

CVIČENIA Z EKONOMETRIE 2005/2006

DOMÁCA ÚLOHA 7

TERMÍN ODOVZDANIA: 4.4.2006

Na nasledujúce cvičenie si prineste výstupy z regresie, s ktorými sme robili na poslednom cvičení. Ak ste na cvičení neboli, vytlačte si niektorý výstup zo súboru regresia.doc (je na webe v časti Cvičenia).

1. (5 bodov) Majme model

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

kde Y je n -rozmerný vektor, X je matica $n \times k$ s lineárne nezávislými stĺpcami. Ukážte, že odhad $\tilde{\beta}$, ktorý má minimálny súčet štvorcov reziduí spomedzi vektorov β spĺňajúcich ohraničenie $R\beta = r$ (R je matica $q \times k$), sa dá napísať v tvare

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}_{\text{MNS}} + (X^T X)^{-1} R^T (R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1} (r - R\hat{\beta}_{\text{MNS}}),$$

kde $\hat{\beta}_{\text{MNS}}$ je MNS odhad bez ohraničení (ak uvedená inverzná matica existuje). Čo musíme predpokladať o matici R , aby existovala matica $(R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1}$?

2. (10 bodov) Nech platí

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

pričom štandardné predpoklady sú splnené (X je typu $n \times k$, má lineárne nezávislé stĺpce, $E[\varepsilon] = 0$, $\text{Var}[\varepsilon] = \sigma^2 I$). Vieme, že odhadom z n dát metódou najmenších štvorcov dostaneme

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta})}{n - k}.$$

Predpokladajme, že namiesto správneho modelu odhadujeme model

$$Y = Z\gamma + \eta,$$

kde Z je typu $n \times r$, má lineárne nezávislé stĺpce a predpokladáme, že $E[\eta] = 0$, $\text{Var}[\eta] = s^2 I$. To znamená, že na vysvetlenie Y sme zvolili neprávny model. Odhadom tohto modelu metódou najmenších štvorcov dostaneme

$$\hat{\gamma} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y, \hat{s}^2 = \frac{(Y - Z\hat{\gamma})^T (Y - Z\hat{\gamma})}{n - r}.$$

- (a) Dokážte, že $E[\hat{s}^2] \geq E[\hat{\sigma}^2]$.
 (b) Označme \bar{R}_1^2 upravené R^2 z prvej regresie (z regresie s maticou X) a \bar{R}_2^2 upravené R^2 z druhej regresie (z regresie s maticou Z). Pomocou výsledku z časti (a) ukážte, že

$$E[\bar{R}_1^2] \geq E[\bar{R}_2^2].$$

To znamená, že okrem špeciálnych prípadov je očakávaná hodnota upraveného koeficientu determinácie v správnom modeli väčšia ako v nesprávnom.

- (c) Čo sú tie špeciálne prípady v časti (b), kde $E[\bar{R}_1^2] = E[\bar{R}_2^2]$? Čo musí platiť pre maticu Z ?