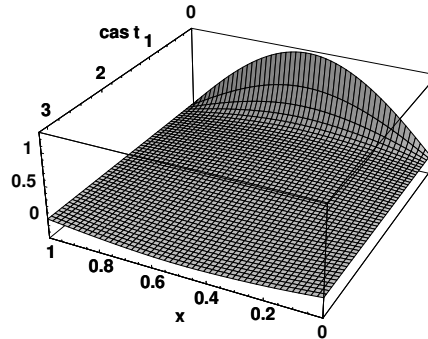
$$\alpha_k^0 = 2 \int_0^1 u^0(x) \sin(k\pi x) dx, \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin(k\pi x) dx.$$

Systém rovníc (4.46), spolu s počiatkovými podmienkami (4.47), predstavuje sčítateľný systém ODR, ktoré môžeme riešiť integráciou.

Uvedieme konkrétny príklad výpočtu riešenia nehomogénnej rovnice.

Príklad 4.2.6.1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(t) & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases} \quad (4.48)$$



Obr. 4.15: Časopriestorový graf získaného riešenia.

Zrejme $u^0(x) = \sin(\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \phi_k(x)$, kde $\alpha_1^0 = 1$ a $\alpha_k^0 = 0$ pre $k \geq 2$. Pravá strana $f(x, t) = \cos(t)$ sa dá rozvinúť do radu

$$f(x, t) = \cos(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(t) \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) \phi_k(x)$$

a teda $f_k(t) = \cos(t) \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k)$. Máme teda riešiť ODR

$$\dot{\alpha}_k(t) + \lambda_k \alpha_k(t) = f_k(t).$$

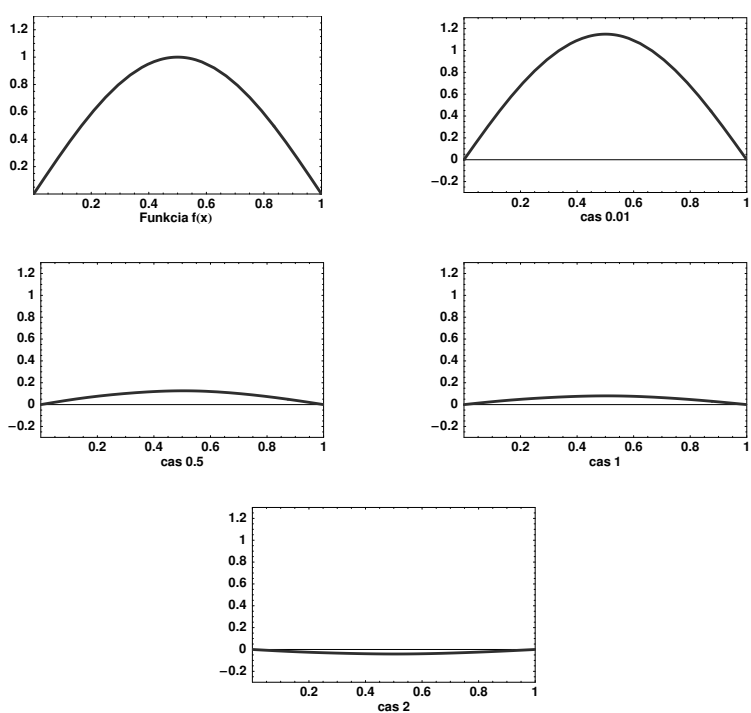
Metódou variácie konštánt dostaneme, že riešenie $\alpha_k(t)$ je určené vzťahom

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s) \, ds \\ &= \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}} (1 - (-1)^k) \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \cos(s) \, ds \\ &= \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}} (1 - (-1)^k) \frac{1}{1 + \lambda_k^2} (\sin(t) + \lambda_k \cos(t) - \lambda_k e^{-\lambda_k t}). \end{aligned}$$

Jednotlivé $\alpha_k(t)$ sú potom určené vzťahmi

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= e^{-\lambda_1 t} + \frac{4}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{1}{1 + \lambda_1^2} (\sin(t) + \lambda_1 \cos(t) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) & k = 1, \\ \alpha_k(t) &= \frac{4}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{1}{1 + \lambda_k^2} (\sin(t) + \lambda_k \cos(t) - \lambda_k e^{-\lambda_k t}) & k \text{ nepárne}, \\ \alpha_k(t) &= 0 & k \text{ párne}. \end{aligned}$$

Pripomeňme, že $\lambda_k = k^2 \pi^2$. Potom aproximácia riešenia $u(x, t)$ do piateho rádu rozvoja bude $u(x, t) \approx \sum_{k=1}^5 \alpha_k(t) \sin(k\pi x)$. Nasledovné obrázky Obr. 4.16-4.15 zachytávajú grafické znázornenie riešenia $u(x, t)$.



Obr. 4.16: Znáznorenie časového vývoja riešenia parabolickej rovnice (4.48) na ohraničenom intervale so zadanými Dirichletovými okrajovými podmienkami a počiatočnou podmienkou a nenulovou pravou stranou.

4.2.7 Príklady

Príklad 1. Nájdite riešenie nasledovnej úlohy Fourierovou metódou.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 1 & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases}$$

Načrtnite graf riešenia.

Príklad 2. Nájdite riešenie nasledovnej úlohy Fourierovou metódou.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0 & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases}$$

Návod: Najprv nájdite vhodné posunutie w funkcie u tak, aby pre posunutú funkciu $v = u - w$ boli splnené nulové okrajové podmienky.

Príklad 3. Nájdite riešenie nasledovnej úlohy Fourierovou metódou.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = \sin(t), \quad u(1, t) = 1 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases}$$

Príklad 4. Nájdite riešenie nasledovnej úlohy s Neumanovou okrajovou podmienkou

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 1 & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases}$$

Načrtnite graf riešenia. Návod: Namiesto rozvoja riešenia do radu sínusov uvažujte rozvoj do kosínusového radu $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \cos(k\pi x)$.

Príklad 5. Nech $u(x, t)$ je riešením parabolickej rovnice s Dirichletovou okrajovou podmienkou

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases}$$

Ukážte, že „energia“ riešenia $E(t) = \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$ je nerastúca funkcia v čase $t > 0$. Dokážte, že $\int_0^{\infty} \int_0^1 |u_x(x, t)|^2 dx dt < +\infty$.

Príklad 6. Nech $u(x, t)$ je riešením parabolickej rovnice s Neumanovou okrajovou podmienkou

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pre všetky } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases}$$

Ukážte, že „celkové množstvo tepla“, t. j. veličina $K(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$ je konštantná v čase $t > 0$, t. j. $K(t) = K(0) =: K_0$ pre všetky $t > 0$. Dokážte, že $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = K_0$ pre každé $x \in (0, 1)$.

Príklad 7. Nájdite riešenie $u = u(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$u(x, 0) = 2 \sin(\pi x) \cos(2\pi x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Príklad 8. Nájdite riešenie $u = u(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Príklad 9. Nájdite riešenie $u = u(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = t.$$

Príklad 10. Nech $u = u(x, t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1 - x.$$

Ukážte, že Lyapunovov funkcionál energie $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$ je nerastúcou funkciou času, t. j. $E'(t) \leq 0$ pre každé $t > 0$.

Príklad 11. Nech $u = u(x, t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x).$$

Ukážte, že Lyapunovov funkcionál energie $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$ je nerastúcou funkciou času, t. j. $E'(t) \leq 0$ pre každé $t > 0$ a navyše $E(t) \leq e^{-2t} E(0)$.

Príklad 12. Nájdite riešenie $z = z(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$z(x, 0) = x, \quad z(0, t) = \sin(t), \quad z(1, t) = \cos(t).$$

Príklad 13. Nájdite riešenie $z = z(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^t \sin(\pi x), \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0.$$

Príklad 14. Nájdite riešenie $z = z(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \sin(\pi x) \cos(2\pi x), \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0.$$

Kapitola 5

Eliptické parciálne diferenciálne rovnice

5.1 Motivácia štúdia eliptických rovníc

Existuje viacero oblastí použitia eliptických parciálnych diferenciálnych rovníc. Tento typ rovníc sa vyskytuje najmä v rôznych modeloch opisujúcich stacionárne (t. j. časovo ustálené) stavy fyzikálnych systémov. Prípoemeňme, že na základe Kapitoly 2.3, je tvar lineárnej eliptickej parciálnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou f nasledovný

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (5.1)$$

kde a_{ij}, b_i, c, f sú zadané funkcie n -rozmernej premennej $x = (x_1, \dots, x_n)$, pričom matica $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1, \dots, n}$ je kladne (resp. záporne) definitná. Neznámou je funkcia $u = u(x)$.

Príkladom eliptickej rovnice je tzv. Poissonova diferenciálna rovnica¹

$$-\Delta u = f, \quad (5.2)$$

kde Δ je tzv. Laplaceov operátor² definovaný ako $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

¹Siméon Denis Poisson (1781-1840) fr. matematik a fyzik. Zaoberal sa najmä diferenciálnymi rovnicami, teóriou pružnosti a pevnosti, termodynamikou (Poissonov zákon $p v^\kappa = \text{const}$).

²Pierre Simon markíz de Laplace (1749-1827) brit. matematik, fyzik, astronóm a filozof. Zaoberal sa najmä matematickou analýzou, teóriou pravdepodobnosti, elektromagnetizmom a nebeskou mechanikou. Vytvoril teóriu o vzniku slnečnej sústavy z rotujúcej hmloviny, analyzoval rovnice pre potenciál elektrického poľa (Laplaceova rovnica).

Prvým príkladom slúžiacim na motiváciu štúdia eliptických rovníc je analýza ustálených riešení parabolickej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f. \quad (5.3)$$

Pod ustáleným stavom rozumieme také riešenie $u = u(x, t)$, ktoré nezávisí od časovej premennej, t. j. $\partial u / \partial t = 0$ pre každé $t > 0$ a teda $u = u(x)$. Rovnica (5.3) pre ustálené riešenie u je vlastne Poissonova rovnica $-\Delta u = f$. Pripomeňme, že dôležitú úlohu pri určení riešenia parabolickej rovnice (5.3) zohráva zadanie počiatočnej a okrajovej podmienky. Keďže ustálené riešenie nemôže závisieť od času, zadanie počiatočnej podmienky pre ustálené riešenie nemá zmysel. Na druhej strane okrajová podmienka má rozhodujúci význam pre analýzu riešenia Poissonovej rovnice s predpísanou okrajovou podmienkou

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pre všetky } x \in \Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \text{pre všetky } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

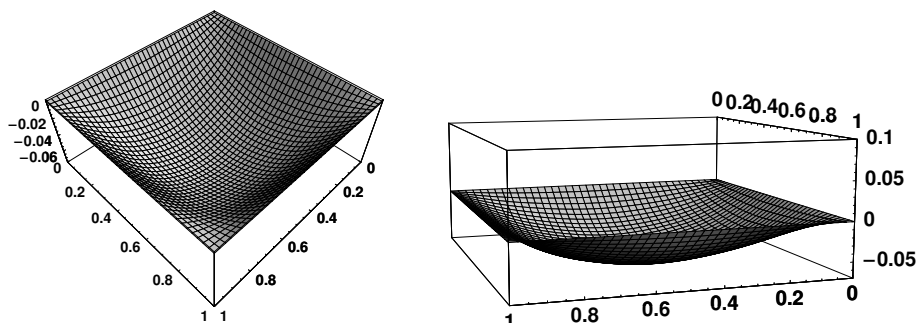
kde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná (zdrojová) funkcia, $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná okrajová podmienka, Ω je oblasť v \mathbb{R}^n , $\partial\Omega$ je jej hranica. Problém nájdenia funkcie $u \in C^2(\Omega)$, spojitej na $\bar{\Omega}$, riešiacej pritom eliptickú rovnicu s okrajovou podmienkou (5.4), nazývame Dirichletova okrajová úloha pre Poissonovu rovnicu.

Druhou dôležitou oblasťou uplatnenia eliptických PDR je teória pružnosti a pevnosti. Budeme modelovať priehyb tenkej dosky alebo membrány. Vplyvom pôsobenia zadaného vonkajšieho zaťaženia silou f sa použijúc Hookov zákon³ podarí ukázať, že vertikálna výchylka $u = u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tenkej dosky (membrány), ktorá sa nachádza v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a je pevne uchytená na okraji $\partial\Omega$ oblasti Ω , vyhovuje Poissonovej rovnici s Dirichletovou okrajovou podmienkou (5.4). Vo všeobecnosti sú akceptovateľnými modelmi teórie pružnosti a pevnosti systémy eliptických PDR, pričom neznámou je veľkosť tzv. deformačného gradientu, ktorý predstavuje viacrozmernú (vektorovú) veličinu.

Okrem uvedených fyzikálnych aplikácií eliptických PDR existuje veľa ďalších príkladov ich využitia. Spomeňme napr. Maxwellove rovnice elektrického a magnetického poľa. Statické Maxwellove rovnice⁴ opisujúce elek-

³Robert Hooke (1635-1703) brit. prírodovedec a technik. Zostrojil barometer, zrkadlový ďalekohľad. Vyslovil tzv. Hookeov zákon o vzťahu medzi napätím a deformáciou materiálu.

⁴James Clerk Maxwell (1831-1879) brit. fyzik. Pracoval v oblasti teórie elektromagnetizmu. Odvodil tzv. Maxwellove rovnice opisujúce vzťahy medzi elektrickým a magnetickým poľom, prúdom a nábojom. Významné sú výsledky Maxwella v kinetickej teórii plynov v rámci termodynamiky.



Obr. 5.1: Pohľad zhora na rovnomerne zaťažujú membránu (vľavo). Bočný pohľad na zaťažujú membránu (vpravo).

trické \vec{E} a magnetické pole \vec{H} sú: $\operatorname{div} \vec{E} = \sigma$, $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Vyjadrujú fyzikálny efekt, že siločiar elektrického poľa môžu vchádzať resp. vychádzať z bodov s koncentrovaným elektrickým nábojom σ , kým magnetické pole nemá žiadne žriedla vzniku ani body zániku magnetických siločiar. Predpokladáme potencialitu uvedených polí, t. j. existenciu tzv. elektrického potenciálu ϕ a magnetického potenciálu ψ pre vektorové polia \vec{E} a \vec{H} . To znamená že ϕ, ψ sú reálnymi funkciami definovanými na \mathbb{R}^3 a $\vec{E} = \nabla\phi$, $\vec{H} = \nabla\psi$, dostávame (po úpravách)

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \operatorname{div}(\nabla\phi) = \operatorname{div} \vec{E} = \sigma, \\ \Delta\psi &= \operatorname{div}(\nabla\psi) = \operatorname{div} \vec{H} = 0,\end{aligned}\tag{5.5}$$

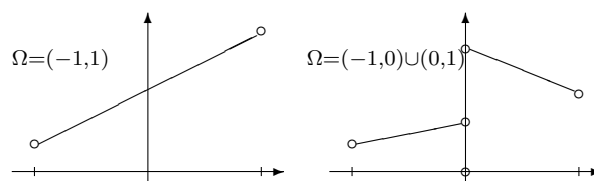
a teda funkcie potenciálu ϕ a ψ vyhovujú Poissonovej rovnici resp. Laplaceovej rovnici na celom \mathbb{R}^3 .

Okrem aplikácií vo fyzike sa však riešenia eliptických PDR prirodzene vyskytujú aj v čistej matematike. Ako príklad môže slúžiť teória potenciálu alebo teória holomorfných funkcií v komplexnej analýze. Predpokladajme, že komplexná funkcia $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfná t. j. existuje jej derivácia

$$f'(z) = \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$$

v každom bode $z \in \Omega$. Funkcia f sa prirodzene dá rozpísať na jej reálnu a imaginárnu časť, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde $z = x + iy$, pričom $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú už reálne funkcie reálnych premenných $(x, y) \in \Omega$. Z jednoduchého výpočtu derivácie $f'(z)$ pomocou limitovania v dvoch na seba kolmých smeroch x a y plynú nasledovné dve identity

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},\tag{5.6}$$



Obr. 5.2: Afínna (vľavo) a po častiach afínna harmonická funkcia (vpravo).

ktoré sú známe ako Cauchy-Riemannove vzorce⁵. Ak funkcie u, v sú C^2 hladké, tak parciálnym diferencovaním dostávame, že $u_{xx} = v_{xy} = v_{yx} = -u_{yy}$. Podobne $v_{xx} = -v_{yy}$ a teda obe funkcie $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovujú Laplaceovej PDR

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5.7)$$

5.2 Harmonické funkcie

Hoci našim prvoradým cieľom je skúmanie riešení Poissonovej PDR so zadanou pravou stranou f , ukazuje sa, že tieto riešenia môžu byť konštruované pomocou vhodnej kombinácie istých elementárnych funkcií, ako tomu bolo napr. pri metóde Greenovej funkcie a či Fourierovej metóde na riešenie parabolickej PDR. Pri Poissonovej rovnici túto úlohu zohrávajú tzv. harmonické funkcie, ktoré sú riešeniami Laplaceovej PDR. Presnejšie

Definícia 5.1. Harmonickou funkciou v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazveme ľubovoľnú funkciu $u \in C^2(\Omega)$ takú, že $\Delta u = 0$ v oblasti Ω .

Existuje mnoho príkladov harmonických funkcií. Najprv si uvedomme, že ak $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$, tak jedinou harmonickou funkciou je priamka $u(x) = \alpha x + \beta$, kde α, β sú konštanty (pozri Obr. 5.2). Ak oblasť Ω pozostáva z dvoch disjunktných intervalov, napr. $\Omega = (-1, 0) \cup (0, 1)$, tak harmonickou funkciou na Ω je ľubovoľná funkcia, ktorá je afínna na oboch podintervaloch $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ zvlášť (pozri Obr. 5.2).

Ak $n \geq 2$, tak opäť afínne funkcie typu $u(\xi_1, \dots, \xi_n) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n + \beta$ sú vždy riešeniami rovnice $\Delta u = 0$ na ľubovoľnej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

⁵Bernhard Riemann (1826-1866) nem. matematik. Fundamentálnymi výsledkami obohatil teóriu funkcií komplexnej premennej, teóriu čísel a geometriu. Známy je model Riemannovej neeuclidovskej geometrie ako aj najslávnejší doteraz otvorený problém - tzv. Riemannova hypotéza, ktorá tvrdí, že všetky korene Riemannovej zeta funkcie ležia na kriticknej priamke komplexných čísel s reálnou časťou $1/2$.

Naproti tomu geometria oblasti $\Omega = \mathbb{R}^n - \{0\}$ nám už nedovolí konštruovať harmonické funkcie tak, ako na Obr. 5.2. Má však zmysel hľadať špeciálne harmonické funkcie, napríklad v triede všetkých radiálne symetrických funkcií na oblasti $\Omega = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Označme $\Omega^0 = \mathbb{R}^n - \{0\}$. Predpokladajme, že funkcia $u : \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}$ je tzv. radiálne symetrická funkcia, t. j. $u = u(\xi_1, \dots, \xi_n)$ závisí len od vzdialenosti bodu $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ od počiatku 0. To znamená, že

$$u(\xi) = F(r(\xi)), \quad r(\xi) = |\xi| = (\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{1/2},$$

kde $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nejaká hladká funkcia. Keďže $\partial r / \partial \xi_i = \xi_i / r$ dostaneme pomocou pravidla o derivovaní zloženej funkcie, že $\partial^2 u / \partial \xi_i^2 = F'(r)(1/r - \xi_i^2/r^3) + F''(r)\xi_i^2/r^2$. Potom sčítaním pre $i = 1, \dots, n$ a využitím vzťahu $r^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ získame $\Delta u = F''(r) + \frac{n-1}{r}F'(r)$. Riešiť Laplaceovu rovnicu $\Delta u = 0$ v triede radiálne symetrických funkcií vlastne znamená nájsť riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice

$$F''(r) + \frac{n-1}{r}F'(r) = 0, \quad r > 0.$$

Zavedením substitúcie $G = F'$ a použitím metódy separácie premenných pre ODR sa poľahky ukáže, že až na multiplikatívnu a aditívnu konštantu je riešením funkcia $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná ako

$$F(r) = \begin{cases} r^{2-n} & n \geq 3, \\ \ln r & n = 2. \end{cases}$$

Samotné radiálne symetrické riešenie nakoniec ešte vhodne preškálujeme. Definujme ω_n ako $(1/n)$ krát povrch jednotkovej sféry v \mathbb{R}^n , t. j.

$$\omega_n = \frac{1}{n} \int_{\partial B(0,1)} dS. \quad (5.8)$$

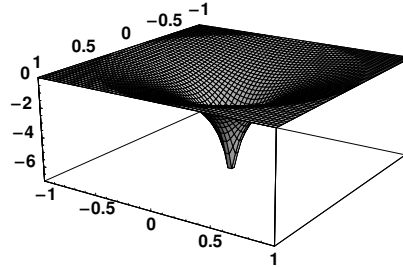
Zrejme $\omega_2 = \pi, \omega_3 = 4\pi/3$, atď'. Poznamenajme, že ω_n je vlastne aj vyjadrením objemu jednotkovej gule v \mathbb{R}^n . Význam tohto škálovania je len technický. V ďalšom nahliadneme, že takto škálovaná funkcia bude vystupovať v reprezentácii riešenia Poissonovej rovnice. Poznamenajme, že pre povrch ľubovoľnej sféry so stredom x a polomerom $\varrho > 0$ potom platí

$$\text{povrch}(B(x, \varrho)) = \int_{\partial B(x, \varrho)} 1 dS = \varrho^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} 1 dS = \varrho^{n-1} n \omega_n. \quad (5.9)$$

Definícia 5.2. Funkciu $\Gamma : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definovanú ako

$$\Gamma(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |\xi|^{2-n} & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln(|\xi|) & n = 2, \end{cases} \quad (5.10)$$

nazývame fundamentálnym normovaným riešením Laplaceovej rovnice $\Delta u = 0$ na oblasti $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Obr. 5.3: Graf fundamentálneho riešenia v rovine \mathbb{R}^2 .

Na záver tejto časti skúmame posunutia fundamentálneho riešenia Γ . Nech bod $x \in \mathbb{R}^n$ je pevne zvolený. Posuňme funkciu Γ do bodu x . Teda uvažujme funkciu

$$v(\xi) = \Gamma(\xi - x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n - \{x\}. \quad (5.11)$$

Potom zrejme platí

$$\Delta_{\xi} v(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n - \{x\}, \quad (5.12)$$

a pre parciálnu deriváciu

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_i} = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} (2-n) |\xi - x|^{1-n} \frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|} = \frac{1}{n\omega_n} \frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|^n}, \quad (5.13)$$

pričom uvedené vzťahy (5.12) a (5.13) platia pre všetky $\xi \neq x$.

5.3 Greenov vzorec pre viacrozmernú integráciu per partes

Pripomeňme, že pre oblasť $\Omega = (a, b)$ (interval) platí známy vzorec pre integráciu po častiach (*per partes*). Pre ľubovoľné funkcie $u, v \in C^1([a, b])$ teda platí $\int_a^b u(x)v'(x) dx = -\int_a^b u'(x)v(x) dx + u(x)v(x)|_a^b$. Uvedomme si najprv, že hraničný člen $u(x)v(x)|_a^b$ sa dá chápať ako integrál $\int_{\partial\Omega} uv\vec{n} dS$ cez hranicu $\partial\Omega = \{a, b\}$ intervalu (a, b) , pričom $\vec{n}(a) = -1, \vec{n}(b) = 1$ je vektor vonkajšej normály k hranici intervalu. Dá sa ukázať (pozri napr. [7, 8, 12]) viacrozmerná analógia vzorca *per partes* platná pre oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nazýva sa Greenov⁶ vzorec

⁶George Green (1793-1841) brit. matematik. Pracoval v teórii elektromagnetizmu. Našiel explicitné vzorce pre riešenie parciálnych dif. rovníc (Greenova funkcia). Odvodil tzv. Greenovu formulu, t. j. metódu *per partes* pre viacrozmerné integrály.

Tvrdenie 5.1. (Greenov vzorec). Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je oblasť s hladkou hranicou $\partial\Omega$. Nech $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sú C^1 hladké funkcie v $\bar{\Omega}$. Potom

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) dS, \quad (5.14)$$

kde $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)^T$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k $\partial\Omega$ v bode $x \in \partial\Omega$.

Použitím Greenovho vzorca na funkciu u a $\partial v / \partial x_i$ dostaneme

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i dS$$

a teda

$$\int_{\Omega} u \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i dS.$$

Nakoniec, ak si uvedomíme, že derivácia funkcie v v smere \vec{n} sa dá vyjadriť ako $\frac{dv}{d\vec{n}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i$ a $(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$, dostávame sumovaním od $i = 1$ do m :

1. Greenova formula

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{dv}{d\vec{n}} dS \quad (5.15)$$

a podobne vzťah

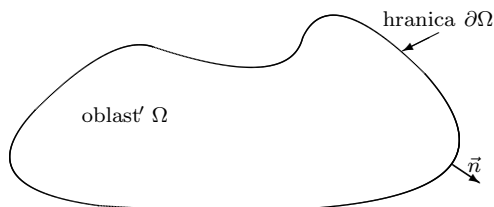
$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{du}{d\vec{n}} dS,$$

ktorý bol z predošlého získaný zámennou *mutatis mutandis* úloh funkcií u a v . Odčítaním vyššie uvedených vzťahov dostaneme:

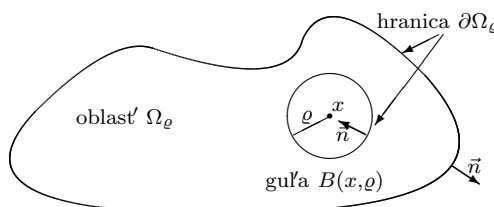
2. Greenova formula

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{dv}{d\vec{n}} - v \frac{du}{d\vec{n}} dS. \quad (5.16)$$

Poznamenajme, že 1. Greenova formula platí, ak funkcia u je C^1 hladká v Ω a spojitá na $\bar{\Omega}$ a funkcia v je C^2 hladká v Ω a jej prvé derivácie sú spojité na $\bar{\Omega}$. Na záver uveďme ešte jeden dôsledok Greenovho vzorca (5.14). Nech vektorová funkcia $\vec{w} : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je C^1 diferencovateľná v Ω a spojitá v $\bar{\Omega}$. Pripomeňme, že operátor divergencie je definovaný ako $\operatorname{div} \vec{w} = \sum_{i=1}^m \partial w_i / \partial x_i$. Použijúc vzorec (5.14) pre funkciu $u = 1$



Obr. 5.4: Zadaná oblasť so znázorneným vektorom vonkajšej normály v bode na hranici oblasti.



Obr. 5.5: Oblasť, ktorá vznikla z pôvodnej oblasti vynechaním gule so stredom v pevne zadanom bode.

(t. j. $\partial u / \partial x_i = 0$) a $v = w_i$, následne sčítaním rovností pre $i = 1, \dots, n$ dostaneme

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w} \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^m w_i n_i \, dS = \int_{\partial\Omega} (\vec{w}, \vec{n}) \, dS. \quad (5.17)$$

Tento vzťah sme použili pri odvodzovaní rovníc zákona zachovania hmoty (Kapitola 1.1) a rovnice vedenia tepla (Kapitola 1.2).

5.4 Greenova reprezentácia riešení Poissonovej rovnice

V tejto časti je našim cieľom odvodiť formulu, pomocou ktorej by sme dokázali reprezentovať riešenie u Poissonovej rovnice $\Delta u = f$ prostredníctvom funkcie pravej strany a oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, na ktorej je rovnica zadaná.

Nech oblasť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je zadaná. Vezmime pevne zvolený bod $x \in \Omega$. Potom pre dostatočne malé $\rho > 0$ sa guľa so stredom x a polomerom ρ

nachádza v oblasti Ω . Preto môžeme uvažovať o oblasti $\Omega_\varrho \subset \mathbb{R}^n$, ktorá vznikla z pôvodnej oblasti Ω vynechaním gule $B = B(x, \varrho)$ so stredom $x \in \Omega$ a polomerom $0 < \varrho \ll 1$.

Hranicu $\partial\Omega_\varrho$ novej oblasti $\Omega_\varrho = \Omega - B(x, \varrho)$ tvorí jednak hranica pôvodnej oblasti $\partial\Omega$, ako aj hranica ∂B vynechanej gule $B = B(x, \varrho)$. Zdôraznime, že vektor vonkajšej normály k časti hranice $\partial\Omega_\varrho$, ktorú tvorí ∂B smeruje do vnútra gule B (pozri Obr. 5.5).

Dôvod zavedenia oblasti Ω_ϱ je ten, že funkcia $v(\xi)$ definovaná prostredníctvom posunu fundamentálneho riešenia do bodu x , t. j. $v(\xi) = \Gamma(\xi - x)$ je dobre definovaná v Ω_ϱ (môžeme deliť) a navyš $\Delta_\xi v(\xi) = 0$ v oblasti Ω_ϱ . Dolným indexom ξ v Laplaceovom operátore vyjadrujeme skutočnosť, že máme na mysli diferencovanie vzhľadom na premennú ξ a nie x . Použijúc 2. Greenovu formulu dostávame

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varrho} \Gamma(\xi - x) \Delta_\xi u(\xi) \, d\xi &= \int_{\Omega_\varrho} v \Delta_\xi u \, d\xi \\ &= \int_{\Omega_\varrho} u \Delta_\xi v \, d\xi + \int_{\partial\Omega_\varrho} v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{dv}{d\vec{n}} \, dS = \int_{\partial\Omega_\varrho} v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{dv}{d\vec{n}} \, dS. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Analyzujeme vzniknutý hraničný integrál. Hranica $\partial\Omega_\varrho$ pozostáva z dvoch častí a preto aj hraničný integrál bude súčtom hraničných integrálov cez $\partial\Omega$ a ∂B . Teda

$$\int_{\partial\Omega_\varrho} = \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B(x, \varrho)} =: I + J(\varrho).$$

Majme na pamäti poznámku o tom, že vektor vonkajšej normály k časti hranice ∂B smeruje do vnútra gule B . Preto druhá časť hraničného integrálu je vlastne

$$J(\varrho) = \int_{\partial B(x, \varrho)} v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{dv}{d\vec{n}} \, dS,$$

kde \vec{n} je vektor vnútornej normály ku guli $B = B(x, \varrho)$. Pre bod $\xi \in \partial B$ sa zrejme tento vektor dá vyjadriť ako $\vec{n} = (x - \xi)/|x - \xi|$. Nakreslite si obrázok! Naše ďalšie snaženie bude vypočítať limitu $J(\varrho)$, keď $\varrho \rightarrow 0^+$. Rozpíšme integrál $J(\varrho)$ na rozdiel $J(\varrho) = J_1(\varrho) - J_2(\varrho)$, kde

$$J_1(\varrho) = \int_{\partial B(x, \varrho)} v \frac{du}{d\vec{n}} \, dS \quad J_2(\varrho) = \int_{\partial B(x, \varrho)} u \frac{dv}{d\vec{n}} \, dS.$$

Pripomeňme, že

$$v(\xi) = \Gamma(\xi - x) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |\xi - x|^{2-n} = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \varrho^{2-n} \quad (5.19)$$

pre každý bod $\xi \in \partial B$ a na základe (5.13) s využitím vyjadrenia $n_i = (x_i - \xi_i)/|x - \xi|$ platí

$$\frac{dv}{d\vec{n}}(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial \xi_i} n_i = \frac{1}{n\omega_n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - x_i}{|\xi - x|^n} \frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|} = -\frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n}, \quad (5.20)$$

lebo $\sum_{i=1}^n |\xi_i - x_i|^2 = |\xi - x|^2$. Predpokladáme, že funkcia $u(\xi)$ je C^2 spojitá v bode x a teda pre malé hodnoty ϱ budú funkčné hodnoty $u(\xi)$, $\xi \in \partial B$, blízko k hodnote $u(x)$. Presnejšie povedané $u(\xi) = u(x) + O(|\xi - x|) = u(x) + O(\varrho)$ keď $\varrho \rightarrow 0^+$. Podobne pre derivácie tiež platí $\partial u(\xi)/\partial \xi_i = \partial u(x)/\partial \xi_i + O(\varrho)$. To ale znamená, že v termínoch Landauových O -symbolov môžeme integrály J_1, J_2 vyjadriť ako

$$\begin{aligned} J_1(\varrho) &= \int_{\partial B(x, \varrho)} v \frac{du}{d\vec{n}} dS = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \int_{\partial B(x, \varrho)} \varrho^{2-n} \frac{du}{d\vec{n}} dS \\ &= \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \varrho^{2-n} \left(\frac{du}{d\vec{n}}(x) + O(\varrho) \right) \int_{\partial B(x, \varrho)} dS = \frac{\varrho}{2-n} \left(\frac{du}{d\vec{n}}(x) + O(\varrho) \right) \end{aligned}$$

a tiež

$$\begin{aligned} J_2(\varrho) &= \int_{\partial B(x, \varrho)} u \frac{dv}{d\vec{n}} dS = -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(x, \varrho)} \varrho^{1-n} u(\xi) dS \\ &= -\frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n} (u(x) + O(\varrho)) \int_{\partial B(x, \varrho)} 1 dS = -u(x) + O(\varrho). \end{aligned}$$

Pri posledných rovnostiach sme využili vzťah (5.9) na výpočet plochy povrchu sféry s polomerom ϱ . Dostávame, že platí

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} J(\varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} J_1(\varrho) - \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} J_2(\varrho) = 0 - (-u(x)) = u(x).$$

Teda hraničný integrál $\int_{\partial \Omega_\varrho} = \int_{\partial \Omega} + \int_{\partial B(x, \varrho)}$ v (5.18) konverguje ako

$$\begin{aligned} &\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{\partial \Omega_\varrho} v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{dv}{d\vec{n}} dS \\ &= \int_{\partial \Omega} (\dots) + \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varrho)} (\dots) = \int_{\partial \Omega} (\dots) + \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} (J_1(\varrho) + J_2(\varrho)) \\ &= \int_{\partial \Omega} v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{dv}{d\vec{n}} dS + u(x). \end{aligned}$$

To ale znamená, že existuje limita pravej strany rovnosti (5.18) a teda musí existovať aj limita ľavej časti rovnosti, čo je vlastne $\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\varrho} (\dots) d\xi = \int_{\Omega} (\dots) d\xi$. Teda platí

$$\int_{\Omega} \Gamma(\xi - x) \Delta_\xi u(\xi) d\xi = \int_{\partial \Omega} v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{dv}{d\vec{n}} dS + u(x). \quad (5.21)$$

Vráťme sa teraz k riešeniu pôvodného problému, t. j. k nájdeniu reprezentácie riešenia Poissonovej rovnice $\Delta u = f$, kde f je zadaná spojitá funkcia na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Na základe (5.21) môžeme sformulovať vetu

Tvrdenie 5.2. (Greenova reprezentácia riešenia Poissonovej rovnice) Nech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná spojité a ohraničená funkcia. Nech $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je C^2 spojité riešenie Poissonovej rovnice

$$\Delta u = f$$

v ohraničenej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pričom u a všetky parciálne derivácie $\partial u / \partial x_i$ sú spojité až do hranice $\partial\Omega$. Potom riešenie u sa dá napísať ako suma jedného objemového a dvoch povrchových integrálov

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(\xi - x) f(\xi) d\xi - \int_{\partial\Omega} \Gamma(\xi - x) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) dS + \int_{\partial\Omega} u \frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) dS, \quad (5.22)$$

kde Γ je fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice definované v (5.10), \vec{n} je vektor vonkajšej normály k hladkej hranici $\partial\Omega$.

Poznamenajme, že jednotlivé integrály majú svoje ustálené názvy. Parametrický integrál

- $x \mapsto \int_{\Omega} \Gamma(\xi - x) f(\xi) d\xi$ sa nazýva Newtonov potenciál s hustotou f
- $x \mapsto \int_{\partial\Omega} \sigma(\xi) \Gamma(\xi - x) dS$ sa nazýva potenciál vrstvy s hustotou σ
- $x \mapsto \int_{\partial\Omega} \mu(\xi) \frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) dS$ sa nazýva potenciál dvojvrstvy s hustotou μ .

V našom prípade $\mu = u$ a $\sigma = du/d\vec{n}$.

Poznámka 5.1. Poznamenajme, že každý potenciál vrstvy alebo dvojvrstvy je harmonická funkcia v oblasti Ω . Skutočne, ak označíme

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \sigma(\xi) \Gamma(\xi - x) dS,$$

tak pre ľubovoľný vnútorný bod $x \in \Omega$ platí, že $|\xi - x| \geq \varepsilon > 0$ pre všetky body hranice $\xi \in \partial\Omega$. Inými slovami povedané, môžeme deliť výrazom $|\xi - x|$ a funkcia $\xi \mapsto 1/|\xi - x|$ je ohraničená na $\partial\Omega$. To ale znamená, že vyššie uvedený parametrický integrál (parameter je x) môžeme ľubovoľne veľakrát diferencovať podľa parametra x . Teda pre Δ operátor platí

$$\Delta_x w(x) = \int_{\partial\Omega} \sigma(\xi) \Delta_x \Gamma(\xi - x) dS = 0$$

vd'aka vlastnosti (5.12) funkcie Γ . Teda potenciál vrstvy je harmonická funkcia v Ω . Podobne sa ukáže, že aj potenciál dvojvrstvy je harmonická funkcia v Ω .

Túto časť ukončíme poznámkou o nekonečnej diferencovateľnosti harmonických funkcií. Nech $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonická funkcia, t. j. $\Delta u = 0$. Na základe vzorca (5.22), v ktorom $f = 0$ dostávame pre $x \in \Omega$:

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \Gamma(\xi - x) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) dS + \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) dS. \quad (5.23)$$

Keďže bod x leží v oblasti Ω musí mať nenulovú vzdialenosť od hranice $\partial\Omega$. Inak povedané funkcie $\Gamma(\xi - x)$ a $\frac{d\Gamma(\xi-x)}{d\vec{n}}$, kde ξ prebieha $\partial\Omega$ sú dobre definované a ohraničené, pretože môžeme deliť výrazom $|\xi - x|$ a teda sú aj ľubovoľne veľakrát spojitاً diferencovateľné v bode x . Môžeme teda použiť pravidlo o diferencovaní integrálu závisiaceho od parametra (v našom prípade x) a dostaneme, že pravá strana rovnosti (5.22) má ľubovoľnú parciálnu deriváciu. Tým pádom aj funkcia u musí mať všetky parciálne derivácie ľubovoľného rádu. Ukázali sme teda nasledovný dôsledok Greenovej reprezentácie harmonickej funkcie.

Dôsledok 5.1. *Nech $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonická funkcia na ohraničenej oblasti Ω . Potom funkcia u má všetky parciálne derivácie ľubovoľného rádu, t. j. $u \in C^\infty(\Omega)$. Poznamenajme, že dôležitým využitím tohto dôsledku je aj tvrdenie, že reálna ako aj imaginárna časť ľubovoľnej holomorfnej funkcie sú nekonečne veľakrát diferencovateľné funkcie (pozri (5.7)).*

5.5 Princíp maxima pre eliptické rovnice

Začnime opäť s jednorozmernou motiváciou pre vystihnúť podstatu princípu maxima pre eliptické PDR. Ak $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ je interval, tak každá harmonická funkcia u na Ω je nevyhnutne afínnou funkciou (pozri Obr. 5.2). Zároveň je zrejmé, že funkcia $u = u(x)$ nadobúda svoje maximum na hranici $\partial\Omega = \{a, b\}$ oblasti Ω . Platí teda,

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

a analogicky pre minimum

$$\inf_{x \in \Omega} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Cieľom bude ukázať, že toto tvrdenie nazývané princíp maxima pre eliptické PDR ostáva v platnosti aj v prípade viacrozmernej ohraničenej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Skôr ako pristúpime k odvodeniu princípu maxima pre harmonické funkcie, dokážeme jedno užitočné tvrdenie o tom, že hodnotu harmonickej funkcie v ľubovoľnom bode x možno vypočítať tak, že určíme strednú hodnotu (t. j. integrál) po ľubovoľnej sfére so stredom práve v bode x . V prípade $n = 1$ a $\Omega = (a, b)$ je toto tvrdenie opäť zrejmé, pretože pre každú afínnu funkciu $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \alpha x + \beta$ platí $u(x) = \frac{1}{2}(u(x - \varrho) + u(x + \varrho))$, kde $(x - \varrho, x + \varrho) \subset (a, b)$ je guľa o polomere ϱ a integrovanie funkcie u cez hranicu ∂B gule B je vlastne horeuvedený súčet funkčných hodnôt v bodoch $x - \varrho$ a $x + \varrho$.

Dôkaz tohto tvrdenia pre ľubovoľnú harmonickú funkciu v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sa opiera o Greenovu reprezentáciu riešenia (5.22) Poissonovej rovnice. Skutočne, ak $\Delta u = 0$ v Ω a $x \in \Omega$ je pevne zvolený bod, tak pre ľubovoľnú guľu $B = B(x, \varrho) \subset \Omega$ platí

$$u(x) = - \int_{\partial B} v \frac{du}{d\vec{n}} dS + \int_{\partial B} u \frac{dv}{d\vec{n}} dS,$$

kde $v(\xi) = \Gamma(\xi - x)$ a \vec{n} je vektor vonkajšej normály k ∂B . Pripomeňme si dva užitočné vzťahy pre funkciu $v(\xi)$ odvodené v (5.19) a (5.20), ktoré platia pre ľubovoľný bod $\xi \in \partial B(x, \varrho)$, t. j. $|\xi - x| = \varrho$. Na základe týchto vzťahov platí

$$v(\xi) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \varrho^{2-n}, \quad \frac{\partial v}{d\vec{n}} = \frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n},$$

pričom zdôraznime zmenu znamienka v druhej rovnosti oproti (5.20), kde \vec{n} bol opačne orientovaný vektor vnútornej normály k ∂B . Teda platí

$$u(x) = - \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \varrho^{2-n} \int_{\partial B} \frac{du}{d\vec{n}} dS + \frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n} \int_{\partial B} u dS.$$

Určiť hraničný integrál $\int_{\partial B} \frac{du}{d\vec{n}} dS$ je však jednoduché s prihliadnutím na 1. Greenovu formulu. Keďže predpokladáme $\Delta u = 0$, tak

$$0 = \int_B 1 \cdot \Delta u d\xi = - \int_B (\nabla 1, \nabla u) d\xi + \int_{\partial B} \frac{du}{d\vec{n}} dS = \int_{\partial B} \frac{du}{d\vec{n}} dS.$$

Dokázali sme teda, že pre ľubovoľnú harmonickú funkciu u v oblasti Ω platí

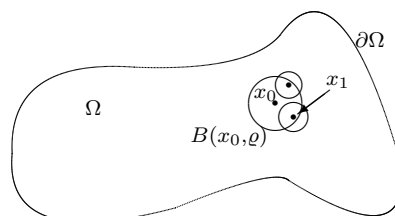
$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n} \int_{\partial B(x, \varrho)} u dS. \quad (5.24)$$

kde $B(x, \varrho)$ je guľa, $B(x, \varrho) \subset \Omega$. Tento vzorec sa nazýva aj vzorcom o strednej hodnote harmonickej funkcie.

Teraz môžeme pristúpiť k samotnému odvodu princípu maxima pre harmonické funkcie. Ukážeme, že pre každú harmonickú funkciu u v ohraničenej oblasti Ω , u je spojitá na $\bar{\Omega}$, platí $\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial \Omega} u(x)$. Najprv si uvedomme, že $\sup_{x \in \partial \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial \Omega} u(x)$ pretože oblasť Ω je ohraničená a teda $\partial \Omega$ je kompaktná množina.

Predpokladajme, že funkcia u nadobúda maximum v nejakom vnútor-
nom bode $x_0 \in \Omega$, t. j. $u(x) \leq u(x_0)$ pre všetky $x \in \Omega$. Nech $B = B(x_0, \varrho) \subset \Omega$ je guľa. Ak by pre niektoré $\xi \in \partial B$ platila ostrá nerovnosť $u(\xi) < u(x_0)$, tak s využitím spojitosti funkcie u a vzťahu (5.24) dostaneme,

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n} \int_{\partial B} u dS < \frac{1}{n\omega_n} \varrho^{1-n} u(x_0) \int_{\partial B} 1 dS = u(x_0)$$



Obr. 5.6: Znáznorenie postupu pri dôkaze konštantnosti riešenia.

na základe definície konštanty ω_n . To však nie je možné a teda pre každý bod $\xi \in \Omega$, $|\xi - x_0| = \rho$ musí platiť $u(\xi) = u(x_0)$. Keďže polomer ρ môžeme postupne znižovať až do 0, znamená to potom, že funkcia u je konštantná na celej guli $B(x_0, \rho)$. Inak povedané, funkcia u nadobúda svoju maximálnu hodnotu v ľubovoľnom inom bode $x_1 \in B(x_0, \rho)$. Predošlé úvahy môžeme zopakovať pre bod x_1 a dokážeme, že funkcia je konštantná na väčšej množine akou bola guľa $B(x_0, \rho)$ (pozri Obr. 5.6).

V konečnom dôsledku týmto postupom vyčerpáme celú ohraničenú oblasť Ω (rozmyslite si prečo!) a zistíme, že ak funkcia nadobúda maximum v nejakom vnútornom bode, tak funkcia musí byť konštantná na Ω . V prípade konštantnej funkcie u je však princíp maxima očividný. Ostáva potom už len prípad, že funkcia nadobúda maximum v nejakom bode hranice $\partial\Omega$.

Tvrdenie 5.3. *Nech $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonická funkcia na ohraničenej oblasti Ω , u je spojitá na $\bar{\Omega}$. Potom platí*

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad \inf_{x \in \Omega} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Dôsledkom princípu maxima je tvrdenie o porovnávaní riešení Poissonovej rovnice

Dôsledok 5.2. *Nech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná funkcia a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená oblasť. Nech $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú dve riešenia Poissonovej rovnice $\Delta u = f$, ktoré sú spojité na $\bar{\Omega}$. Potom, ak*

$$u_1(x) \leq u_2(x) \quad \text{pre každé } x \in \partial\Omega \quad \text{tak} \quad u_1(x) \leq u_2(x) \quad \text{pre každé } x \in \Omega.$$

Dôkaz. Ak označíme $u = u_1 - u_2$, tak podľa predpokladu tvrdenia na hranici $\partial\Omega$ platí $u(x) \leq 0$. Využitím princípu maxima dostávame $\sup_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \leq 0$. Teda $u_1(x) \leq u_2(x)$ pre každé $x \in \Omega$. \diamond

5.6 Metódy riešenia eliptických rovníc

V tejto časti uvedieme niektoré z metód na praktické riešenie eliptických rovníc. Sústredíme sa na riešenie Poissonovej rovnice so zadanou okrajovou podmienkou Dirichletovho typu. Metóda hľadania riešenia je založená na rozvoji neznámej funkcie do Fourierovho radu a následného porovnania koeficientov s rozvojom pravej strany rovnice. Podrobnejšie si to objasníme na nasledovnom príklade.

Príklad 5.6.1. Hľadáme riešenie Poissonovej rovnice $\Delta u = 1$ na štvorcovej oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ spĺňajúce nulovú Dirichletovu okrajovú podmienku na $\partial\Omega$, t. j.

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.25)$$

Idea riešenia pomocou Fourierovej metódy spočíva v rozvoji hľadanej funkcie $u = u(x_1, x_2)$ do Fourierovho radu podľa úplného ortogonálneho systému funkcií $\phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pričom všetky funkcie ϕ_k spĺňajú nulovú okrajovú podmienku na hranici $\partial\Omega$. Takým systémom je napríklad systém

$$\phi_{mn} = \sin(m\pi x) \sin(n\pi x), \quad (5.26)$$

kde indexy $m, n \in \mathbb{N}$. Používame dvojité indexy na rozdiel od jednoduchého indexovania. Teda funkciu hľadáme v tvare

$$u(x_1, x_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \phi_{mn}(x_1, x_2), \quad (5.27)$$

kde α_{mn} sú zatiaľ neznáme konštanty. Derivovaním sa presvedčíme, že

$$\Delta \phi_{mn} = -\pi^2(m^2 + n^2)\phi_{mn} \quad (5.28)$$

a teda funkciu Δu rozvineme do radu

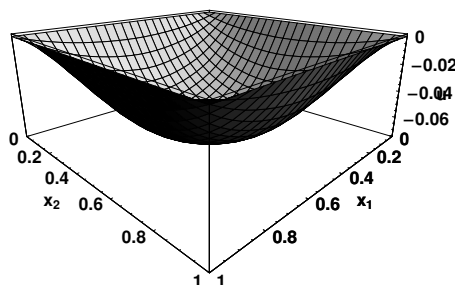
$$\Delta u = -\pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}(m^2 + n^2)\phi_{mn}, \quad (5.29)$$

pričom poznamenávame, že uvedená rovnosť platí za predpokladu, že výraz na pravej strane je rovnomerne konvergentný rad spojitých funkcií. Ostáva nám rozvinúť funkciu pravej strany $f = 1$ do toho istého Fourierovho radu, t. j.

$$f = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \phi_{mn}.$$

Zrejme uplatnením Fubiniho vety o vzťahu dvojných a dvojnásobných integrálov dostávame

$$\int_{\Omega} \phi_{mn} \phi_{pq} \, dx_1 dx_2 = \int_0^1 \sin(m\pi x_1) \sin(p\pi x_1) \, dx_1 \int_0^1 \sin(n\pi x_2) \sin(q\pi x_2) \, dx_2$$



Obr. 5.7: Graf riešenia Poissonovej rovnice (5.25).

$$= \frac{1}{2}\delta_{mp}\frac{1}{2}\delta_{nq} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{ak } m = n \text{ a } n = q, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.30)$$

Teda

$$\int_{\Omega} f\phi_{pq}dx = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \int_{\Omega} \phi_{mn}\phi_{pq}dx = \frac{1}{4}f_{pq}. \quad (5.31)$$

Na druhej strane, integrovaním sa presvedčíme, že

$$\int_{\Omega} f\phi_{pq} = \int_0^1 \int_0^1 \sin(p\pi x_1) \sin(q\pi x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{pq\pi^2} (1 - (-1)^p)(1 - (-1)^q).$$

To znamená, že $f_{mn} = \frac{4}{mn\pi^2} (1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n)$ a preto porovnaním f_{mn} s koeficientom pri ϕ_{mn} v (5.29) dostávame hľadané riešenie u v tvare radu

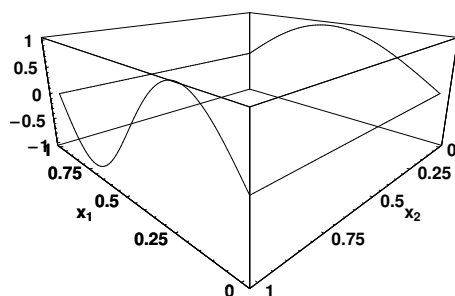
$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -\frac{4}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n)}{mn(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_1) \sin(n\pi x_2) = \\ &= -\frac{16}{\pi^4} \left(\frac{\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(3\pi x_1) \sin(\pi x_2)}{3 \cdot 10} + \frac{\sin(\pi x_1) \sin(3\pi x_2)}{3 \cdot 10} + \dots \right). \end{aligned}$$

Príklad 5.6.2. Hľadáme riešenie Laplaceovej rovnice $\Delta u = 0$ na štvorcovej oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ spĺňajúce Dirichletovu okrajovú podmienku na $\partial\Omega$, t. j.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v } \Omega, \\ u = \psi & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.32)$$

kde $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ je štvorcová oblasť a $\psi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná okrajová podmienka na hranici $\partial\Omega$ štvorca (pozri Obr. 5.8)

$$\psi(x_1, 0) = \sin(\pi x_1), \quad \psi(x_1, 1) = \sin(2\pi x_1), \quad \psi(0, x_2) = 0, \quad \psi(1, x_2) = 0.$$



Obr. 5.8: Zadaná okrajová podmienka Dirichletovho typu.

Idea riešenia úlohy s nehomogénnou okrajovou podmienkou $\psi \neq 0$ je nasledovná:

◇ 1. krok - *Posunutie riešenia*. Spočíva v nájdení takej funkcie $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, že novozavedená funkcia $v = u - w$ spĺňa nulovú okrajovú podmienku, t. j. $v = 0$ na $\partial\Omega$ práve vtedy, keď funkcia $u = \psi$ na $\partial\Omega$. Ľahko sa presvedčíme, že ak položíme

$$w(x_1, x_2) = (1 - x_2) \sin(\pi x_1) + x_2 \sin(2\pi x_1),$$

tak $v = u - w$ spĺňa $v = 0$ na $\partial\Omega$, pokiaľ $u = \psi$ na $\partial\Omega$. Inak povedané, našli sme funkciu (jednu z mnohých takých funkcií!) $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že $w = \psi$ na $\partial\Omega$.

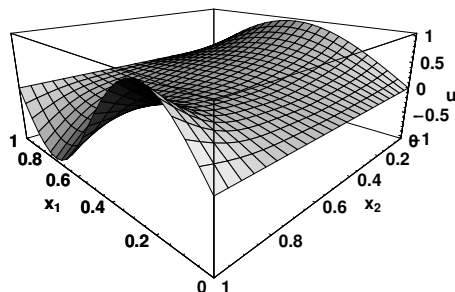
◇ 2. krok - *Posun v pravej strane rovnice*. Teraz nájdeme PDR, ktorú musí spĺňať novozavedená funkcia $v = u - w$. Zrejme $\Delta v = \Delta u - \Delta w = 0 - \Delta w = \pi^2(1 - x_2) \sin(\pi x_1) + 4\pi^2 x_2 \sin(2\pi x_1) =: f(x_1, x_2)$. Teda

$$\Delta v = f \text{ v } \Omega, \quad \text{a} \quad v = 0 \text{ na } \partial\Omega. \quad (5.33)$$

Ďalej postupujeme ako v predošlom príklade. Ak funkcia f sa dá rozvinúť do Fourierovho radu $f = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \phi_{mn}$ podľa funkcií ϕ_{mn} , tak podľa (5.31) dostávame:

$$\begin{aligned} f_{mn} &= 4 \int_{\Omega} f \phi_{mn} dx_1 dx_2 = 4\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 ((1 - x_2) \sin(\pi x_1) + 4x_2 \sin(2\pi x_1)) \times \\ &\quad \times \sin(m\pi x_1) \sin(n\pi x_2) dx_1 dx_2 \\ &= 4\pi^2 \delta_{1m} \frac{1}{n\pi} - 16\pi^2 \frac{1}{2} \delta_{2m} \frac{(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ak } m = 1 \text{ a } n \in N, \\ -4 \frac{(-1)^n}{n} & \text{ak } m = 2 \text{ a } n \in N. \end{cases} \end{aligned}$$

Hľadáme teda riešenie v Poissonovej rovnice (5.33) v tvare Fourierovho radu $v = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \phi_{mn}$. Porovnaním koeficientov v rozvoji funkcie Δv



Obr. 5.9: Graf riešenia Poissonovej rovnice (5.32) s nulovou pravou stranou a nenulovou Dirichletovou okrajovou podmienkou.

a f dostaneme $-\pi^2(m^2 + n^2)\alpha_{mn} = f_{mn}$ a teda

$$\alpha_{mn} = \frac{2}{\pi} \begin{cases} -\frac{1}{n(1+n^2)} & \text{ak } m = 1 \text{ a } n \in \mathbb{N}, \\ 4\frac{(-1)^n}{n(4+n^2)} & \text{ak } m = 2 \text{ a } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom

$$v(x_1, x_2) = -\frac{2}{\pi} \sin(\pi x_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2)} \sin(n\pi x_2) \\ + \frac{8}{\pi} \sin(2\pi x_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4+n^2)} \sin(n\pi x_2).$$

Na záver určíme u ako $u = v + w$. Teda

$$u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \left(1 - x_2 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2)} \sin(n\pi x_2) \right) \\ + \sin(2\pi x_1) \left(x_2 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4+n^2)} \sin(n\pi x_2) \right).$$

5.7 Príklady

Príklad 1. Nájdite riešenie Poissonovej rovnice

$$\begin{cases} \Delta u = x_1 x_2 & \text{v } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

na štvorcovej oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, spĺňajúce nulovú Dirichletovu okrajovú podmienku na $\partial\Omega$.

Príklad 2. Riešte Poissonovu rovnicu

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{v } \Omega, \\ u = \psi & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

na štvorcovej oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ spĺňajúce okrajovú podmienku $u = \psi$ na $\partial\Omega$, kde $\psi(x_1, 0) = \psi(0, x_2) = 0$, $\psi(x_1, 1) = 1$, $\psi(1, x_2) = 2$.

Príklad 3. Riešte Poissonovu rovnicu

$$\begin{cases} \Delta u = x_1 + 2x_2 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

na obdĺžnikovej oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 2)$, spĺňajúce nulovú Dirichletovu okrajovú podmienku na $\partial\Omega$. Tú istú rovnicu študujte na všeobecnej obdĺžnikovej oblasti $\Omega = (0, a) \times (0, b)$.

Príklad 4. Nech $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ je štvorcová oblasť. Pre ktoré reálne λ má eliptická PDR s Dirichletovou okrajovou podmienkou

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

netriviálne riešenie $u \neq 0$?

Príklad 5. Predpokladajme, že funkcia $u = u(x, y)$ vyhovuje rovnici $\Delta u = 1$ v oblasti Ω a $u(x, y) = 0$ na hranici $\partial\Omega$, kde Ω je nejaká oblasť v rovine \mathbb{R}^2 . Ukážte, že $u(x, y) \leq \frac{x^2+y^2}{4}$ pre každé $(x, y) \in \Omega$.

Príklad 6. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblasť s hladkou hranicou. Pomocou Greenovho vzorca a Cauchy–Schwartzovej nerovnosti ukážte, že pre každú funkciu $u \in C^2(\bar{\Omega})$ a takú, že $u = 0$ na hranici $\partial\Omega$ platí interpolačná nerovnosť Gagliardo-Nirenbergerovho typu:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 dx \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}.$$

Príklad 7. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblasť s hladkou hranicou pričom $0 \in \Omega$. Nech funkcia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ rieši Poissonovu rovnicu

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ukážte, že platí odhad

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{n} |\Omega| \text{diam}(\Omega)^2,$$

kde $|\Omega|$ je Lebesgueova miera oblasti Ω (jej objem) a $\text{diam}(\Omega)$ je priemer množiny Ω v Euklidovskej metrike.

Návod: Bez ujmy na všeobecnosti uvažujte, že počiatok súradnicovej sústavy leží vo vnútri oblasti Ω . Nájdite funkciu w takú, že $\Delta w = 1$, použite princíp maxima na rozdiel $u - w$ a aplikujte nerovnosť z predošlého príkladu na funkciu u .

Príklad 8. Predpokladajme, že funkcia $u = u(x, y)$ vyhovuje rovnici

$$\Delta u = x^2 + y^2 \quad \text{v } \Omega = \{(x, y), x^4 + y^4 < 1\},$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{na hranici } \partial\Omega.$$

Ukážte, že $u(x, y) \leq \frac{x^4 + y^4 - 1}{12}$ pre každé $(x, y)^T \in \Omega$.

Príklad 9. Pre ktoré hodnoty parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ má rovnica $\Delta u = \lambda u$ netriviálne riešenie $u = u(x, y) : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, (t. j. nerovnajúce sa identicky nule) a také, že $u = 0$ na hranici štvorca $(0, 1) \times (0, 1)$.

Príklad 10. Nájdite hodnotu $u(0, 0)$ funkcie $u = u(x, y)$, ktorá vyhovuje rovnici $\Delta u = 0$ v B , $u(x, y) = x + y$ na hranici ∂B , kde $B \subset \mathbb{R}^2$ je kruh so stredom $(0, 0)^T$ a polomerom 1.

Príklad 11. Nájdite radiálne symetrické riešenie $u = u(x_1, \dots, x_n)$ úlohy

$$\Delta u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{v } \Omega = B(0, 1),$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde $B(0, 1)$ je guľa v \mathbb{R}^n so stredom 0 a polomerom 1.

Kapitola 6

Hyperbolické rovnice

Hyperbolické parciálne diferenciálne rovnice predstavujú tretiu triedu rovníc druhého rádu, ktorými sa v tejto učebnici budeme zaoberať. Vlastnosti ich riešení sú kvalitatívne odlišné od riešení parabolických alebo eliptických rovníc. Ich základným fyzikálnym modelom sú vlnové rovnice, t. j. rovnice opisujúce časo-priestorové šírenie vln alebo kmitov. Povaha šírenia vln okrem iného umožňuje efekt zhladzovania riešenia. Problematiku riešenia hyperbolických rovníc a ich kvalitatívnych vlastností podrobnejšie rozoberieme v nasledovných častiach.

6.1 Hyperbolické rovnice na neohraničenom intervale

V tejto kapitole budeme študovať riešenia hyperbolickej vlnovej rovnice priečného kmitania struny (Kirchhoffova rovnica), ktorá má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.1)$$

Táto rovnica musí byť doplnená zodpovedajúcimi počiatocnými podmienkami pre polohu (výchylku) a pre počiatocnú rýchlosť pohybu. Matematicky sa dajú tieto počiatocné podmienky vyjadriť v tvare:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \text{ pre každé } x \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

kde funkcie ϕ a ψ reprezentujú počiatocnú polohu a počiatocnú rýchlosť.

Myšlienka riešenia problému (6.1) je založená na transformácii premenných x, t . Idea transformácie sa dá názorne vysvetliť na základe analógie s geometrickými vlastnosťami objektov v rovine a ich transformáciách pri otáčaní. Množina

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x^2 - a^2 t^2 = 1\}$$

predstavuje dve ramená hyperboly. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme $a = 1$. Vyššie uvedená dvojamenná hyperbola sa otočením o uhol $\pi/4$ transformuje opäť na dvojamennú hyperbolu vyjadrenú nasledovne:

$$\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \xi\eta = 1\}.$$

Otočenie o uhol $\pi/4$ v rovine sa dá jednoducho vyjadriť pomocou transformácie premenných

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Na základe tejto geometrickej myšlienky riešenie $u(x, t)$ vlnovej rovnice (6.1) potom transformujeme pomocou funkcie $U = U(\xi, \eta)$ vyjadrenej v nových transformovaných premenných ξ, η, t , j.

$$U(\xi, \eta) = u(x, t), \quad \text{t. j. } u(x, t) = U(x - at, x + at).$$

Pomocou vzorcov o derivovaní zloženej funkcie môžeme vyjadriť parciálne derivácie funkcie u nasledovne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) - 2a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(\xi, \eta).$$

Odčítaním a^2 -násobku prvej rovnice od druhej potom dostávame, že funkcia $u(x, t)$ je riešením (6.1) práve vtedy, keď funkcia $U(\xi, \eta)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = 0,$$

pre každé $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. To ale znamená, že $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ je konštantná vzhľadom na premennú ξ a teda

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi, \eta) = g(\eta),$$

kde g je nejaká funkcia. Preto sa funkcia U dá vyjadriť nasledovným vzťahom:

$$U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

pre každé $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, kde $G'(\eta) = g(\eta)$. Tým pádom prichádzame k záveru, že riešenie hyperbolickej rovnice (6.1) sa dá vyjadriť v tvare

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at),$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{R}$, kde $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú reálne funkcie reálnej premennej. Poznamenajme, že vyššie uvedený vzťah nám hovorí o tom,

že riešením $u(x, t)$ hyperbolickej vlnovej rovnice je vlastne lineárna superpozícia dvoch riešení $F(x - at)$ a $G(x + at)$, ktoré reprezentujú dve vlny šíriace sa doľava a doprava s rýchlosťami $\pm a$. Ostáva určiť tieto funkcie tak, aby boli splnené aj počiatočné podmienky pre polohu a rýchlosť, t. j.

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x).$$

Z podmienky $u(x, 0) = \phi(x)$ vyplýva, že pre funkcie F a G musí platiť

$$F(x) + G(x) = \phi(x)$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$ a preto $G(x) = \phi(x) - F(x)$. Z podmienky $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ zase vyplýva, že

$$-aF'(x) + aG'(x) = \psi(x)$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = \phi(x) - G(x)$. Preto $G'(x) = \frac{1}{2a}(\psi(x) + a\phi'(x))$. To znamená, že

$$G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) \, d\xi + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je konštanta. Potom

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) \, d\xi - C,$$

a tak sa dostávame k explicitnému vzorcu riešenia:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.3)$$

Vzorec (6.3) sa nazýva d'Alembertov vzorec¹ riešenia hyperbolickej vlnovej rovnice (6.1)

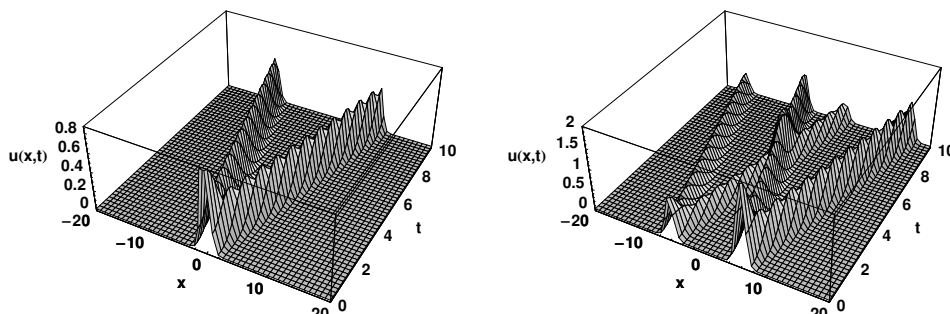
6.1.1 Príklady riešenia vlnovej rovnice na neohraničenom intervale

Cieľom tejto časti je ukázať príklady praktického použitia d'Alembertovho vzorca pri stanovení riešenia vlnovej rovnice.

Na Obr. 6.1 (vľavo) vidíme časo-priestorové zobrazenie riešenia $u(x, t)$ vlnovej rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

¹Jean Baptiste d'Alembert Le Rond (1717-1783) fr. matematik, fyzik a filozof. Zaoberal sa matematickou analýzou a diferenciálnym počtom. Zaoberal sa tiež pohybom nebeských telies. Spoločne s Diderotom vydával Encyklopédiu.

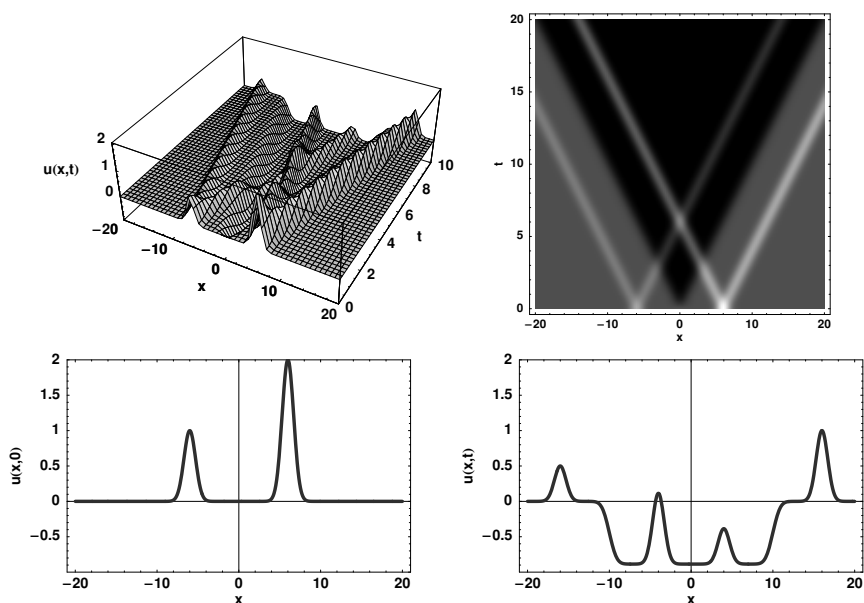


Obr. 6.1: Riešenie vlnovej rovnice pre $\phi(x) = e^{-x^2}$ (vľavo) a $\phi(x) = e^{-(x+6)^2} + 2e^{-(x-6)^2}$ (vpravo). V oboch príkladoch je počiatková rýchlosť $\psi(x) \equiv 0$.

s počiatkovými podmienkami pre polohu $\phi(x) = e^{-x^2}$ a nulovú rýchlosť $\psi(x) \equiv 0$. Z obrázka je zrejmé, že riešením sú dve navzájom vzdialujúce sa vlny putujúce s rýchlosťami $a = \pm 1$. Na Obr. 6.1 (vpravo) môžeme pozorovať jav interferencie vln. Počiatková podmienka bola stanovená $\phi(x) = e^{-(x+6)^2} + 2e^{-(x-6)^2}$ a $\psi(x) \equiv 0$. Putujúca vlna štartujúca s počiatkovej vlny v strede $x = -6$ a pohybujúca sa s rýchlosťou $a = 1$ doprava, sa zhruba v čase $t \approx 6$ stretáva s vlnou, ktorá bola na začiatku sústredená v $x = 6$, a rýchlosťou $a = -1$ putujúcou doľava. V bode stretu vln dochádza k ich interferencii. Po tomto čase vlny postupujú nezmenené vo svojich smeroch s danými rýchlosťami $a = \pm 1$. Poznamenajme, že jav interferencie vln, pri ktorom sa vlny navzájom neovplyvnia a len sa skladajú je výlučne vlastnosťou riešení lineárnych rovníc. Z teórie nelineárnych vlnových rovníc je známe, že v prípade vlnových riešení nelineárnej vlnovej rovnice môžu vlny navzájom interagovať a ovplyvňovať sa.

Na Obr. 6.2 (vľavo) je znázornený časo-priestorový priebeh riešenia vlnovej rovnice s počiatkovou podmienkou pre polohu $\phi(x) = e^{-(x+6)^2} + 2e^{-(x-6)^2}$. Na rozdiel od Obr. 6.1 (vpravo) je teraz počiatková rýchlosť nenulová, konkrétne $\psi(x) = e^{-x^2}$. V pravej časti obrázku je znázornený 2D graf hustoty funkcie $u(x, t)$. Zreteľne je viditeľná interferencia vln postupujúcich doľava a doprava.

Posledná ukážka na Obr. 6.3 dokumentuje nezhladzovanie riešenia vlnovej rovnice. Funkcia $u(x, 0) = \phi(x)$ bola na počiatku iba spojitou funkciou, ktorá nebola diferencovateľná v bodoch $x = -1, 0, 1$. Táto vlastnosť sa prenáša (propaguje) s postupujúcim časom a riešenie je len spojitým a nie hladkým pre každé $t > 0$.



Obr. 6.2: Riešenie vlnovej rovnice pre $\phi(x) = e^{-(x+6)^2} + 2e^{-(x-6)^2}$ a $\psi(x) = -e^{-x^2}$ (vľavo hore). Hustotový graf riešenia (vpravo hore). Graf počiatkovej podmienky $u(x, 0)$ (vľavo dole) a riešenie $u(x, t)$ v čase $t = 10$ (vpravo dole).

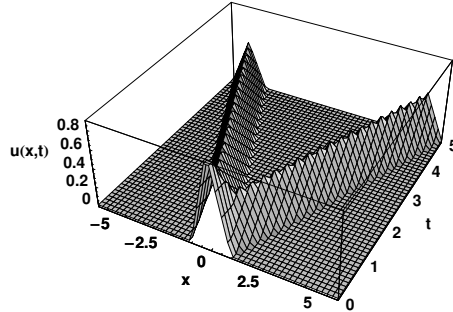
6.2 Kvalitatívne vlastnosti riešení hyperbolickej rovnice

Hyperbolicke rovnice podobne ako parabolické rovnice reprezentujú matematické rovnice pre časo-priestorovo závislé veličiny, akými môžu byť na jednej strane napr. rozloženie teploty, resp. cena finančného derivátu (parabolické rovnice) a na druhej strane výchylka kmitajúcej struny alebo membrány (hyperbolicke rovnice).

Na rozdiel od riešení parabolických rovníc je u riešení hyperbolickej vlnovej rovnice jasne badateľný rozdiel v nasledovných dvoch vlastnostiach:

- 1) Riešenia $u(x, t)$ a $\bar{u}(x, t)$ nemusia byť navzájom usporiadané v prípade, že ich počiatkové podmienky boli usporiadané. To znamená, že vo všeobecnosti z usporiadania počiatkových podmienok $\bar{u}(x, 0) \leq u(x, 0)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ nemusí vyplývať aj usporiadanie riešení $\bar{u}(x, t) \leq u(x, t)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;
- 2) Riešenie $u(x, t)$ sa nezhladzuje v x -premennej pre $t > 0$.

Prvá vlastnosť je dôsledkom d'Alembertovho vzorca (6.3). Na príklade z Obr. 6.2 ukážeme neplatnosť porovnávania riešení hyperbolickej rovnice.



Obr. 6.3: Riešenie vlnovej rovnice pre počiatočnú polohu ϕ , ktorá je po častiach lineárnou funkciou a $\psi(x) \equiv 0$.

Vľavo dole je znázornená počiatočná podmienka $u(x, 0)$ a vpravo dole je znázornený priebeh riešenia $u(x, t)$ v čase $t = 10$. Počiatočná rýchlosť bola zvolená ako $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = -e^{-x^2}$. Je evidentné, že riešenie v čase $t = 10$ môže nadobúdať ako kladné tak aj záporné hodnoty. Na druhej strane, ak vezmeme triviálne riešenie $\bar{u}(x, t) \equiv 0$ spĺňajúce triviálne počiatočné podmienky $\bar{u}(x, 0) \equiv 0$ a $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) \equiv 0$, tak zrejme platí $\bar{u}(x, 0) \leq u(x, 0)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, ale $\bar{u}(x, t) \not\leq u(x, t)$.

Druhá vlastnosť je bezprostredne zrejímavá z d'Alembertovho vzorca (6.3). Ak počiatočná funkcia ϕ nie je sama o sebe hladkou funkciou, tak body nehladkosti funkcie ϕ sa propagujú ďalej v riešení $u(x, t)$ s rýchlosťou $a = \pm 1$ doľava a doprava. Na Obr. 6.3 je znázornené takéto propagovanie nediferencovateľnosti počiatočnej funkcie v bodoch $-1, 0, 1$ v priestore a čase.

Pripomeňme, že práve vlastnosti 1) a 2) boli typickými vlastnosťami riešení parabolických rovníc.

6.3 Hyperbolické rovnice na ohraničenom intervale

V tejto časti sa budeme zaoberať metódou hľadania riešenia hyperbolickej rovnice, ktorá je definovaná na ohraničenej priestorovej oblasti $x \in (c, d)$, kde $(c, d) \subset \mathbb{R}$ je zadaný interval. Bez ujmy na všeobecnosti sa podobne ako v Kapitole 4.2 obmedzíme iba na jednotkový interval $x \in (0, 1)$. Budeme študovať riešenia nasledovnej nehomogénnej hyperbolickej rovnice:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & \text{pre všetky } x \in (0, 1), t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{pre všetky } x \in (0, 1), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & \text{pre všetky } x \in (0, 1), \end{cases} \quad (6.4)$$

spĺňajúce zadané počiatkové podmienky a Dirichletove okrajové podmienky. Myšlienka riešenia je opäť založená na hľadaní riešenia v tvare trigonometrického Fourierovho radu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \phi_k(x), \quad (6.5)$$

s časovo závislými koeficientami $\alpha_k(t)$, kde

$$\phi_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}x) \quad \text{a} \quad \lambda_k = k^2\pi^2.$$

Predpokladajme, že poznáme rozklad zadanej funkcie $f(x, t)$ do trigonometrického Fourierovho radu

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x),$$

pričom predpokladáme, že tento Fourierov rad konverguje bodovo v intervale $(0, 1)$. Analogicky ako v Kapitole 4.2.2 sa koeficienty dajú vyjadriť vzťahom:

$$f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin(k\pi x) dx.$$

To je splnené napríklad ak $f(x, t)$ je po častiach spojitá funkcia v premennej $x \in [0, 1]$. Ak teraz dosadíme funkciu $u(x, t)$ vyjadrenú pomocou radu (6.5) do rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$ dostaneme nasledovnú schému:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) & -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & = & f(x, t) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{\alpha}_k(t) \phi_k(x) + a^2 \alpha_k(t) (-\phi_k''(x))) & = & \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\ddot{\alpha}_k(t) \phi_k(x) + a^2 \lambda_k \alpha_k(t) \phi_k(x)) & = & \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x). \end{array}$$

Podobne ako v prípade použitia Fourierovej metódy pre hľadanie riešenia parabolickej rovnice (pozri Kapitolu 4.2) môžeme usúdiť, že jednotlivé koeficienty na ľavej a pravej strane pri každej bázeovej funkcii $\phi_k(x)$ musia byť rovnaké, t. j.

$$\ddot{\alpha}_k(t) + a^2 \lambda_k \alpha_k(t) = f_k(t) \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \quad (6.6)$$

Počiatkové hodnoty $\alpha_k(0)$ sú určené na základe zadanej počiatkovej podmienky $u(x, 0) = \phi(x)$,

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \phi_k(x). \quad (6.7)$$

a teda

$$\alpha_k(0) = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(k\pi x) dx.$$

Na vyriešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu (6.6) potrebujeme poznať nielen hodnotu $\alpha_k(0)$, ale aj hodnotu časovej derivácie $\dot{\alpha}_k(0)$. Tú určíme na základe druhej počiatkovej podmienky na u , t. j. počiatkovej rýchlosti $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$. Z Fourierovho trigonometrického rozvoja (6.5) funkcie $u(x, t)$ dostávame formálnym diferencovaním podľa premennej t , že platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\alpha}_k(t) \phi_k(x), \quad (6.8)$$

a teda pre počiatkové hodnoty $\dot{\alpha}_k(0)$ dostávame

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\alpha}_k(0) \phi_k(x), \quad (6.9)$$

a teda

$$\dot{\alpha}_k(0) = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin(k\pi x) dx.$$

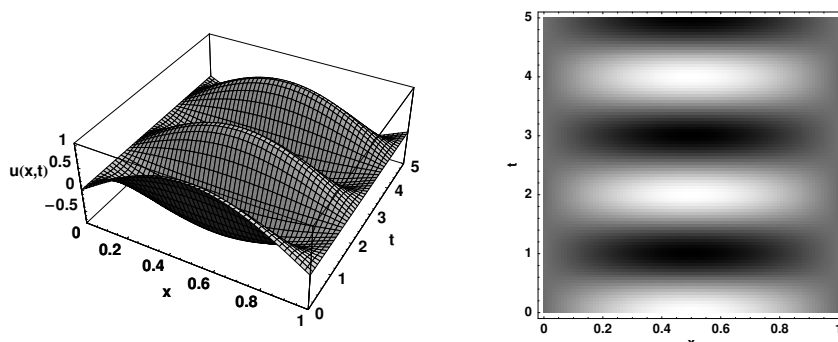
Spočítateľný systém rovníc (6.6) pre $n \in \mathbb{N}$, spolu s počiatkovými podmienkami $\alpha_k(0), \dot{\alpha}_k(0)$ môžeme vyriešiť elementárnymi metódami riešenia obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu so zadanými počiatkovými podmienkami.

Uvedieme konkrétny príklad výpočtu riešenia nehomogénnej rovnice.

Príklad 6.2.1

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 & \text{pre všetky } x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Postupne dostávame: $u(x, 0) = \phi(x) = \sin(\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \phi_k(x)$, kde $\alpha_1(0) = 1$ a $\alpha_k(0) = 0$ pre $k \geq 2$. Rozvojom počiatkovej funkcie $\psi(x) \equiv 0$



Obr. 6.4: Riešenie vlnovej rovnice pre počiatočnú polohu $\phi(x) = \sin(\pi x)$ a rýchlosť $\psi = 0$ (vľavo). Hustotový graf riešenia je vpravo.

triviálne dostávame, že platí $\dot{\alpha}_k(0) = 0$ pre $k \geq 1$. Pravá strana $f(x, t) \equiv 1$ sa dá rozvinúť do radu

$$f(x, t) \equiv 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) \phi_k(x)$$

a teda $f_k(t) = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k)$. Máme teda riešiť ODR:

$$\ddot{\alpha}_k(t) + \lambda_k \alpha_k(t) = f_k(t).$$

V tomto príklade zrejme koeficient $f_k(t) \equiv f_k$ nezávisí na čase t . Metódou riešenia ODR pomocou metódy neurčitých koeficientov dostaneme, že riešenie $\alpha_k(t)$ je určené vzťahom

$$\alpha_k(t) = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{f_k}{\lambda_k}.$$

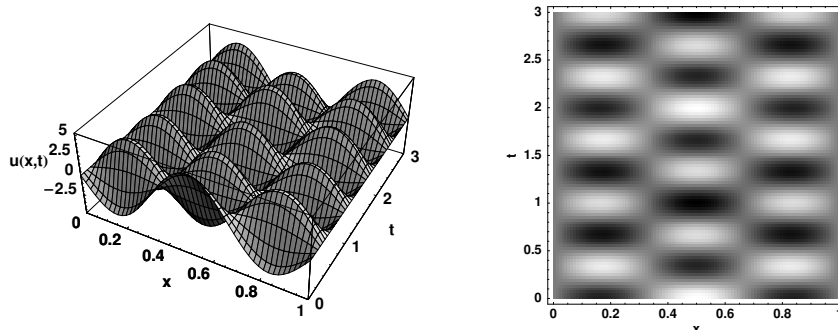
Koeficienty A_k, B_k určíme pomocou počiatočných podmienok. Vzhľadom na tvar $\alpha_k(0), \dot{\alpha}_k(0)$ a $f_k(t) \equiv f_k$ napokon dostávame

$$A_k = \alpha_k(0) - \frac{f_k}{\lambda_k}, \quad B_k = 0.$$

Pripomeňme, že $\lambda_k = k^2 \pi^2$. Riešenie sa preto dá vyjadriť vzorcom

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\pi t) + \frac{f_k}{\lambda_k} \right) \sin(k\pi x). \quad (6.11)$$

Obr. 6.4 graficky znázorňuje priebeh riešenia $u(x, t)$ z predošlého príkladu.



Obr. 6.5: Riešenie vlnovej rovnice pre počiatocnú polohu $\phi(x) = \sin(\pi x) - 4 \sin(3\pi x)$ a rýchlosť $\psi = 0$ (vľavo). Hustotový graf riešenia je vpravo.

Príklad 6.2.2 Uvažujme podobný príklad riešenia hyperbolickej rovnice. Na rozdiel od predošlého príkladu budeme uvažovať počiatocnú podmienku $u(x, 0) = \phi(x) = \sin(\pi x) - 4 \sin(3\pi x)$. Ostatné parametre úlohy sú zhodné ako v Príklade 6.2.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 & \text{pre všetky } x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) - 4 \sin(3\pi x) & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{pre všetky } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pre všetky } t > 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Riešenie úlohy je dané rovnakým vzorcom ako (6.11) s tou výnimkou, že $\alpha_1(0) = 1, \alpha_3(0) = -4$ a $\alpha_k(0) = 0$ pre ostatné $k \in \mathbb{N}$. Riešenie $u(x, t)$ je zobrazené na Obr. 6.5.

6.4 Príklady

Príklad 1. Nájdite riešenie $z = z(x, t)$ hyperbolickej rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = e^{-x^2},$$

a vypočítajte limitu $\lim_{t \rightarrow \infty} z(x, t)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

Príklad 2. Nech $z = z(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ukážte, že funkcionál energie $E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx$ nezávisí na $t > 0$ a nájdite jeho číselnú hodnotu.

Návod: derivujte funkcionál energie podľa času a využite fakt, že funkcia u vyhovuje horeuvedenej hyperbolickej rovnici.

Príklad 3. Nech Φ, Ψ sú zadané funkcie na \mathbb{R} také, že $\int_{\mathbb{R}} (\Phi'(x))^2 dx < \infty$ a $\int_{\mathbb{R}} (\Psi(x))^2 dx < \infty$. Nech $u = u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \Psi(x).$$

Ukážte, že funkcionál energie $E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx$ nezávisí na $t > 0$ a nájdite jeho hodnotu vyjadrenú prostredníctvom funkcií Φ, Ψ .

Príklad 4. Nech $z = z(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$z(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),$$

pričom je známe, že funkcie ϕ, ψ spĺňajú: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi'(x) = 0$. Ukážte, že funkcionál $E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} z(x, t) dx$ je lineárnou funkciou v čase $t > 0$

Príklad 5. Pomocou d'Alembertovho vzorca nájdite riešenie $z = z(x, t)$ rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{1+x^2},$$

a vypočítajte limitu $\lim_{t \rightarrow \infty} z(x, t)$.

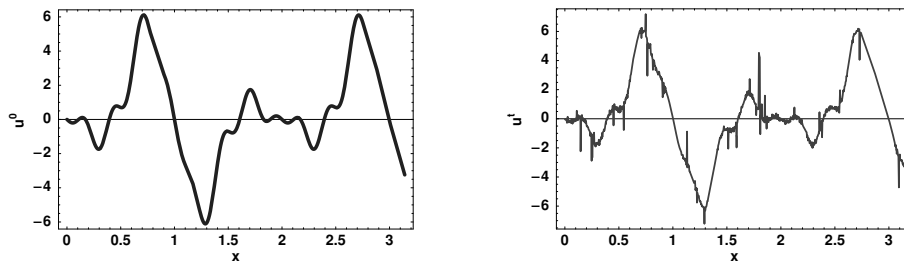
Niektoré vybrané aplikácie parciálnych diferenciálnych rovníc

Cieľom tejto prehľadovej kapitoly je poukázať na potenciál možného využitia parciálnych diferenciálnych rovníc. V prvej kapitole sme už spomenuli niektoré, predovšetkým fyzikálne aplikácie. Uviedli sme aj Black – Scholesov model oceňovania derivátov cenných papierov. V kapitole o eliptických rovniciach sme uviedli niektoré možné aplikácie eliptických parciálnych diferenciálnych rovníc v oblasti charakterizácie potenciálov a harmonických funkcií. V tejto kapitole sa preto zameriame na ďalšie menej štandardné aplikácie parciálnych diferenciálnych rovníc. Prvá aplikácia sa týka spracovania jednorozmerného signálu, ktorým môže byť napr. zvuk. Druhá aplikácia je zameraná na filtráciu obrazu. Napokon, pomocou výsledkov o harmonických funkciách, ukážeme základnú vetu algebry, ktorá nám hovorí o tom, že každý polynóm s komplexnými koeficientami má v komplexných číslach koreň.

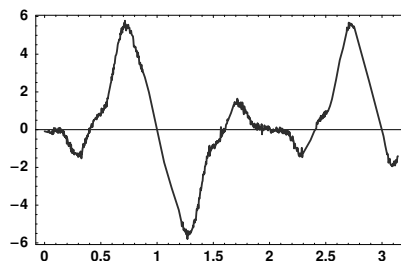
7.1 Parabolické rovnice a filtrácia signálu

V tejto časti sa zameriame na jednu z moderných aplikácií parabolických diferenciálnych rovníc, ktorá sa používa vo filtrácii jednorozmerných signálov, akým môže byť napr. zvukový signál. Predstavme si, že zvukový signál je reprezentovaný funkciou $u^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Súradnica x môže reprezentovať časovú os signálu, kým hodnota $u^0(x)$ je amplitúda signálu.

Na Obr. 7.1 je vľavo znázornený príklad originálneho signálu, akým môže byť napr. zvukový signál. V pravej časti obrázku ja zachytený za-



Obr. 7.1: Originálny neskeslený signál (vľavo) a zašumený signál (vpravo).



Obr. 7.2: Vyhľadanie zašumeného signálu.

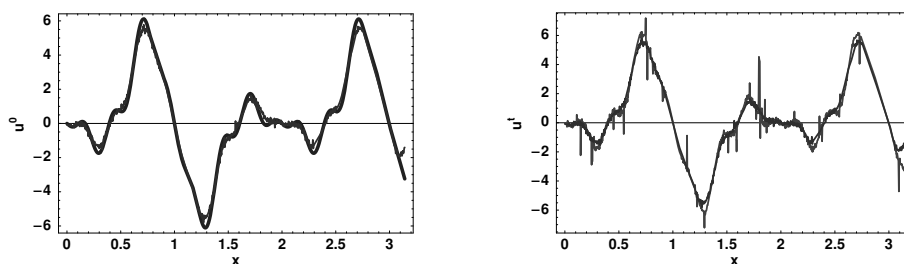
šumený signál, ktorý vznikol z originálneho signálu pridaním šumu. Šum je dôsledkom skreslenia pri prenose údajov, resp. poškodenia analógového záznamového média ako napr. vinylová gramofónová platňa. Tento šum je možné na Obr. 7.1 (vpravo) pozorovať ako náhodné v čase a aj veľkosťou náhodné prídavky (šum) k danému originálnemu signálu.

Možnosť využitia zhladzujúceho efektu riešení parabolických rovníc je zrejmá. Pokiaľ by sme zašumený signál interpretovali ako počiatočnú podmienku $u^0(x)$, tak riešenie $u(x, t)$ parabolickej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

je podľa princípu zhladzovania riešení už hladkým pre každý kladný čas $\tau > 0$ (pozri Kapitoly 4.1.3 a 4.2.5). V tomto prípade „čas“ τ nie je reálny čas priebehu signálu (ktorý sme si označili ako x), ale $\tau > 0$ reprezentuje tzv. „škálu“ pre filtráciu signálu. Riešenie horeuvedenej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice môže byť explicitne vyjadrené vzťahom

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u^0(s) ds, \quad \text{kde } G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right). \quad (7.1)$$



Obr. 7.3: Porovnanie vyhladeného signálu s nezašumeným (vľavo) a zašumeným signálom (vpravo).

Na Obr. 7.2 môžeme zreteľne pozorovať, že riešenie $u(x, \tau)$ horeuvedenej parabolickej rovnice, ktoré bolo získané pomocou vzorca (7.1), je zhladené a navyše nie je príliš vzdialené od originálneho signálu. Táto vlastnosť bola dosiahnutá pomocou použitia relatívne nízkej hodnoty „škálovacieho času“ $\tau = 10^{-3}$. Na Obr. 7.3 je zachytené porovnanie zhladeného signálu s originálnym nezašumeným ako aj so zašumeným signálom.

7.2 Parabolické rovnice a filtrácia obrazu

V posledných rokoch sa vďaka rozvoju počítačovej techniky dostáva do popredia úloha filtrácie digitálne zaznamenaných dvoj a trojrozmerných obrazov. Pôjde nám o odstránenie nežiadúcich prejavov poškodenia obrazu, akými sú napríklad šum alebo znečistenie.

Základ pochopenia metódy filtrácie obrazu je založený na využití vlastností riešenia istej parabolickej PDR, pričom originálny obraz, resp. filtrovaný obraz reprezentujeme ako jej počiatočnú podmienku $u^0(x)$ resp. jej riešenie $u(x, t)$ v krátkom čase t . Originálny obraz určený na filtráciu môže byť reprezentovaný funkciou

$$u^0(\cdot) : [0, \text{Šírka}] \times [0, \text{Výška}] \rightarrow [0, 1].$$

Úloha spočíva v konštrukcii nového obrazu

$$u(\cdot, t) : [0, \text{Šírka}] \times [0, \text{Výška}] \rightarrow [0, 1]$$

reprezentujúceho zhladený (filtrovaný) obraz v škále $t \in (0, T]$

Na obrázkoch Obr. 7.4 môžeme pozorovať, ako sa dvojrozmerný obraz dá reprezentovať pomocou funkcie intenzity $u^0(x) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Pre jednoduchosť budeme uvažovať iba čiernobiele obrazy, kde vystačíme iba s jedným kanálom pre reprezentáciu obrazu, t. j. $u^0(x) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a nie $u^0(x) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$ ako by tomu bolo v prípade filtrácie farebných obrázkov s tromi farebnými kanálmi RGB (red/green/blue).

Hlavná myšlienka použitia parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice na úlohu filtrácie obrazov opäť vychádza z princípu zhladzovania riešení, ktorý bol diskutovaný v Kapitolách 4.1.3 a 4.2.5 a bol použitý v predošlej časti na zhladzovanie - filtráciu jednorozmerných signálov. Uvažujme preto dvojrozmernú parabolickú rovnicu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7.2)$$

kde počiatočná podmienka reprezentuje poškodený alebo zašumený dvojrozmerný obraz. Riešenie hľadáme tak, aby vyhovovalo Neumanovým okrajovým podmienkam, t. j.

$$\frac{du}{d\vec{n}} = 0, \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Pre jednoduchosť výkladu budeme predpokladať, že dvojrozmerná priestorová premenná $x = (x_1, x_2)^T$ náleží do oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ a časová premenná $t \in (0, T)$. K tejto diferenciálnej rovnici môžeme poľahky skonštruovať numerickú aproximatívnu schému riešenia. Numerická aproximácia vychádza z nahradenia spojitého riešenia $u(x, t)$, kde $x \in (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2, t \in (0, T)$ prostredníctvom hodnôt $u_{i,j}^m$, pričom $t = mk, x = (ih, jh)$ a $k > 0$, resp. $h > 0$ sú časový resp. priestorový diskretizačný krok. Ak nahradíme časovú deriváciu konečnou diferenciou a druhé derivácie $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ konečnými diferenciami druhého rádu, dostávame tak časovo explicitnú metódu konečných diferencií v tvare

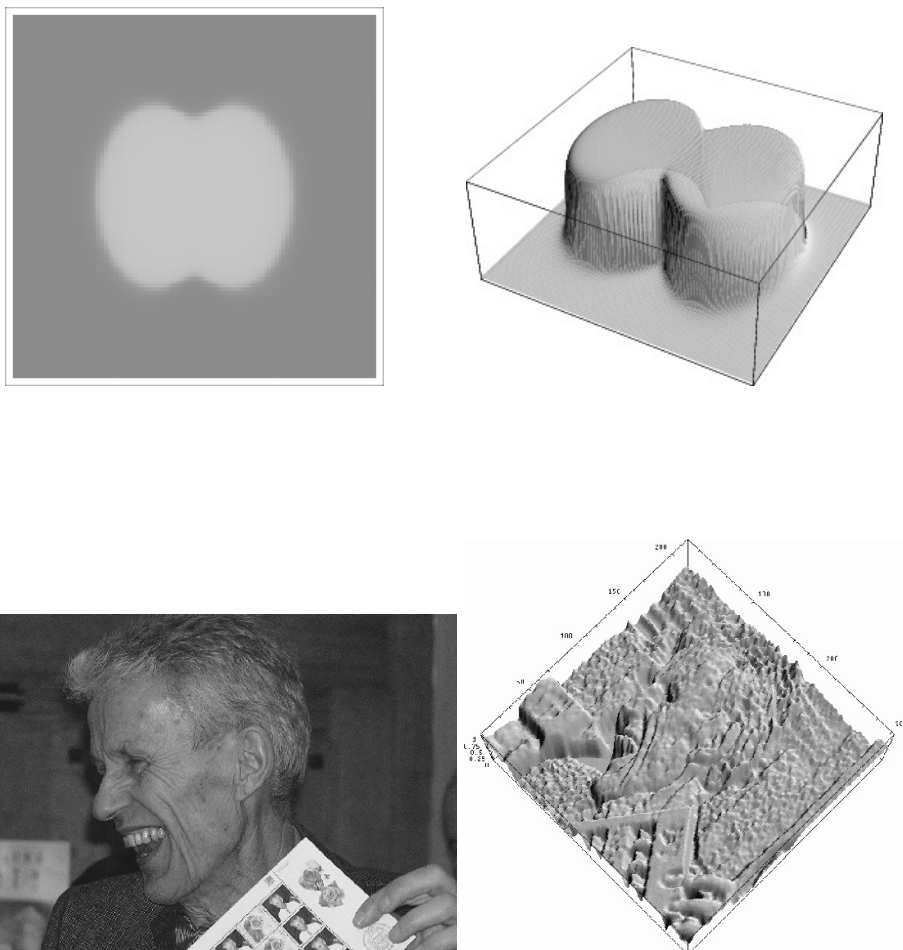
$$\frac{u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j}^m}{k} = \frac{u_{i+1,j}^m + u_{i,j+1}^m - 4u_{i,j}^m + u_{i-1,j}^m + u_{i,j-1}^m}{h^2}, \quad (7.3)$$

pričom diskkrétne riešenie vyhovuje diskretizovaným Neumanovým okrajovým podmienkam. Táto diskretizačná schéma bola dobre známa už aj v časoch K. F. Gaussa.¹ Dodnes sa tejto schéme v kontexte numerického riešenia diferenciálnych rovníc hovorí Gaussov operátor alebo Gaussov filter. V prípade voľby pomeru časového a priestorového kroku

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (7.4)$$

je známe, že vyššie uvedená diskretizačná schéma je stabilná. Uvedená podmienka (7.4) sa nazýva Courantova, Fridrichsova a Lewyho podmienka

¹Karl Friedrich Gauss (1777-1855) nem. matematik, fyzik, astronóm a geofyzik. Zaoberal sa najmä matematickou analýzou a algebrou. Dokázal fundamentálne matematické výsledky ako napr. základná veta algebry. Založil modernú teóriu komplexných funkcií. Zaoberal sa teóriou chýb. Vypracoval základné princípy elektromagnetizmu.



Obr. 7.4: Vľavo je znázornený obraz a vpravo je jeho funkcia intenzity $u^0 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Na dolných obrázkoch je zachytený reálny obraz (P. Brunovský) a funkcia intenzity obrazu.

| | | |
|-----|-----|-----|
| 0 | 0.5 | 0 |
| 0.5 | -1 | 0.5 |
| 0 | 0.5 | 0 |

Obr. 7.5: Gaussovský rozmazávací konečno – diferenčný operátor šírky 3.



Obr. 7.6: Primavera (detail), pôvodný obrázok so šumom (vľavo), filtrovaný obrázok pomocou jednoduchého Gaussovho filtra (vpravo).

stability explicitnej schémy. O rôznych diskretizačných schémach pre riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc sa môže čitateľ podrobnejšie dozvedieť v učebnici [2]. Pre výpočet novej hodnoty riešenia $u_{i,j}^{m+1}$ v časovej vrstve $t = (m + 1)k$ môžeme použiť diskretizačnú schému konečných diferencií znázornenú na Obr. 7.5. V tomto príklade sme použili hraničnú voľbu pomeru $\frac{k}{h^2} = \frac{1}{2}$. Potom hodnota $u_{i,j}^{m+1}$ sa dá spočítať ako -1 násobok hodnoty $u_{i,j}^m$ v predošlej časovej vrstve $t = mk$ a súčet $\frac{1}{2}$ -násobkov okolitých hodnôt riešenia $u_{p,q}^m$, kde $p = i - 1, i + 1, q = j - 1, j + 1$.

Diskretizáciu parabolickej rovnice (7.2) je možné vytvoriť aj implicitným spôsobom

$$\frac{u_{i,j}^m - u_{i,j}^{m-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j}^m + u_{i,j+1}^m - 4u_{i,j}^m + u_{i-1,j}^m + u_{i,j-1}^m}{h^2}. \quad (7.5)$$

Na každej časovej úrovni je potom nutné riešiť systém lineárnych rovníc, ktorého matica má riedku štruktúru, pričom v každom jej riadku je päť nenulových prvkov. Výhodou implicitnej numerickej schémy jej stabilita, pričom nie je potrebné splniť CFL podmienku medzi časovým a priestorovým diskretizačným krokom.

Na obrázku Obr. 7.6 vidíme detail obrazu Primavera, ktorej autorom je Sandro Filipepi nazývaný Botticelli. Vľavo je pôvodný obrázok so šumom a drobnými nečistotami, vpravo vidno filtrovaný obrázok pomocou jed-



Obr. 7.7: Primavera (detail), pôvodný obrázok so šumom (vľavo), filtrovaný obrázok pomocou nelineárneho selektívneho Gaussovho filtra (vpravo).

noduchého Gaussovho filtra, ktorý vychádza z diskretizácie (7.3) difúznej rovnice (7.2). Ako je zreteľné z Obr. 7.6, pri použití jednoduchéj lineárnej difúznej rovnice (7.2) ako nástroja na filtráciu obrazu, dochádza k neželanému rozmazaniu obrazu. Je to vďaka rovnomernému pôsobeniu difúzie vo všetkých smeroch, bez ohľadu na to, či ide o potrebnú filtráciu (vyhladenie šumu) alebo o neželané vyhladenie (zreteľné rozmazanie hrán v obraze). Tento nedostatok jednoduchéj metódy založenej na riešení lineárnej difúznej rovnice (7.2) je možné odstrániť použitím dômyselnejšieho modelu, ktorý vychádza z riešenia difúznej rovnice. Myšlienka je založená na selektívnom zhladzovaní, pri ktorom zhladzovanie (difúziu) zmenšíme na hranách obrazu, t. j. na jednorozmerných objektoch dvojrozmerného obrazu. Uvažujme preto nasledovnú modifikáciu lineárnej difúznej rovnice (7.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(x, t)\nabla u), \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad (7.6)$$

kde difúzny koeficient a závisí na veľkosti gradientu riešenia

$$a(x, t) = g(|\nabla u(x, t)|).$$

To znamená, že filtráciu budeme realizovať prostredníctvom riešenia neli-

neárnej parabolickej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u) = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x). \quad (7.7)$$

Práve veľkosť gradientu $|\nabla u(x, t)|$ je rozhodujúcim indikátorom prítomnosti hrany v obraze. Ako funkciu kontrastu g je vhodné použiť funkciu $g(s) = 1/(1 + s^2)$ alebo $g(s) = e^{-s}$. Pre takto zvolenú funkciu kontrastu g dostaneme, že difúzny koeficient a je zanedbateľný v bode obrazu, kde je veľká hodnota gradientu $|\nabla u|$ (indikuje prítomnosť hrany v jeho okolí) a blízky k jednotke tam, kde gradient $|\nabla u|$ je malý.

Použitie selektívneho Gaussovho filtra na zašumený detail obrazu Primavera je možné vidieť na Obr. 7.7. V porovnaní s jednoduchou filtráciou na Obr. 7.6 je možné vidieť, že hrany obrazu ostávajú zachované, pričom pôvodný šum je do značnej miery eliminovaný. Model filtrácie obrazu založený na riešení nelineárnej parabolickej rovnice (7.7) bol navrhnutý Peronom a Malikom (pozri [15]). Numerická analýza numerickej schémy pre riešenie Perona-Malikovho modelu viedla k selektívnej filtrácii obrazu Primavera na Obr. 7.7. Obrázok je prevzatý z prehľadového článku Kačura a Mikulu [14].

7.3 Eliptické rovnice a základná veta algebry

V tejto časti poukážeme na možnosť aplikácie poznatkov o správaní sa riešení eliptických rovníc v algebre, ktorá je na prvý pohľad vzdialenou oblasťou od partiálnych diferenciálnych rovníc. Ukážeme základnú vetu algebry, ktorá hovorí, že každý polynóm $P(z)$ s komplexnými koeficientami má koreň v komplexných číslach. Jeho dôkaz však ide za rámec klasickej algebry a spolieha sa na nástroje, ktoré poskytuje komplexná analýza. Vďaka vlastnostiam diferencovateľných (holomorfných) komplexných funkcií komplexnej premennej (Cauchy-Riemannove vzorce) uvedené v Kapitole 6, budeme schopní študovať vlastnosti prostredníctvom vlastností ich reálnych a imaginárnych častí, ktoré, ako už vieme, sú harmonické funkcie.

Skôr ako pristúpime k dôkazu Základnej vety algebry, potrebujeme uviesť jedno tvrdenie, ktoré charakterizuje ohraničené harmonické funkcie.

Tvrdenie 7.1. *Nech $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená harmonická funkcia, t. j. existuje konštanta $M > 0$ taká, že*

$$\Delta u(x) = 0, \quad |u(x)| \leq M \text{ pre každé } x \in \mathbb{R}^n.$$

Potom funkcia u je konštantná v \mathbb{R}^n , t. j. $u(x) = \text{const}$ pre každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti budeme dôkaz robiť v dimenzii $n = 2$. Pre $n \geq 3$ treba len pozmeniť tvar fundamentálneho riešenia Γ Laplaceovej rovnice. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ľubovoľná ohraničená oblasť s hladkou hranicou. Budeme vychádzať zo vzorca (5.23), ktorý charakterizuje každú harmonickú funkciu, t. j.

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \Gamma(\xi - x) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) \, dS + \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) \, dS$$

pre $x \in \Omega$. Ak dosadíme fundamentálne riešenie Γ dané vzťahom (5.10), tak dostaneme

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \ln(|\xi - x|) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) \, dS + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\sum_{j=1}^2 (\xi_j - x_j) n_j}{|\xi - x|^2} u(\xi) \, dS.$$

Pre deriváciu funkcie u podľa premennej x_i potom máme vzťah

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{x_i - \xi_i}{|\xi - x|^2} \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) \, dS - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{n_i}{|\xi - x|^2} u(\xi) \, dS \\ &\quad - \frac{2}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\sum_{j=1}^2 (\xi_j - x_j) n_j}{|\xi - x|^4} (x_i - \xi_i) u(\xi) \, dS. \end{aligned}$$

Nech $\Omega = B(x, r)$ je guľa so stredom x a polomerom $r > 0$. Potom pre $\xi \in \partial\Omega$ platí $|\xi - x| = r$ a teda

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= -\frac{1}{2\pi r^2} \int_{\partial\Omega} (x_i - \xi_i) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) \, dS - \frac{1}{2\pi r^2} \int_{\partial\Omega} n_i u(\xi) \, dS \\ &\quad - \frac{2}{2\pi r^4} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 (\xi_j - x_j) n_j \right) (x_i - \xi_i) u(\xi) \, dS. \end{aligned}$$

Z 2. Greenovej formuly (5.16) dostávame: $\int_{\Omega} u(\xi) \Delta v(\xi) - v(\xi) \Delta u(\xi) \, d\xi = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{dv}{d\vec{n}}(\xi) - v(\xi) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) \, dS$, kde zvolíme za druhú funkciu $v(\xi) = x_i - \xi_i$. Potom

$$\int_{\partial\Omega} (x_i - \xi_i) \frac{du}{d\vec{n}}(\xi) \, dS = - \int_{\partial\Omega} n_i u(\xi) \, dS$$

a teda

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{2}{2\pi r^4} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^2 (\xi_j - x_j) n_j \right) (x_i - \xi_i) u(\xi) \, dS.$$

Keďže $|\sum_{j=1}^2 (\xi_j - x_j) n_j| \leq |\xi - x| = r$ a $|x_i - \xi_i| \leq |\xi - x| = r$, tak

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{2}{2\pi r^4} \int_{\partial\Omega} r^2 |u(\xi)| \, dS \leq \frac{M}{\pi r^2} \int_{\partial\Omega} dS = \frac{2M}{r}$$

nakoľko $\int_{\partial\Omega} dS = 2\pi r$ a podľa predpokladu vety $|u(x)| \leq M$. To ale znamená, že pre limitu $r \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| = 0 \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}^2.$$

To znamená, že funkcia $u(x)$ je konštantná v \mathbb{R}^2 . Dôkaz pre dimenzie $n \geq 3$ je podobný. \diamond

Teraz môžeme pristúpiť k dôkazu základnej vety algebry. Nech $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je nejaký polynóm, t. j.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sú jeho koeficienty, $a_n \neq 0$. Ideme ukázať, že tento polynóm musí mať koreň v komplexných číslach \mathbb{C} . Predpokladajme sporom, že by $P(z) \neq 0$ pre každé komplexné číslo $z \in \mathbb{C}$. Potom by ale komplexná funkcia f komplexnej premennej definovaná ako

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

bola dobre definovaná pre každé komplexné číslo, pretože menovateľ $P(z)$ je rôzny od nuly. Navyše táto funkcia je nekonečne veľakrát diferencovateľná komplexná funkcia komplexnej premennej. Napríklad, $f'(z) = -P'(z)/P(z)^2$. Navyše $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$. Teda funkcia f je ohraničená, t. j. existuje konštanta $M > 0$ taká, že

$$|f(z)| \leq M \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C}.$$

Ak zapíšeme komplexnú funkciu prostredníctvom reálnej a imaginárnej zložky, $f(z) = u(x) + iv(x)$, kde $z = x_1 + ix_2$ a $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tak potom funkcie u, v sú ohraničené v \mathbb{R}^2 tou istou kladnou konštantou $M > 0$. Keďže funkcia f má deriváciu v každom komplexnom čísle $z \in \mathbb{C}$, tak jej reálna a imaginárna zložka sú harmonické funkcie. Presnejšie, podľa vzťahu (5.7) vieme, že platí

$$\Delta u(x) = 0, \quad \Delta v(x) = 0 \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}^2.$$

Podľa Vety 7.1 sú funkcie $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ konštantné a tým pádom aj komplexná funkcia f je konštantná. Potom polynóm P musí byť taktiež konštantnou funkciou premennej z , čo je však očividný spor. Dokázali sme tak nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 7.2. (Základná veta algebry). Nech $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je nejaký komplexný polynóm, t. j. $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, sú jeho koeficienty. Potom existuje koreň $z_* \in \mathbb{C}$ tohto polynómu, t. j. $P(z_*) = 0$.

Postupom dôkazu Základnej vety algebry sme však ukázali aj iné dôležité tvrdenie komplexnej analýzy.

Tvrdenie 7.3. *Nech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexná funkcia komplexnej premennej, ktorá je diferencovateľná (holomorfná) v celej komplexnej rovine \mathbb{C} . Naviac predpokladajme, že funkcia f je aj ohraničená, t.j. existuje konštanta $M > 0$ taká, že $|f(z)| \leq M$ pre každé $z \in \mathbb{C}$. Potom f je nevyhnutne konštantná funkcia.*

Toto tvrdenie bolo dokázané Liouvilleom.²

²Joseph Liouville, (1809-1882) fr. matematik. Pracoval v oblasti matematickej analýzy a diferenciálnych rovníc. V komplexnej analýze sa zaoberal teóriou konformných zobrazení.

Literatúra

- [1] V.J. ARSEININ, *Matematičeskaja fizika. Osnovnyje uravnenija i funkcii*. Nauka, Moska 1966 (slovenský preklad).
- [2] J. BABUŠÍKOVÁ, M. SLODIČKA, *Numerická matematika*. Skriptá, Univerzita Komenského, 2000.
- [3] L. BERS, F. JOHN, M. SCHECTER, *Partial differential equations*. John Wiley & Sons, Inc. 1964.
- [4] A.V. BICADZE, D.F. KALINIČENKO, *Sbornik zadač po uravnenijam matematičeskoj fiziki*. Nauka, Moska 1977.
- [5] F. BLACK, M. SHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **80** (1973), 637-659.
- [6] J. N. DEWYNNE, S. D. HOWISON, J. RUPE, P. WILMOTT, *Some mathematical results in the pricing of American options*. Euro. J. of Applied Mathematics **4** (1993), 381 – 398.
- [7] L. C. EVANS, *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Math. Society. 1998.
- [8] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations*. Holt Reinhart & Winston, New York 1969.
- [9] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc. 1964.
- [10] M. GREGUŠ, *Parciálne diferenciálne rovnice*. Skriptá, Univerzita Komenského, 1983.
- [11] J. HULL, *Options, futures and other derivative securities*. Prentice Hall, 1989.

- [12] F. JOHN, *Partial differential equations*. John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [13] O. JOHN A J. NEČAS, *Rovnice matematické fyziky*. Skriptá, Karlova Univerzita, 1972.
- [14] J. KAČUR A K. MIKULA, *Slowed anisotropic diffusion* In: *Scale-Space Theory in Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1252-1997*, Springer Berlin, Heidelberg, 2006, 357–360.
- [15] P. PERONA A J. MALIK, *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, *Proc. IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision*, **12(7)** (1990), 629–639.
- [16] D. ŠEVČOVIČ, B. STEHLÍKOVÁ, K. MIKULA, *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009, ISBN 978-80-227-3014-3

Register

A

amplitúda signálu, 116
arbitráž, 23
averzia k riziku, 23

B

bezrizikové portfólio, 21
Black – Scholesov vzorec, 63
Black – Scholesova rovnica, 20
Black, F., 20
Botticelli, 121
Burgersova rovnica, 28, 40

C

Cauchy, A. L., 47
Cauchy-Riemannove vzorce, 87, 123
Cauchyho úloha, 47
CFL podmienka stability, 119
charakteristický systém, 34
charakteristika, 34
Courant, 119

D

d'Alembert, J. B., 106
Dirichletova okrajová podmienka, 66
divergencia, 14

E

európska Call opcia, 20, 59

F

filtrácia obrazu, 118
Fourier, J. B., 15
Fourierov rad, 15

Fourierov zákon, 15
Fridrichs, 119
fundamentálne riešenie, 88

G

Gauss, K. F., 119
Gaussov filter, 119
Gaussov operátor, 119
Green, G., 89
Greenova formula, 90
Greenova funkcia, 50

H

harmonická funkcia, 87
Heavisidova funkcia, 48
hlavná časť, 29
holomorfná funkcia, 86
homogénna rovnica, 31
Hooke, R., 85
Hookov zákon, 85
hustota tepelného toku, 15
hyperbolické rovnica, 104

I

interferencia vln, 107
Itôova lema, 22

K

kúpna opcia, 20
Kirchhoffova rovnica, 20, 104
kvázilineárna rovnica, 28

L

Landauov symbol, 93

Laplace, P. S., 84
 Laplaceov operátor, 18, 84
 Laplaceova rovnica, 84, 86–88
 Lewy, 119
 lineárna rovnica, 26
 lineárna superpozícia riešení, 106
 Liouville, J., 126
 Lomonosov, M.V., 11
 Lyapunovov funkcionál energie, 82

M

Maxwell, J. C., 85
 Maxwellove rovnice, 85

N

nežriedlové pole, 14
 nehomogénne úlohy, 56
 nelineárna parabolická rovnica, 122
 Neumanova okrajová podmienka, 81
 Newton, I., 18
 Newtonov potenciál, 94

O

okrajová podmienka, 66
 operátor divergencie, 13

P

Perona-Malikov model, 123
 počiatočná podmienka, 66
 Poisson, D. S., 84
 Poissonov zákon, 84
 Poissonova diferenciálna rovnica, 84
 Poissonova rovnica, 86, 97
 porovnávanie riešení, 97
 potenciál dvojvrstvy, 94
 potenciál vrstvy, 94
 Primavera, 121
 princíp maxima, 95, 97
 princíp porovnávania riešení, 54
 problém vlastných hodnôt, 68
 Put opcia, 64
 putujúca vlna, 107

R

rád rovnice, 26
 radiálne symetrická funkcia, 88
 Riemann, B., 87

rovnica kontinuity, 14
 rovnica priečného kmitania struny, 104
 rovnica priečných kmitaní struny, 20
 rovnica vedenia tepla, 17

S

samopodobná funkcia, 48
 Scholes, M., 20
 solenoidálne pole, 14
 stochastická diferenciálna rovnica, 21
 stredná hodnota, 96

T

tepelný tok, 15
 tretí Newtonov zákon, 18

U

úrovňová množina, 32

V

vektorové pole, 11, 32
 vlastný vektor, 68
 vlnová rovnica, 104

W

Wiener, N., 21
 Wienerov proces, 21

Z

základná veta algebry, 116, 123, 125
 zákon zachovania hmoty, 11
 zhladzovací efekt, 55
 zvukový signál, 116

Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie

Daniel Ševčovič

IRIS, Vydavateľstvo a tlač, s.r.o.

ISBN 978-80-89238-15-6