Derivovanie zloženej funkcie - pokračovanie

1. Zjednodušte výraz $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$, ak
$$u(x,y,z) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x).$$
2. Transformujte rovnicu
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \quad (y > 0)$$
zavedením nových premenných
$$u = x - 2\sqrt{y},\ v = x + 2\sqrt{y}.$$

Extrémy

1. Nájdite lokálne extrémy funkcií
   (a) $f_1(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
   (b) $f_2(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$
2. Nájdite viazané extrémy funkcie $g(x) = x - 2y + 2z$, ak je väzba daná rovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. V rovine je daných n bodov
$$a_1 = (x_1, y_1),\ a_2 = (x_2, y_2),\ \ldots, a_n = (x_n, y_n).$$
Nájdite taký bod, pre ktorý je súčet druhých mocnín jeho vzdialeností od bodov $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ minimálny.
4. Nájdite rozmery plechovky valcového tvaru s objemom $1/3$ l a minimálnym povrchom.
5. Úžitková funkcia spotrebiteľa je
$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \text{kde } \alpha, \beta > 0 \text{ sú dané konštanty.}$$
   (a) Nájdite množstvá statkov x_1, x_2, ktoré maximalizujú úžitok spotrebiteľa pri rozpočtovom ohraničení $p_1x_1 + p_2x_2 = w$.
   (b) V akom pomere sú optimálne množstvá x_1, x_2?
   (c) Ako reagujú optimálne množstvá na zmenu cien p_1, p_2?
6. Nájdite globálne extrémy funkcií na daných množinách:
   (a) $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$,
   $M_1 = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 25\right\}$
   (b) $f_2(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x - 1$,
   $M_2 = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ y \le -x + 3, x \ge 0, y \ge 0\right\}$