

Časové rady: domáca úloha 2

Termín odovzdania: 2. 12. 2024

Odovzdávanie:

- Úlohu rieši každý samostatne. Za odpísané úlohy je nula bodov - pre tých, ktorí úlohu odpísali aj pre tých, ktorí ju dali odpísať. *DOPLNENÉ: Rovnako bude nula bodmi hodnotený aj príklad, kde sa dá vidieť spolupráca - v zadaní je povedané, že úlohu rieši každý samostatne, napriek tomu sa vyskytujú riešenia, ktoré nie sú úplne odpísané, ale napríklad obsahujú podobné nesprávne postupy - podobné natoľko, že pri samostatnom riešení takéto nevzniknú, a navyše opakované.*
- Odovzdávajú sa:
 - výpočty na papieri¹
 - numerické výpočty mailom na adresu **beata.ulohy@gmail.com**, s predmetom **CR 2024 - DU3 - meno** - v rovnakej forme ako v prvej domácej úlohe
- Ak použijete nejaký kód, výpočet, tvrdenie a pod., ktoré nájdete na internete, treba ho citovať - uviesť na konci riešenia odkaz a odvolať sa naň na príslušnom mieste v texte. V prípade použitia umelej inteligencie treba v maili okrem úlohy uviesť aj kompletný priebeh jej použitia - všetky vaše otázky a všetky odpovede UI (v pdf alebo txt formáte) a informáciu o tom, akú konkrétnu UI ste použili.

Príklad 1 [3×5 bodov]. Pre dáta x_1, x_2, x_3 z `du3.Rdata` nájdite vhodný ARIMA model. Model zapíšete v takom tvare, že pôjde o model pre pôvodné dáta, nie pre diferencie (teda napríklad ARIMA(1, 1, 2) namiesto ARIMA(1, 0, 2) pre prvé diferencie). Pri modeloch pre dáta, ktoré sa diferencujú, vysvetlite, prečo je, resp. nie je zahrnutý konštantný člen. Uveďte obrázok, z ktorého sa dá vidieť, že váš ARIMA model má dobré reziduá.

Podrobne rozpíšete postup pri testovaní, či a koľkokrát treba dáta diferencovať. Štruktúra bude nasledovná:

Pre každý uvažovaný časový rad (teda pôvodný časový rad, v prípade potreby diferencie, druhé diferencie) uveďte:

- Ktorá z nasledovných možností nastáva:
 - Časový rad má lineárny trend, treba ho diferencovať a ideme testovať jeho diferencie.
 - Časový rad nemá lineárny trend, ideme testovať prítomnosť jednotkového koreňa.
- Napíšete a zdôvodnite typ ADF testu jednotkového koreňa.
- Skontrolujte, že použitý počet lagov v odhadnutej regresii nie je maximálny možný, ktorý ste povolili.

¹Odovzdať ich môžete na cvičení. Ak na cvičení nebudete, pošlite do termínu odovzdania mail s oskenovaným alebo odfoteným riešením. Následne odovzdajte toto (už ďalej neupravované) riešenie na neskoršom cvičení, môžete ho aj po niekom poslať. Prednášky pre mPMS už skončili, ale pre mEMM a mINF pokračujú, takže riešenie mi môžete priniesť aj tam. Opravovať ho budem potom, ako ho dostanem na papieri.

- Porovnajete testovaciu štatistiku s kritickou hodnotou a napíšete, čo tento výsledok znamená pre modelovanie.

Záver musí byť, že testovaný časový rad (pôvodný alebo diferencie) nemá ani trend, ani jednotkový koreň. To znamená, že sa preň bude hľadať ARMA model.

Príklad 2 [10 bodov].

- (a) Sériou nasledujúcich zadaní ukážte, čomu sa rovná stredná hodnota výberovej disperzie počítanej z realizácie stacionárneho časového radu:

2.17 Let $\{Y_t\}$ be stationary with autocovariance function γ_k . Let $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t$. Show that

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{Y}) &= \frac{\gamma_0}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \gamma_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \gamma_k \end{aligned}$$

2.18 Let $\{Y_t\}$ be stationary with autocovariance function γ_k . Define the sample variance as $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2$.

(a) First show that $\sum_{t=1}^n (Y_t - \mu)^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 + n(\bar{Y} - \mu)^2$.

(b) Use part (a) to show that

(c) $E(S^2) = \frac{n}{n-1} \gamma_0 - \frac{n}{n-1} \text{Var}(\bar{Y}) = \gamma_0 - \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \gamma_k$.

(Use the results of Exercise 2.17 for the last expression.)

- (b) Čo dostaneme ako špeciálny prípad, ak je daný časový rad bielym šumom? S akou známou vlastnosťou výberovej disperzie to súvisí?
- (c) Vypočítajte strednú hodnotu výberovej disperzie pre prípad, že sa počíta z realizácie AR(1) procesu. Výsledok upravte do tvaru, ktorý neobsahuje sumy (ale ich explicitne vyjadrené súčty).