Lineárne normované priestory

1. Dokážte, že
$$\|(x_1, x_2)^T\| = \max\{|x_1 + x_2|, |2x_1 - x_2|\}$$
je norma na $\mathbb{R}^2$.

2. Dokážte, že
$$\|(x_1, x_2)^T\| = \max\left\{|x_2|, \left|x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}\right|, \left|x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}}\right|\right\}$$
je norma na $\mathbb{R}^2$.

3. Nech $a_1, \dots a_N > 0$ sú dané. Dokážte, že
$$\|(x_1, \dots x_N)^T\| = a_1|x_1| + \dots + a_N|x_N|$$
je norma na $\mathbb{R}^N$.

4. Nech $\alpha > 0$ je dané. Dokážte, že
$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |e^{-\alpha x} f(x)|$$
je norma na $C([0,1])$.

5. Dokážte, že
$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |x f(x)|$$
je norma na $C([0,1])$.

6. Nech $(X, \|.\|_1)$ a $(Y, \|.\|_2)$ sú lineárne normované priestory. Na karteziánskom súčine $X \times Y$ definujeme funkciu $\|.\|$ tak, pre $(x, y) \in X \times Y$ položíme:
$$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2.$$
Dokážte, že $\|.\|$ je norma na priestore $X \times Y$.

Vlastnosti normy

1. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech $x_1, \dots x_k \in X$. Dokážte, že
$$\|x_1 + \dots x_k\| \leq \|x_1\| + \dots \|x_k\|.$$

2. Nech $(X, \|.\|)$ je LNP a nech $a, b, c, d \in X$. Dokážte, že
$$|\ \|a - b\| - \|c - d\|\ | \leq \|a - c\| + \|b - d\|.$$

Ekvivalentné normy

1. Dokážte, že pre každé $\alpha > 0$ je norma

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |e^{-\alpha x} f(x)|$$

   na $C([0,1])$ ekvivalentná s maximovou normou

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

2. Dokážte, že norma

$$\|f\| = |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |xf(x)|$$

   na $C([0,1])$ nie je ekvivalentná s maximovou normou.

Gule v lineárnych normovaných priestoroch

V príkladoch 1, 2, 3 nakreslite v $\mathbb{R}^2$ guľu so stredom v bode $(0,0)^T$ a polomerom 1, ak na $\mathbb{R}^2$ uvažujeme normu

1.

$$\|(x_1, x_2)^T\| = 2\,|x_1| + 5\,|x_2|$$

2.

$$\|(x_1, x_2)^T\| = \max\{|x_1 + x_2|, |2x_1 - x_2|\}$$

3.

$$\|(x_1, x_2)^T\| = \max\left\{|x_2|, \left|x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}\right|, \left|x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}}\right|\right\}$$

4. Uvažujme priestor $C([0,1])$ s normou

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

   a funkcie

$$g(x) = x, \quad x \in [0,1],$$

$$f_{m,n}(x) = x + \frac{1}{m}\sin(2\pi n x), \quad x \in [0,1],$$

   kde $m, n \in \mathbb{N}$. Nech $\varepsilon > 0$ je dané. Pre aké hodnoty parametrov m, n platí

$$f_{m,n} \in B_\varepsilon(g)?$$

5. Uvažujme priestor $C([0,1])$ s normou

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]]} |f(x)|.$$

Nech $a, b \in \mathbb{R}$ sú pevne zvolené, definujme funkciu

$$g(x) = ax + b, \quad x \in [0,1].$$

Pre parametre $c, d \in \mathbb{R}$ definujme funkciu

$$f_{c,d}(x) = cx + d, \quad x \in [0,1].$$

Nech $\varepsilon > 0$ je dané, zistite, pre aké c, d platí

$$f_{c,d} \in B_\varepsilon(g).$$