

PRÍKLAD

Predpokladajme, že vývoj ceny akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom

$$S(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))$$

s parametrami  $\mu = 0.3$  a  $\sigma = 0.24$  a súčasná cena akcie je 420 USD.

1. Nájdite strednú hodnotu ceny akcie o pol roka.

**Riešenie:** Cena akcie o  $t$  rokov má lognormálne rozdelenie, lebo

$$\ln S(t) = \ln S_0 + \mu t + \sigma w(t) \sim N(\ln S_0 + \mu t, \sigma^2 t).$$

Vieme, že náhodná premenná  $X$  s lognormálnym rozdelením s parametrami  $\tilde{\mu}$  a  $\tilde{\sigma}^2$  (t.j. taká, ktorej logaritmus má rozdelenie  $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ ) má strednú hodnotu

$$EX = e^{\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2}.$$

V našom prípade

$$\tilde{\mu} = \ln S_0 + \mu t, \quad \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 t,$$

a teda

$$E[S(t)] = e^{\ln S_0 + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Dosadíme konkrétne hodnoty zo zadania ( $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 0.24$ ,  $S_0 = 420$ ,  $t = 0.5$ ):

$$E[S(0.5)] = 420 e^{0.3 \times 0.5 + \frac{1}{2} \times 0.24^2 \times 0.5} = 495.05.$$

2. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že cena akcie o štvrt roka bude väčšia ako 500 USD.

**Riešenie:**

$$\begin{aligned} P[S(t) < 500] &= P\left[S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)} > 500\right] = \\ &= P\left[\mu t + \sigma w(t) > \ln \frac{500}{S_0}\right] = \\ &= P\left[w(t) > \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{500}{S_0} - \mu t\right)\right] \\ &= P\left[\sqrt{t}N(0, 1) > \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{500}{S_0} - \mu t\right)\right] \\ &= P\left[N(0, 1) > \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\ln \frac{500}{S_0} - \mu t\right)\right] \\ &= 1 - P\left[N(0, 1) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\ln \frac{500}{S_0} - \mu t\right)\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\ln \frac{500}{S_0} - \mu t\right)\right), \end{aligned}$$

kde  $\Phi$  je distribučná funkcia  $N(0, 1)$ . Dosadením hodnôt zo zadania ( $\mu = 0.3$ ,  $\sigma = 0.24$ ,  $S_0 = 420$ ,  $t = 0.25$ ) dostaneme, že hľadaná pravdepodobnosť je

$$P[S(t) < 500] = 1 - \Phi\left(\frac{1}{0.24\sqrt{0.25}} \left(\ln \frac{500}{420} - 0.3 \times 0.25\right)\right) = 1 - \Phi(0.8279) = 0.2039,$$

čiže približne dvadsať percent.