KONVERGENCIA V LNP

1. Zistite, či nasledujúce postupnosti v $(\mathbb{R}^2, ||.||)$ konvergujú. Ak áno, vypočítajte limitu.

   (a) $x^n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, (-1)^n n\right)^T$

   (b) $y^n = \left(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{2n}\right)^T$

   (c) $z^n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{2n+1}{n^2+4}\right)^T$

2. Dokážte, že postupnosť funkcií z $C([0,\pi])$

$$f^n(x) = \sin^n x, \quad x \in [0,\pi]$$

   nemá limitu v priestore $(C([0,\pi]), ||.||_\infty)$.

3. Nájdite limitu postupnosti

$$f^n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in [-1,1]$$

   v priestore $(C([-1,1]), ||.||_\infty)$.

4. Zistite, či postupnosť funkcií z $C([0,1])$

$$f^n(x) = e^{-\frac{n}{2}x}, \quad x \in [0,1]$$

   konverguje

   - v priestore $(C([0,1]), ||.||_\infty)$,
   - v priestore $(C([0,1]), ||.||_1)$.

   V tých prípadoch, keď konverguje, určte limitu.

5. Uvažujme nasledovnú postupnosť funkcií z $C([0,1])$:

$$f^n(x) = \begin{cases} -n^4\left(x - \frac{1}{n+1}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right), & \text{ak } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

   (a) Dokážte, že táto postupnosť bodovo konverguje k identicky nulovej funkcii.

   Návod: Ak $x > \frac{1}{n_0}$, tak $f^n(x) = 0$ pre $n \geq n_0$.

   (b) Dokážte, že nekonverguje v priestore $(C([0,1]), ||.||_\infty)$.

   (c) Dokážte, že nekonverguje ani v priestore $(C([0,1]), ||.||_1)$.

6. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a nech $\{x^n\}, \{y^n\}$ sú postupnosti v X také, že

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x, \lim_{n\to\infty} y^n = y.$$

   Dokážte, že potom

$$\lim_{n\to\infty} ||x^n - y^n|| = ||x - y||.$$

Návod: Použite nerovnosť

$$|\ ||a-b|| - ||c-d||\ | \leq ||a-c|| + ||b-d||.$$

(príklad 2 z časti VLASTNOSTI NORMY)

Otvorené a uzavreté množiny

1. Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín $(\mathbb{R}^2, ||.||)$ sú otvorené, uzareté, obojaké (t.j. súčasne otvorené aj uzavreté), ani otvorené ani uzavreté.
   (a) $A_1 = \{(x_1, x_2)^T : |x_1| \le 3, |x_2| \le 2\}$
   (b) $A_2 = \left\{(x_1, x_2)^T : \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)^T, \text{kde } m, n \in \mathbb{N}\right\}$
   (c) $A_3 = \{(x_1, x_2)^T : \text{sign}(xy) = 1\}$
2. Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín $(\mathbb{R}^3, ||.||)$ sú otvorené, uzareté, obojaké (t.j. súčasne otvorené aj uzavreté), ani otvorené ani uzavreté.
   (a) $B_1 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
   (b) $B_2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + x_2 + x_3 \le 1, x_1, x_2, x_3 \ge 0\}$
3. Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín $(\mathbb{R}^N, ||.||)$ sú otvorené, uzareté, obojaké (t.j. súčasne otvorené aj uzavreté), ani otvorené ani uzavreté.
   (a) Množina tých bodov, ktoré majú aspoň jednu súradnicu nulovú.
   (b) Množina tých bodov, ktoré majú práve jednu súradnicu nulovú.
4. Rozhodnite o otvorenosti, resp. uzavretosti množiny
   $$\{f \in C([0,1]) : f(0) = 1\}$$
   (a) v priestore $(C([0,1]), ||.||_\infty)$,
   (b) v priestore $(C([0,1]), ||.||_1)$.

Vnútorné body, hraničné body, uzáver množiny

1. Nájdite vnútro, hranicu a uzáver množín v $(\mathbb{R}^2, ||.||)$:
   (a) $A_1 = \{(x_1, x_2)^T : x_1 + x_2 < 1, x_2 \ge 0\}$
   (b) $A_2 = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$
   (c) $A_2 = \left\{(x_1, x_2)^T : \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)^T, \text{kde } m, n \in \mathbb{N}\right\}$
2. Uvažujme priestor $(C([0,1]), ||.||_\infty)$ a jeho podmnožinu
   $$A = \{f \in C([0,1]) : f(0) = f(1)\}.$$
   (a) Dokážte, že žiadny jej bod nie je vnútorný.
   (b) Nájdite všetky jej hraničné body.
   (c) Čo je uzáver tejto množiny?.
3. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a nech A je jeho podmnožina. Dokážte, že A je uzavretá práve vtedy, keď $A = \bar{A}$.
4. Nech $(X, ||.||)$ je LNP a nech A je jeho podmnožina. Dokážte, že hranica množiny A sa zhoduje s hranicou množiny A^c.

Banachova veta o pevnom bode

1. Dokážte, že rovnica
$$x = \sqrt{2 + \ln x}$$
má pre $x \geq 1$ práve jedno riešenie.

2. Dokážte, že rovnica
$$x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{3}\cos x$$
má práve jedno riešenie $x \in \mathbb{R}$.

3. Nájdite približné riešenie rovníc z príkladov 1, 2 s presnosťou 10^{-3}.

4. Dokážte, že postupnosť $x^0 = 0,\ x^{n+1} = \sqrt{2 + x^n}$ konverguje a nájdite jej limitu.

5. Dokážte, že sústava rovníc
$$3x = 1 + \sin(x + y)$$
$$4y = x + \cos(x - y)$$
má práve jedno riešenie.

Kompaktné množiny

1. Ktoré z nasledujúcich množín sú kompaktné v $(\mathbb{R}^3, ||.||)$?
   (a) $A_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$
   (b) $A_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1,\ x_1, x_2, x_3 > 0\right\}$
   (c) $A_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9\right\}$

2. Dokážte, že množina
$$\{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$$
nie je kompaktná v priestore $(C([0, 1]), ||.||_\infty)$.

3. Dokážte, že množina
$$\{f \in C([0, 1]) : f(x) > 0 \text{ pre všetky} x \in [0, 1]\}$$
nie je kompaktná v priestore $(C([0, 1]), ||.||_\infty)$.

4. (a) Nech $(X, ||.||)$ je LNP a nech $A_1, \ldots A_k$ sú kompaktné podmnožiny X. Dokážte, že potom aj ich zjednotenie je kompaktná množina.
   (b) Dokážte, že zjednotenie nekonečného počtu kompaktných množín nemusí byť kompaktná množina.