Náhodné procesy, modelovanie cien akcií

:: Stochastický vývoj finančných veličín ::

Z priebehov cien akcií (ako aj iných finančných veličín - úrokových mier, výmenných kurzov, ...) vidíme, že ich priebeh sa nedá popísať deterministickou funkciou. Preto sa na ich modelovanie používajú náhodné procesy.

Vľavo: trend (vývoj ceny počas posledného roka), vpravo: fluktuácie (vývoj ceny počas jedného dňa):

Zdroj: http://finance.google.com

:: Wienerov proces a Brownov pohyb ::

- Základným náhodným procesom, z ktorého sú ostatné odvodené, je **Wienerov proces**. Pripomeňme si jeho definíciu:

  *Systém $X(t)$ náhodných premenných sa nazýva **Wienerov proces**, ak*
  - *prírastky $X(t+\Delta t)$ - $X(t)$ majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a s disperziou Δt,*
  - *pre každé delenie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sú prírastky $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa predchádzajúceho bodu,*
  - *$X(0)=0$,*
  - *trajektórie sú spojité.*

- **Ako získame realizáciu Wienerovho procesu?**
  - Budeme generovať aproximáciu - hodnoty v diskrétnych bodoch typu (čas, hodnota), ktoré pospájame.
  - Hodnoty budú v bodoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$, kde Δt je dostatočne malý časový krok.
  - Hodnota v čase 0 je 0.
  - Prírastok na intervale $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ je náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δt.

  V Matlabe:

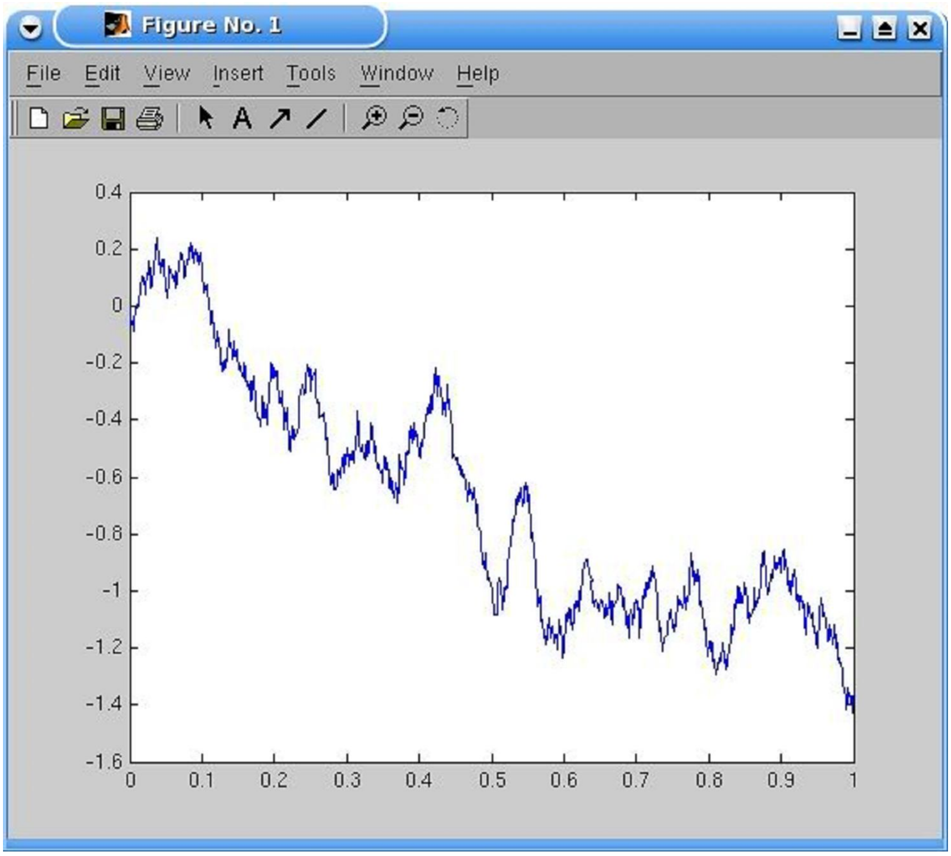
```
%-------------------------------
% SIMULACIA WIENEROVHO PROCESU
%-------------------------------

T=1; % do casu T
dt=0.001; % casovy krok dt

t=(0:dt:T) % vektor casov, v ktorych generujeme hodnoty procesu
n=length(t);

w(1)=0; % Wienerov proces zacina z nuly

for i=1:n-1 % prvu hodnotu mame, potrebujeme zvysnych n-1
dw=sqrt(dt)*randn; % prirastok dw; randn ~ N(0,1) => dw ~ N(0,dt)
w(i+1)=w(i)+dw; % nova hodnota = povodna + prirastok
```

```
end;

plot(t,w); % vykreslime priebeh
```

Poznamenajme, že na zrýchlenie výpočtov v Matlabe sa dajú využiť funkcie pre prácu s vektormi (namiesto cyklov):

```
%----------------------------------------
% RYCHLEJSIA SIMULACIA WIENEROVHO PROCESU
%----------------------------------------

T=1; % do casu T
dt=0.001; % casovy krok dt

t=(0:dt:T) % vektor casov, v ktorych generujeme hodnoty procesu
n=length(t);

dw=sqrt(dt)*randn(n-1,1); % vektor prirastkov - nezavisle N(0,dt)
w=[0;cumsum(dw)]; % zaciname z nuly, dalek kumulativne sucty prirastkov

plot(t,w); % vykreslime priebeh
```

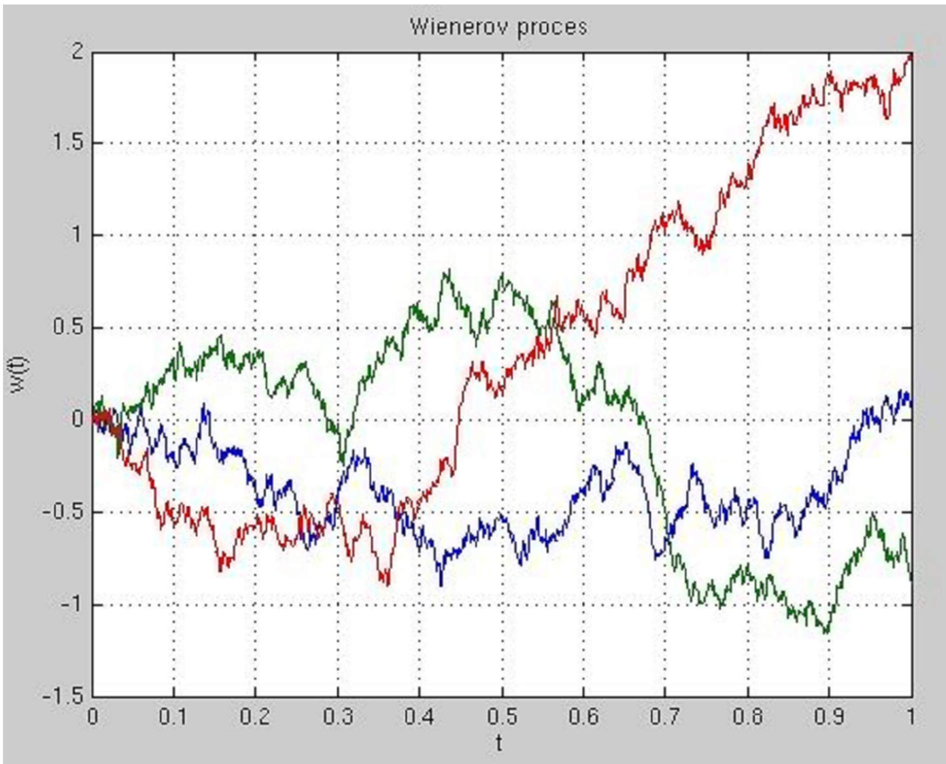
Ukážka výstupu:



- Ak k násobku Wienerovho procesu pridáme lineárny trend:
$$x(t) = \mu t + \sigma w(t)$$
dostávame proces, ktorý sa nazýva **Brownov pohyb**. Ak je parameter σ nulový, grafom je priamka. Pre nenulovú hodnotu σ sa k tomuto lineárnemu trendu pridávajú náhodné fluktuácie.

:: Cvičenia (1) ::

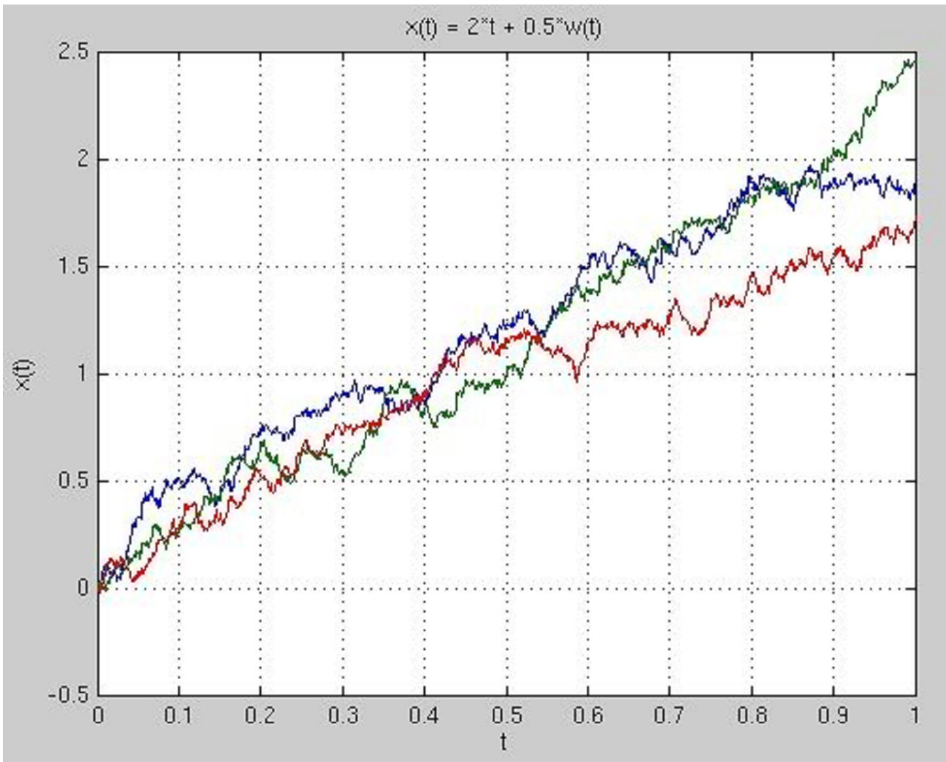
1. Nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií Wienerovho procesu.
Ukážka výstupu:



2. Nech *W* je Wienerov proces. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie *W(t)*.
   Návod: Wienerov proces začína v nule, takže $W(t) = W(t) - W(0)$.

3. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie Brownovho procesu v čase t.

4. Nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií Brownovho pohybu.
   Ukážka výstupu:



Ako závisí typický priebeh procesu od parametrov?

5. Nech *W* je Wienerov proces. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej $W(2) + W(3)$.
   Návod: Napíšte túto náhodnú premennú ako lineárnu kombináciu nezávislých prírastkov. K dispozícii máme časy 2, 3 a 0 (vtedy je hodnota

procesu nulová), takže pôjde zrejme o prírastky *W(3) - W(2)* a *W(2) - W(0)*.

6. Nech *W* je Wienerov proces a nech $s < t$. Vypočítajte kovarianciu *W(s)* a *W(t)*.
   Návod: Použite podobný postup ako v predchádzajúcom príklade.

7. Nech *W* je Wienerov proces. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektora *(W(1), W(3))*.

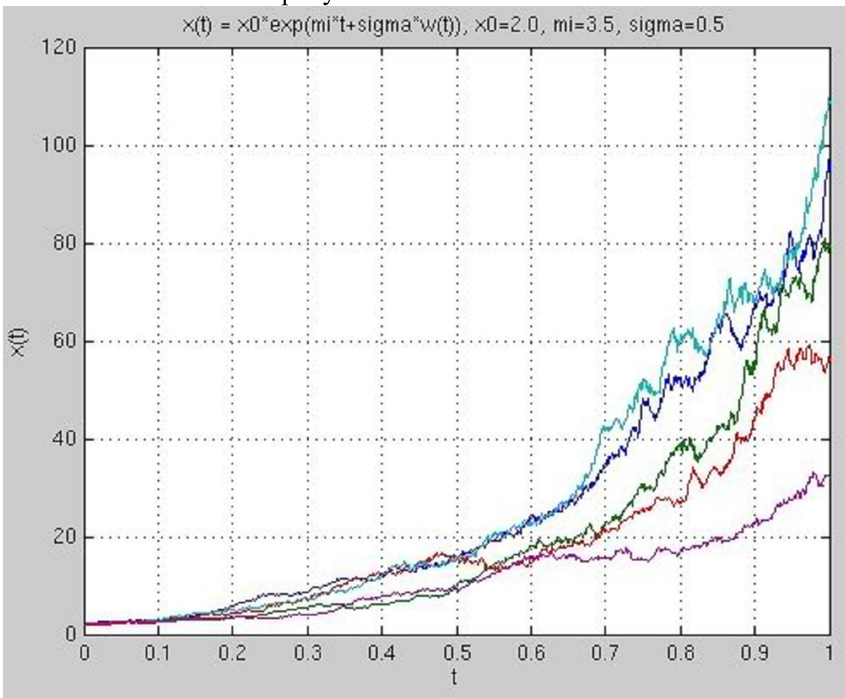
:: Geometrický Brownov pohyb ::

- Nech *w* je Wienerov proces. Potom **geometrický Brownov pohyb** je proces definovaný vzťahom

  $$x(t) = x_0\, e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

  Hodnota x_0 predstavuje hodnotu procesu v čase 0.

- Ukážka trajektórií geometrického Brownovho pohybu:



- Pripomeňme si definíciu a základné vlastnosti **lognormálneho rozdelenia**:
  - Náhodná premenná *X* má lognormálne rozdelenie, ak náhodná premenná *ln(X)* má normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$.
  - Hustota náhodnej premennej *X* s lognormálnym rozdelením je

    $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pre } x > 0 \quad (\text{inak je nulová})$$

  - Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej *X* s lognormálnym rozdelením je

    $$EX = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \ DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

:: Cvičenia (2) ::

1. Ukážte, že hodnota geometrického Brownovho pohybu v čase *t* je náhodná premenná s lognormálnym rozdelením. Aké sú parametre tohto rozdelenia? Aká je stredná hodnota geometrického Brownovho pohybu v čase *t* ?

2. Uvažujme geometrický Brownov pohyb z predchádzajúceho obrázku, t. j. *x(t)=2*exp(3.5t+0.5w(t))*, kde *w* je Wienerov proces. Zostrojte podobný obrázok s grafmi niekoľkých realizácií procesu a pridajte doňho aj strednú hodnotu.

:: Modelovanie cien akcií pomocou geometrického Brownovho pohybu ::

- Cenu akcie *S* modelujeme geometrickým Brownovym pohybom:

  $$S(t) = S_0\, e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

- Na výpočet výnosov sa používa veličina

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}},$$

  pričom posledná aproximácia vyplýva z toho, že

$$\ln(1+x) \approx x \text{ pre } x \approx 0$$

- Ak sa cena akcie *S* riadi geometrickým Brownovym pohybom, tak pre výnosy dostávame

$$v_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t)) \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$

  teda výnosy sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením a uvedenými parametrami.

- **Ako získať parametre geometrického Brownovho pohybu z dát -** odhadom parametrov normálneho rozdelenia z výnosov.

:: Cvičenia (3) ::

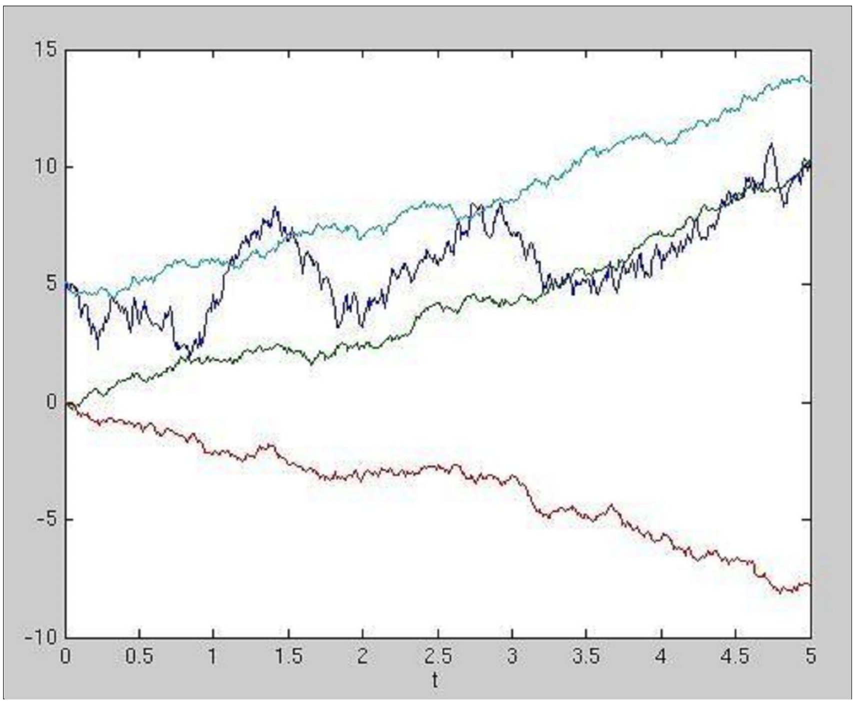
1. Predpokladajme, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom s parametrami $\mu = 0.35,\ \sigma = 0.33$. Vypočítajte strednú hodnotu ceny akcie o pol roka, ak jej dnešná cena je 125 USD.

2. Stiahnite si dáta o vývoji ceny vybranej akcie (http://finance.google.com, http://finance.yahoo.com) so zvolenou frekvenciou a časovým intervalom. Modelujte tento vývoj geometrickým Brownovym pohybom.
   - Odhadnite jeho parametre.
   - Aká je stredná hodnota ročného výnosu?
   - Aká je pravdepodobnosť, že ročný výnos bude kladný?
   - Aká je pravdepodobnosť, že o pol roka bude cena akcie menšia ako 80 percent dnešnej ceny?

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

Vo všetkých úlohách označuje *w(t)* Wienerov proces.

1. Priraďte nasledovné procesy ich simuláciám na grafe:
   - $x_1(t) = 5 + 2t + 3w(t)$,
   - $x_2(t) = -2t + w(t)$,
   - $x_3(t) = 5 + 2t + w(t)$,
   - $x_4(t) = 2t + w(t)$.



2. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie nasledovných hodnôt:
    - *w(4)-w(2),*
    - *w(2),*
    - *3+w(3),*
    - *w(2)-2w(1).*

3. Definujme náhodný proces $Y_t = \int_0^t W_s^2 \mathrm{d}s$. Vypočítajte jeho strednú hodnotu a disperziu v čase *t*.

4. Pomocou Wienerovho procesu *W* definujme nový náhodný proces vzťahom

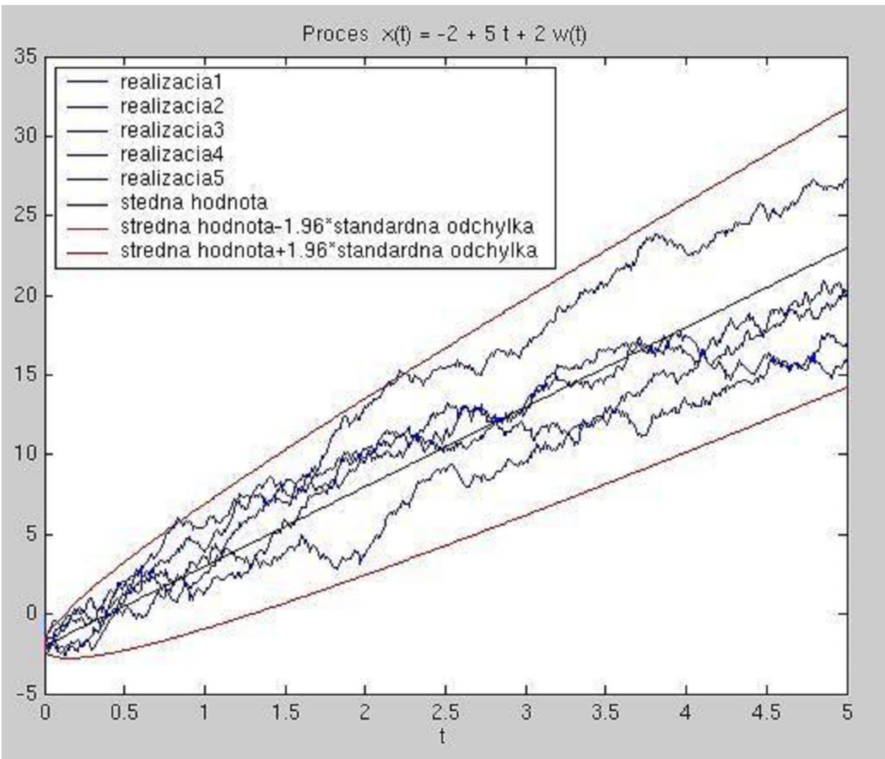
$$U_t = cW_{\frac{t}{c^2}}$$

   Dokážte, že je to tiež Wienerov proces.
   Návod: Treba overiť vlastnosti Wienerovho procesu z definície.

5. Pre *t* z intervalu [0,1] definujme proces $X_t = W_t - tW_1$.
    - Vygenerujte niekoľko jeho trajektórií a zakreslite ich do grafu.
    - Vypočítajte jeho strednú hodnotu v čase *t*
    - Vypočítajte kovarianciu medzi jeho hodnotami v časoch *t* a *s*.

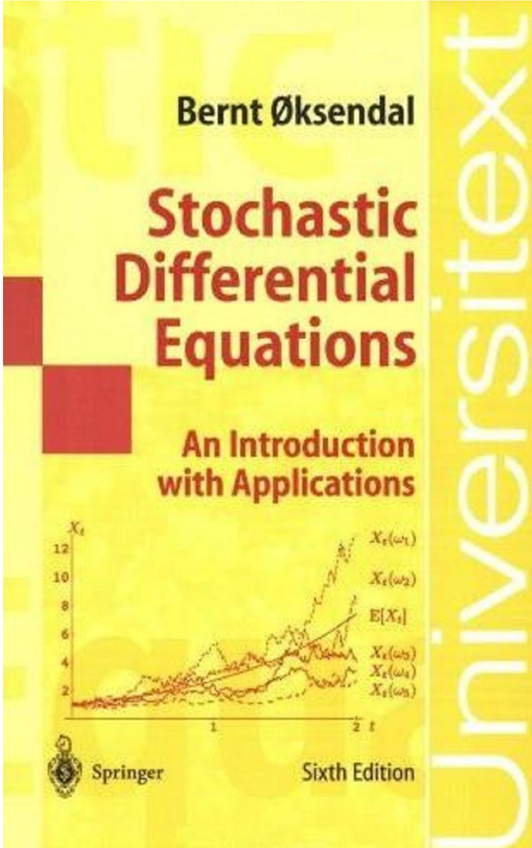
6. Uvažujme proces *x(t) = 2 - 5 t + 2 w(t)*. Zobrazte do jedného grafu:
    - päť realizácií
    - strednú hodnototu procesu
    - strednú hodnotu +/- 1.96*štandardnú odchýlku (t.j. 95 percentný interval spoľahlivosti)

   Ukážka možného výstupu:



7. Predpokladajme, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom s parametrami $\mu = 0.35,\ \sigma = 0.33$. Dnešná cena akcie je 250 USD.
    - Nakreslite graf hustoty ceny akcie o rok. Vypočítajte jej strednú hodnotu.
    - Aká je stredná hodnota mesačného výnosu?
    - Aká je pravdepodobnosť, že mesačný výnos bude kladný?
    - Aká je pravdepodobnosť, že o dva mesiace bude cena akcie z intervalu [270, 280]?

8. Čo si myslíte, čo je na obrázku na obale tejto knihy?



Beáta Stehlíková (www)
Cvičenia z finančných derivátov, FMFI UK Bratislava, LS 2009/2010