Oceňovanie dlhopisov ako derivátov úrokovej miery

Daniel Ševčovič
Ústav aplikovanej matematiky,
Katedra ekonomických a finančných modelov, FMFI UK Bratislava

Deriváty úrokovej miery

Deriváty úrokovej miery

Deriváty úrokovej miery poznáme podľa toho, že ich výplata, je nejakým spôsobom závislá od hodnoty úrokovej miery, ktorá je používaná na diskontovanie ceny súčasnej dlhopisu.

Najväčší rozvoj zaznamenali v 80-tych a začiatkom 90-tych rokov minulého storočia a v súčasnosti sú pravdepodobne najpredávanejšou triedou finančných derivátov. Pri ich oceňovaní treba brať do úvahy rôzne faktory, vďaka ktorým je toto oceňovanie zložitejšie ako napríklad pri akciách, opciách alebo derivátoch výmenného kurzu.

Deriváty úrokovej miery

Úrokové miery na obchodovanie so štátnymi dlhopismi

BRIBOR
Bratislava Interbank Offer Rate (SK)

LIBOR
London Interbank Offer Rate (UK)

T-Bills
Treasury Bills (USA)

Poskytujú informáciu za akú úrokovú sadzbu je ochotný emitent dlhopisov (štát, NBS, FED) predať dlhopis

Deriváty úrokovej miery

Trhovom určované úrokové miery na obchodovanie s dlhopismi

BID
predstavuje ponuku na výšku úrokovej sadzby, s ktorou je investor ochotný kúpiť príslušný dlhopis

ASK
predstavuje ponuku na výšku úrokovej sadzby, s ktorou je emitent dlhopisu ochotný predať príslušný dlhopis

BID < ASK

vytvára sa tak možnosť na trhové stanovenie (dohodu) výšky úrokovej sadzby

Deriváty úrokovej miery

Trhovom určované úrokové miery na obchodovanie s dlhopismi

Základným kontraktom týkajúcim sa derivátov úrokovej miery je dohoda - dlhopis - zaplatiť určitú čiastku v súčasnosti oproti prísľubu obdržania (zvyčajne) vyššej sumy o nejaký čas.

Bezkupónový dlhopis
Čas maturity zvyčajne označujeme T a hodnotu dnešnej platby k budúcej P(0,T). Teda inými slovami: Jednu korunu v čase T si v súčasnosti (teda v čase t=0 môžeme kúpiť za P(0,T) korún.

Nominálnou hodnotou} nazývame hodnotu, ktorá má byť vyplatená v čase T a teda je to hodnota P(T,T)
Predpokladáme, že nominálna hodnota je rovná jednej, t.j. P(T,T)= 1

Stochastický vývoj úrokovej miery

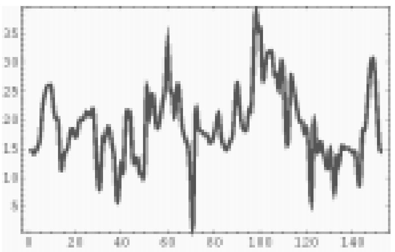
Úrokové sadzby kótované v BRIBOR Národnou bankou SR

Shortrate = overnight
jednodňový kurz na krátkodobé úložky iných bánk v NBS

sadzba na dlhopisy so splatnosťou 1 týždeň
so splatnosťou 2 týždeň
so splatnosťou 3 týždeň
so splatnosťou 1 mesiac
so splatnosťou 3 mesiace
so splatnosťou 6 mesiacov

Stochastický vývoj úrokovej miery

Časový vývoj shortrate BRIBOR v roku 1997

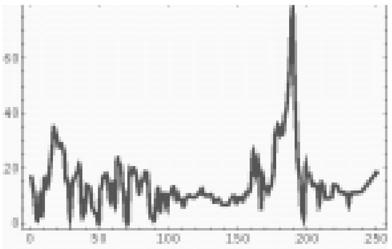


Stredná hodnota = 19.02

σ = 6.35

Stochastický vývoj úrokovej miery

Časový vývoj shortrate BRIBOR v roku 1998

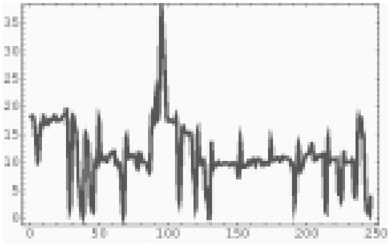


Stredná hodnota = 14.45

σ = 10.47

Stochastický vývoj úrokovej miery

Časový vývoj shorrate BRIBOR v roku 1999

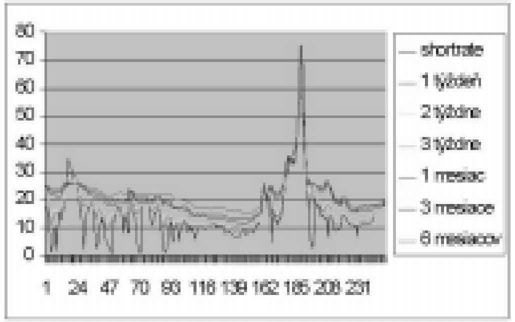


Stredná hodnota = 11.41

σ = 15.11

Stochastický vývoj úrokovej miery

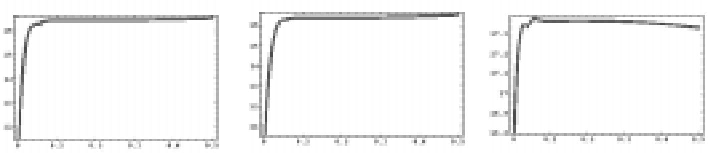
Časový vývoj všetkých úrokových sadzieb BRIBOR v roku 1998



Kým jednodňová overnight sadzba má veľké fluktuácie,
úrokové sadzby dlhopisov s dlhšími dobami splatnosti sú stabilnejšie

Stochastický vývoj úrokovej miery

Vývoj úrokových sadzieb BRIBOR v roku 1997 pre jednotlivé doby sptanosti a rôzne dni obchodovania



1. deň 2 deň 3 deň obchodovania

Grafy znázorňujú priebeh tzv. výnosovej krivky pre rôzne doby splatnosti a rôzne dni obchodovania

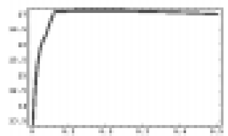
Stochastický vývoj úrokovej miery

Časová štruktúra úrokových sadzieb

R(t, T) je aktuálna úroková sadzba v obchodnom dni **t** na dlhopisy ochodované v tomto dni a s dobou splatnosti **T**

Priebeh výnosovej krivky v danom dni t

úrok R(t, T)



Doba splatnosti T

Stochastický vývoj úrokovej miery

Modelovanie časového vývoja shortrate úrokovej sadzby

$$dr = k(\vartheta - r)\,dt + \sigma\, dW(t)$$

Časový vývoj shortrate úrokovej sadzby sleduje tzv. Ornstein - Uhlenbeckovej proce, tiež nazývaný mean reverting proces

$r = r(t)$	je okamžitá = shortrate úroková sadzba
σ	je volatilita vývoja hodnoty úrokovej sadzby
θ	je dlhodobo očakávaná hodnota úrokovej sadzby
k	je rýchlosť návratu okamžitej úrokovej sadzby k očakávanej sadzbe

Stochastický vývoj úrokovej miery

Wienerov proces

je stochastický (Markovov) proces

$W(t);\ t > 0$

s nasledujúcimi vlastnosťami :

- každý prírastok $dW(t)=W(t+dt) - W(t)$ je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti so strednou hodnotou 0 a varianciou dt

- pre každé $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, prírastky
  $W(t_2) - W(t_1),\ \ldots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$
  sú nezávislé náhodné premenné

- $W(0) = 0$ a vzorky ciest $W(t)$ sú spojité.

Daniel Ševčovič Ústav aplikovanej matematiky, Univerzita Komenského

Dlhopis ako derivát úrokovej miery

Cena dlhopisu ako derivát úrokovej sadzby

$$P = P(r, t, T)$$

P	je súčasná cena dlhopisu so splatnosťou v čase T
t	je deň obchodovania
T	je deň splatnosti dlhopisu

Daniel Ševčovič Ústav aplikovanej matematiky, Univerzita Komenského

Oceňovanie derivátov. Black-Scholesov model

Itôova lema

Nech $V(S,t)$ je spojitá nenáhodná funkcia so spojitými parciálnymi deriváciami podľa premenných S, t, pričom

$$dS = \mu(S,t)\,dt + \sigma(S,t)\,dX(t)$$

je stochastický proces (Itôov proces), kde $dX(t)$ je štandardný Wienerov proces. Potom prvý diferenciál stochastického procesu $V = V(S,t)$ je daný vzťahom:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(S,t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma(S,t)^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma(S,t)\frac{\partial V}{\partial S}\,dX(t)$$

Daniel Ševčovič Ústav aplikovanej matematiky, Univerzita Komenského

Vašičkov model - Hlavná myšlienka odvodenia

1. Použiť Itôovu lemu na derivát

$$P = P(r, t, T)$$

2. Konštrukcia portfólia dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti

$$\Pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2)$$

Vašičkov model - parciálna dif. Rovnica

Výsledkom je parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial P}{\partial t} + k(\vartheta - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP + \sigma\lambda_0\frac{\partial P}{\partial r}$$

σ je volatilita vývoja hodnoty úrokovej sadzby
θ je dlhodobo očakávaná hodnota úrokovej sadzby
k je rýchlosť návratu okamžitej úrokovej sadzby k očakávanej sadzbe
λ0 je tzv. Trhová cena rizika

Koncová podmienka na riešenie
P(r, T, T) = 1 t..j. v čase splatnosti dlhopisu je jeho hodnota 1

Vašičkov model - riešenie

Vašičkova parciálna diferenciálna rovnica má explicitné riešenie v tvare

$$P(r,t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$$

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$$

$$A(t,T) = exp\left[(B(t,T) - T + t)\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} - \frac{\sigma\lambda_0}{k}\right) - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4k}\right]$$

Vzťah výnosovej krivky a ceny dlhopisu

Keďže pre cenu súčasnú cenu dlhopisu platí

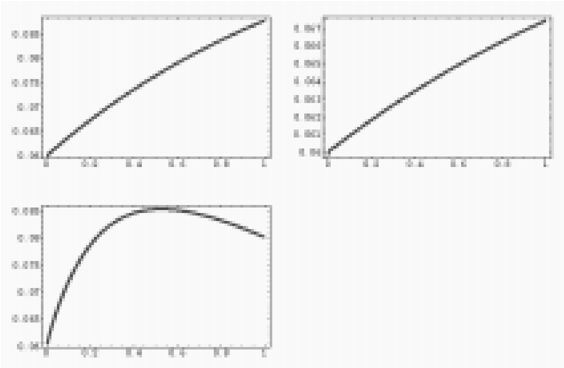
$$P(r(t), t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

tak sa výnosová krivka R(t, T) dá určiť ako

$$R(t, T) = -\frac{ln\, P(r(t), t, T)}{T - t}$$

Vašičkov model - riešenie

Priebehy vypočítaných výnosových kriviek



Iné deriváty úrokovej miery

CAP a FLOOR
Ďalším príkladom často obchodovaného derivátu, hlavne v medzibankovom styku, je cap. Cap je súbor capletov, pričom caplet je definovaný ako kontrakt, kde vypisovateľ vyplatí kupcovi v čase t(i+1) rozdiel medzi aktuálnym úrokom a úrokom zvoleným v čase t(i) plus pevne danú hodnotou K (tzv. strike price) vynásobenú dĺžkou obdobia. Teda kupec sa zaisťuje voči plateniu vyššieho úroku ako si určil, čo je výhodné hlavne v prípade dlhu s voľným úrokom.

Protikladom capu je floor, ktorý zasa limituje platený úrok zospodu.

Záver

www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic

Ekonomická a finančná matematika na FMFI UK

www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm