Algoritmy deterministickej a stochastickej optimalizácie a ich počítačová realizácia

ESF 2007

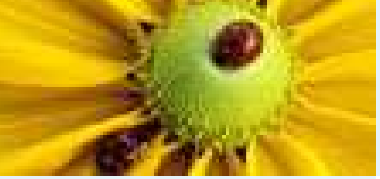
D. Ševčovič

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Univerzita Komenského, 842 48 Bratislava

http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic

Ciele prednáškového cyklu:

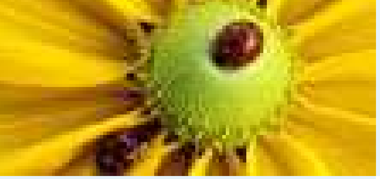
- Cieľom série prednášok je priblížiť moderné numerické metódy a softvérové nástroje na riešenie praktických problémov, ktoré vedú na optimalizačné úlohy.



Úvod

Metódy:

- deterministické metódy optimalizácie
  - voľná a viazaná konvexná optimalizácia
  - Newton-Kantorovičov algoritmus
  - metóda vnútorného bodu (Mehrotrov a Vanderbeiov algoritmus)
- stochastické metódy optimalizácie
  - voľná a viazaná nekonvexná optimalizácia
  - algoritmus evolučných stratégií
  - algoritmus Rechenbergera a metóda simulovaného žíhania



Softvérové nástroje:

- komerčné alternatívy:

Mathematica, Matlab

- nekomerčné alternatívy:

Octave(klon Matlab-u), GNU C - jazyk, Fortran

- nekomerčné sw. balíky:

Vanderbeiov balík pre metódy vnútorného bodu

Úvod

Aplikácie:

- Deterministické metódy optimalizácie
- optimalizácia skladby dodávok elektriny,
- analýza efektívnosti bankových pobočiek,
- optimalizácia rozhodovania prestupov medzi fondmi pri kapitalizačnom pilieri dôchodkového sporenia.

- Stochastické metódy optimalizácie
- optimalizácia rozloženia rajtingových kritérií,
- kalibrácia Term structure modelov (výnosové krivky dlhopisov)

Deterministické optimalizačné metódy

- Newton-Kantorovičova metóda najväčšieho spádu, Kvázinewtonovské metódy

$$\min_{x\in\Omega} \phi(x), \qquad \Omega \subset R^N$$

- Metódy vnútorného bodu a lineárne programovanie

$$\min c^t x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Deterministické metódy

- Newton-Kantorovičova metóda najväčšieho spádu

$$\min_{x\in\Omega} \phi(x), \qquad \Omega \subset R^N$$

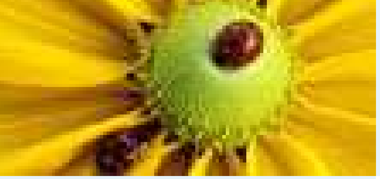
$$\Downarrow$$

Nutné podmienky: $\nabla\phi(x) = 0$

$$\Downarrow$$

- Algoritmus (Newton-Kantorovič)

$$x^{n+1} = x^n - [\nabla^2\phi(x^n)]^{-1}\nabla\phi(x^n), \qquad start \to x^0$$



Deterministické metódy

- Algoritmus (Newton-Kantorovič)

- Set: $start \to x^0$

Do

- Set: $A^n = \nabla^2 \phi(x^n), \qquad b^n = -\nabla \phi(x^n)$
- Solve: $A^n s^n = b^n$
- Set: $x^{n+1} = x^n + s^n$

While ($n < nmax$ and $\|\nabla \phi(x^n)\| > tolerance$)

Metóda vnútorného bodu pre lin. programovanie

- Metódy vnútorného bodu a lineárne programovanie

$$\min c^t x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Doplnkové premenné $Ax + s = b \qquad s \geq s$

$$\Downarrow$$

$$\min c^t x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Metóda vnútorného bodu pre lin. programovanie

- Aproximácia úlohy do vnútra oblasti $x > 0$

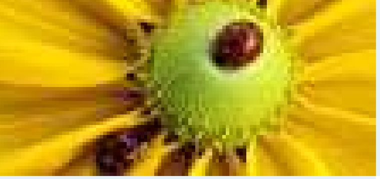
$$\phi_\mu(x) = \min c^t x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

na afínnej množine

$$Ax = b$$

kde $0 < \mu \ll 1$ je malý (transformačný) parameter

$$\mu = \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m ..., \qquad kde \quad \mu_{k+1} = \frac{1}{2}\mu_k$$



Metóda vnútorného bodu pre lin. programovanie

- Metóda viazaných extrémov (Lagrangeove multiplikátory)

pre úlohu

$$\min \phi_\mu(x)$$

pri afínnej väzbe

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b$$

$$A^T\lambda + s = c$$

$$x_i s_i = \mu$$

$$x, s \geq 0$$

Riešime Newton-Kantorovičovou metódou (Mehrotrov algoritmus)

Deterministické metódy

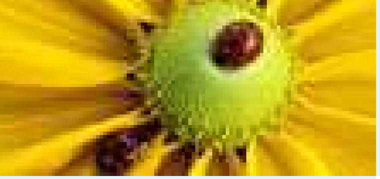
Realizácia v sw. Mathematica

Simplexová metóda - Mathematica

```
n=300
k = 300;

c = Table[1., {i, 1, n}];
A = Table[Table[Abs[Sin[i*j]], {j, 1, n}], {i, 1, k}
b = Table[1., {i, 1, k}];

vystup= LinearProgramming[c, A, b,
"Method" -> {"RevisedSimplex"}]
```

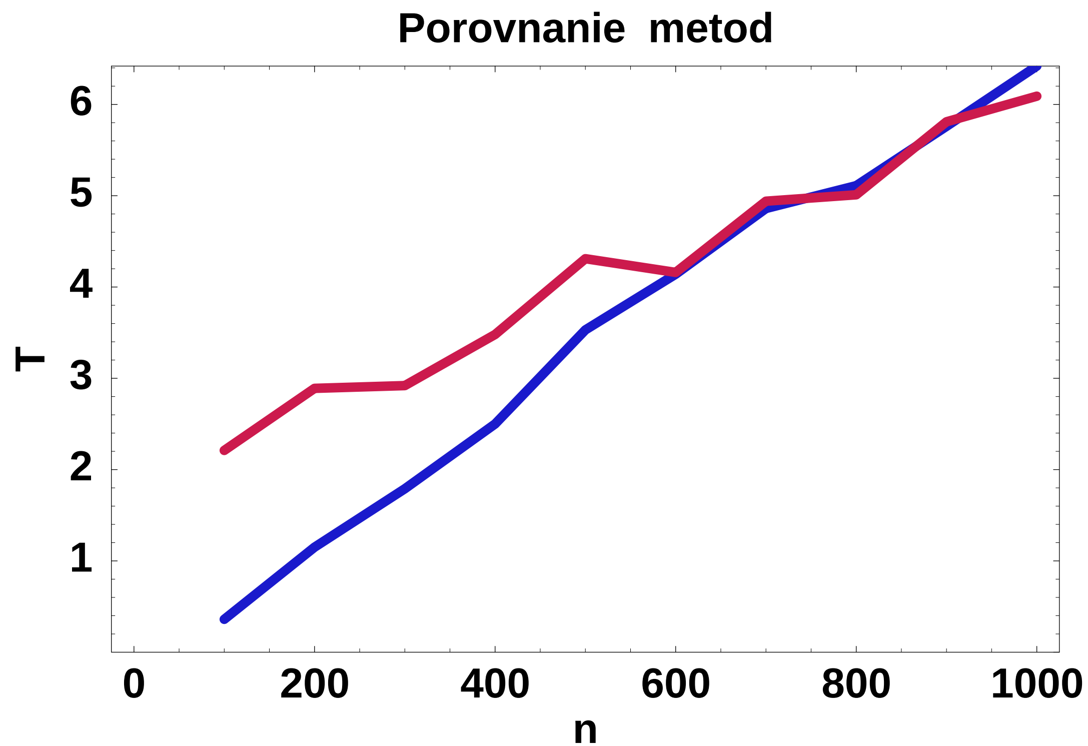
Metóda vnútorného bodu - Mathematica

```
n=300
k = 300;

c = Table[1., {i, 1, n}];
A = Table[Table[Abs[Sin[i*j]], {j, 1, n}], {i, 1, k}
b = Table[1., {i, 1, k}];

vystup= LinearProgramming[c, A, b,
"Method" -> {"InteriorPoint"}]
```



Porovnanie metód

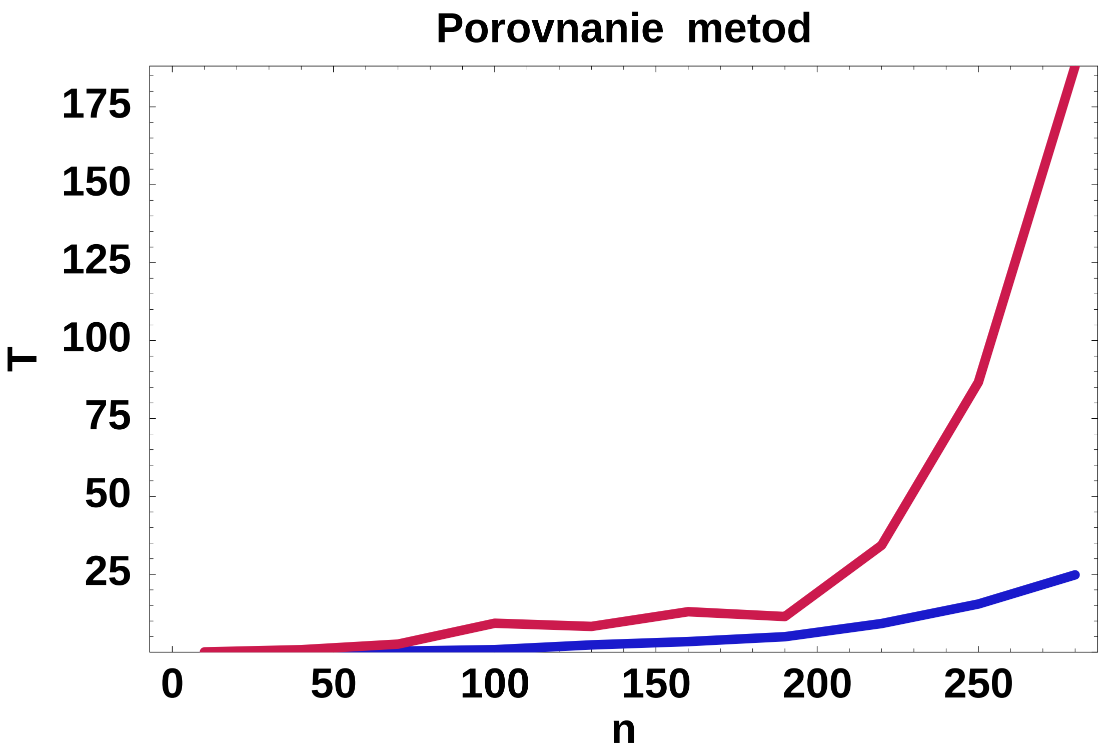
Porovnanie oboch metód - Mathematica



Časová zložitosť simplexovej metódy a metódy vnútorného bodu
Simplexová metóda - červená, Metóda vnútorného bodu - modrá
Rozmer kxn kde $k = 50$ je pevné a $n \in [10, 300]$.

Porovnanie metód

Porovnanie oboch metód - Mathematica



Časová zložitosť simplexovej metódy a metódy vnútorného bodu
Simplexová metóda - červená, Metóda vnútorného bodu - modrá
Rozmer nxn kde $n \in [10, 300]$.

Porovnanie oboch metód - zložitosť

Simplexová metóda - exponenciálna zložitosť
Metóda vnútorného bodu - polynoniálna zložitosť

$\Uparrow$

- Narendra Karmarkar (1984).

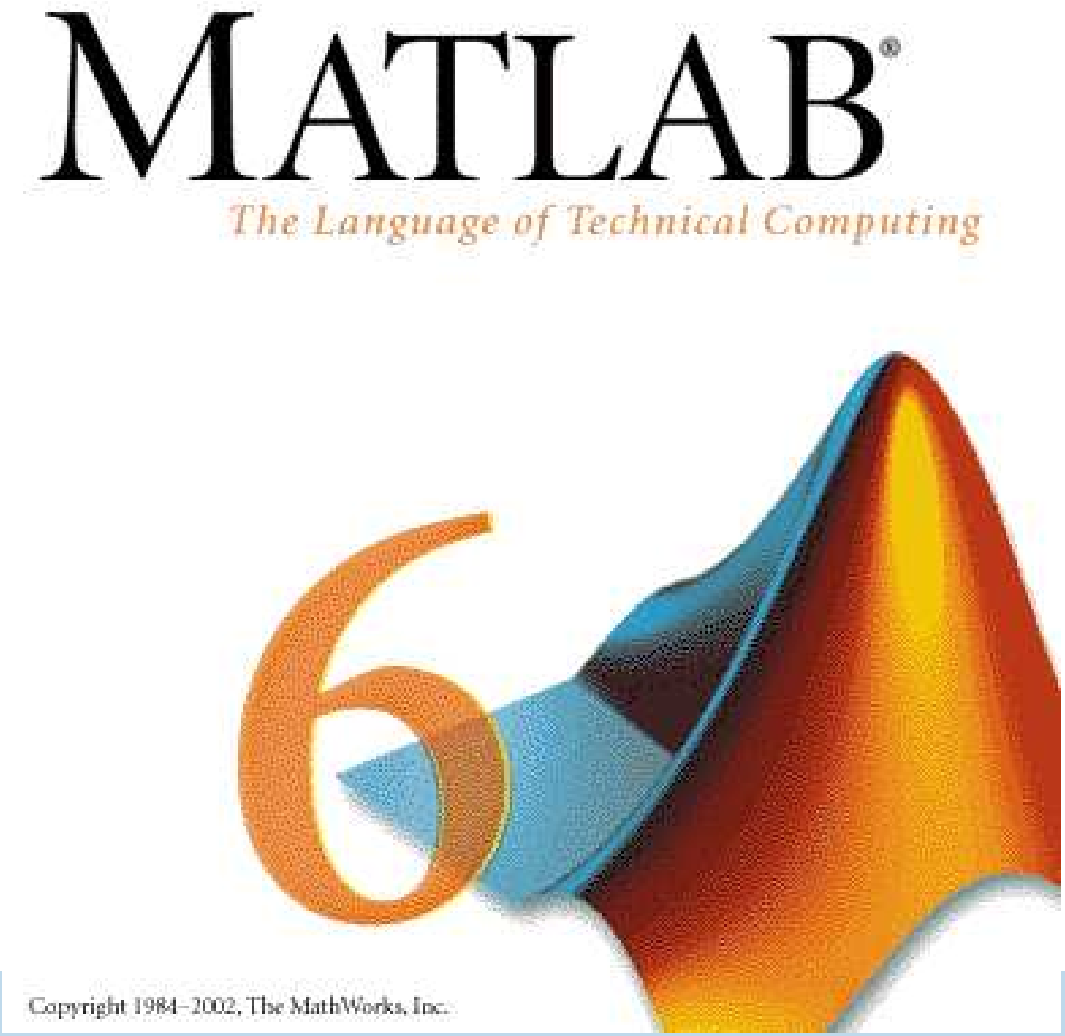
"A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming", Combinatorica, Vol 4, nr. 4, p. 373–395.

---

[1] Wright, Stephen (1997). Primal-Dual Interior-Point Methods. Philadelphia, PA: SIAM. ISBN 0-89871-382-X.

[2] Nocedal, Jorge; and Stephen Wright (1999). Numerical Optimization. New York, NY: Springer. ISBN 0-387-98793-2.

Realizácia v sw. Matlab

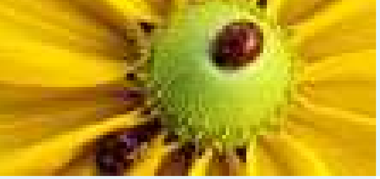


Metóda vnútorného bodu - Matlab

```
n=300; k=300;

c=ones(1,n); b=ones(1,k);
A=[];
for i=1:k
    for j=1:n
    A(i,j)=abs(sin(i*j));
    end
end

lowerBound=zeros(1,n);
options=optimset('LargeScale','on');

linprog(-c,A,b,[],[],lowerBound,[],[],options);
```

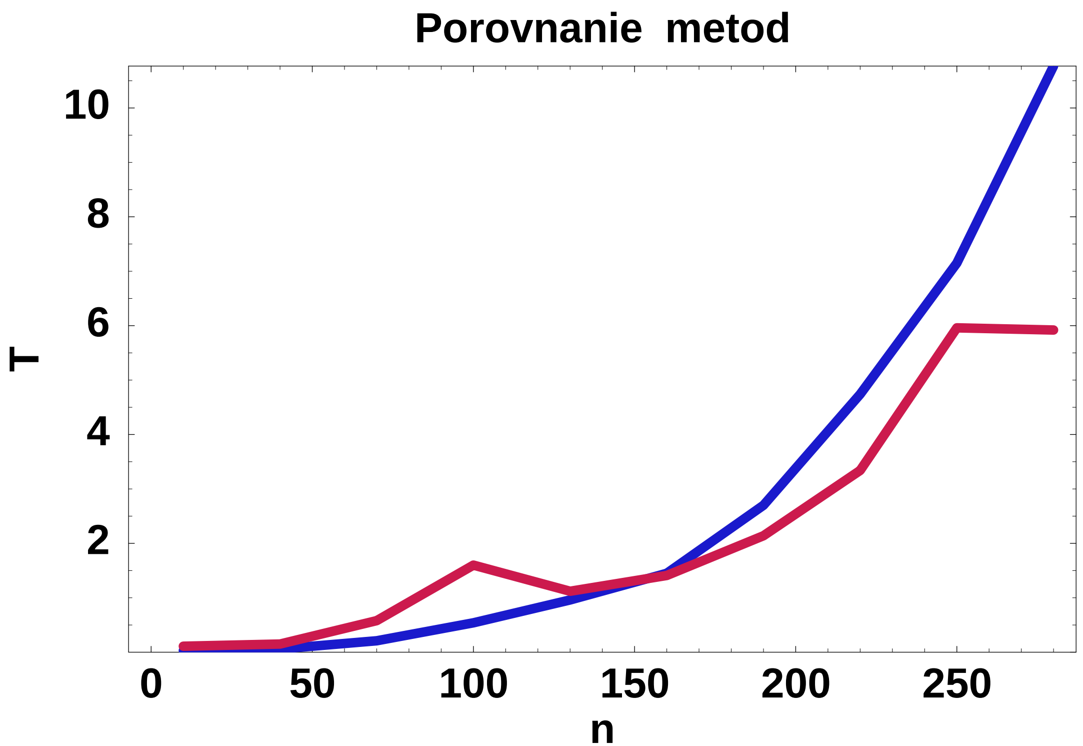
Simplexová metóda - Matlab

```
n=300; k=300;

c=ones(1,n); b=ones(1,k);
A=[];
for i=1:k
    for j=1:n
    A(i,j)=abs(sin(i*j));
    end
end

lowerBound=zeros(1,n);
options=optimset('LargeScale','off');

linprog(-c,A,b,[],[],lowerBound,[],[],options);
```



Porovnanie metód

Porovnanie oboch metód - Matlab



Časová zložitosť simplexovej metódy a metódy vnútorného bodu
Simplexová metóda - červená, Metóda vnútorného bodu - modrá
Rozmer nxn kde $n \in [10, 300]$.