LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE

1. Vypočítajte limity nasledujúcich funkcií pre $x \to 0, y \to 0$:

   (a) $f_1(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{\sin(x^2+y^2)}$

   (b) $f_2(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

   (c) $f_3(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

   (d) $f_4(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

   (e) $f_5(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

2. Dokážte, že nasledujúce limity neexistujú:

   (a) limita funkcie $g_1(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y)$ pre $x \to \infty, y \to \infty$

   (b) limita funkcie $g_2(x,y,z) = \frac{x^2yz^2}{x^2y^2+y^2z^2}$ pre $x \to 0, y \to 0, z \to 0$

3. Nájdite body nespojitosti daných funkcií. Dajú sa v týchto bodoch spojito dodefinovať?

   (a) $u_1(x,y) = \frac{1}{\sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)}$

   (b) $u_2(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$

   (c) $u_3(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

4. Zistite, či sú nasledujúce funkcie rovnomerne spojité na daných množinách:

   (a) $v_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ na množine $\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^2+y^2 < 1\right\}$

   (b) $v_2(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ na množine $\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^2+y^2 < 1\right\}$

   (c) $v_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2$

PARCIÁLNE DERIVÁCIE

1. Nech $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$. Ukážte, že:

   (a) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1$

   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

2. Nech $g(x,y) = x^3 + axy^2$, kde a je konštanta. Nájdite hodnotu konštanty a, pre ktorú funkcia g vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

Diferenciál

1. Nech $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz)$.
   (a) Dokážte, že funkcia f je diferencovateľná v každom bode z $\mathbb{R}^3$.
   (b) Nájdite jej diferenciál v bode $a = (1,1,1)^T$.
   (c) Nájdite hodnotu tohto diferenciálu vo vektore $h = (0.1, 0.1, 0.05)^T$.
2. Nájdite diferenciály funkcií
   (a) $f_1(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
   (b) $f_2(x,y) = \frac{1+x}{1+y}$
3. Použitím diferenciálu nájdite približnú hodnotu výrazu $\frac{1+x}{1+y}$, ak x, y sú v absolútnej hodnote malé.
4. Nahraďte prírastok funkcie diferenciálom a približne vypočítajte $1,04^{1,02}$.
5. Nájdite diferenciál nasledujúcich zobrazení
   (a) $g_1 : (x,y,z) \to (u,v)$, pričom $u = \frac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2}, v = xyz$
   (b) $g_2 : (r,\phi,\psi) \to (x,y,z)$, pričom $x = r\cos\phi\sin\psi, y = r\sin\phi\sin\psi, z = r\cos\psi$.
6. Nájdite jakobián zobrazenia g_2 z predchádzajúceho príkladu.

Derivovanie zloženej funkcie

1. Nech $z(x,y) = \phi(x^2+y^2)$, kde ϕ je diferencovateľná funkcia. Dokážte, že
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$
2. Nech $u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$. Dokážte, že
$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x\cos y.$$
pre ľubovoľnú diferencovateľnú funkciu f.
3. Nech $f(x,y) = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$, kde ϕ,ψ sú diferencovateľné funkcie. Dokážte, že
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$