

CVIČENIA Z EKONOMETRIE 2005/2006

DOMÁCA ÚLOHA 3

TERMÍN ODOVZDANIA: 7.3.2006

1. (10 bodov) Na cvičení sme uvažovali model $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, n$), kde x_i sú konštanty a ε_i sú nezávislé náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou a rovnakou varianciou σ^2). Pre nasledujúce tri odhady parametra β (predpokladáme, že x_i nie sú všetky rovnaké a že ich priemer je nenulový):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{x}}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}, \quad \hat{\beta}_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2},$$

sme dokázali ich nevychýlenosť a vypočítali varianciu:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n\bar{x}^2}, \quad \text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}, \quad \text{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Dokážete, že pre ľubovoľné x_1, \dots, x_n platí

$$\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \leq \frac{\sigma^2}{n\bar{x}^2},$$

$$\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \leq \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2},$$

t.j. odhad $\hat{\beta}_3$ má spomedzi týchto odhadov najmenšiu varianciu.

2. (5 bodov) Uvažujme model

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i.$$

- (a) Nájdite odhady $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ metódou najmenších štvorcov, t.j. také, ktoré minimalizujú súčet $\sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i))^2$.
 (b) Ukážte, že sa dajú zapísať v tvare

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{x}.$$