Modelovanie úrokových mier - Vašíčkov model

:: Jednofaktorový short rate model ::

- Short rate - okamžitá úroková miera, aproximuje sa úrokovou mierou s krátkoui splatnosťou
- Okamžitá úroková miera sa modeluje stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu(t,r)dt + \sigma(t,r)dw$$

  teda trend vo vývoji úrokovej miery + náhodné fluktuácie okolo trendu
- Jednofaktorový model - jedna stochastická diferenciálna rovnica pre r, t. j. jeden zdroj náhodnosti vo vývoji okamžite úrokovej miery (jeden Wienerov proces).

:: Vašíčkov model ::

- Stochastická diferenciálna rovnica pre okamžitú úrokovú mieru:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$$

- Vlastnosť **mean-reversion** (priťahovanie k dlhodobej hodnote, k limitnej hodnote) - pre strednú hodnotu platí:

$$dE(r_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt$$

- Volatilita je konštantná, nezávisí teda od aktuálnej hodnoty úrokovej miery

:: Pravdepodobnostné rozdelenie úrokových mier ::

- Podmienené rozdelenie úrokovej miery, ak poznáme jej hodnotu r_0 v čase 0 je normálne rozdelenie $N(\bar{r}_t, \bar{\sigma}_t^2)$ s parametrami

$$\bar{r}_t = \theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}$$
$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$$

- Znalosť tohoto rozdelenia nám umožňuje:
  - Vygenerovať realizáciu procesu pre zadané parametre a začiatočnú hodnotu úrokovej miery.
  - Odhadovať parametre procesu z dát.

- Upozornenie: V literatúre sa požívajú rôzne označenia pre lineárnu funkciu driftu, treba si vždy pozrieť, s akým driftom sa pracuje.

::Cvičenia (1) ::

Otvorte si pdf súbor s článokom *Athanasios Episcopos: Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 10 (2000) 199 ? 212.*

Parametrizácia modelu - rovnica (1) v článku:

$$\boxed{\mathrm{d}r_t = (\alpha + \beta r_t)\mathrm{d}t + \sigma r_t^{\gamma}\mathrm{d}W_t}$$

Vašíčkov model (t.j. model s lineárnym driftom a konštantnou volatilitou) dostaneme, ak sa gama rovná jednej.

V tabuľke 3 sú odhadnuté parametre modelov tohto tvaru pre niekoľko štátov. Vyberte si štát a nájdite odhady parametrov Vašíčkovho modelu. Tieto hodnoty použite na riešenie nasledujúcich úloh.

Table 3 (Continued)

Country	Model[b]	α	β	σ^2	γ	Avg. Log L	χ^2-test[c]	df	S
	CIR VR	0	0	0.1215	1.5	3.9904	47.903	3	2
				(20.8112)			(0.0000)		
	CEV	0	−0.0038	0.0030	0.7567	4.1412	4.4701	1	1
			(−0.4781)	(2.0131)	(7.1676)		(0.0345)		
Singapore	Unrestricted	0.0043	−0.109	0.0002	0.1976	4.5980			1
		(2.7148)	(−2.7100)	(1.2311)	(1.6673)				
	Vasicek	0.0038	−0.0984	0.0000	0	4.5884	2.7522	1	1
		(2.4245)	(−2.5002)	(8.4926)			(0.0971)		
	CIR SR	0.0056	−0.1437	0.0013	0.5	4.5751	6.6035	1	2
		(3.733)	(−3.4554)	(8.2625)			(0.0102)		
	BR-SC	0.0096	−0.2632	0.0507	1	4.4453	43.9594	1	3
		(6.5883)	(−5.6486)	(8.0158)			(0.0000)		
	CIR VR	0	0	3.6293	1.5	3.8481	215.9670	3	1
				(34.7029)			(0.0000)		
	CEV	0	−0.008	0.0001	0.1221	4.5717	7.5694	1	1
			(−0.6648)	(12.0543)	(9.3581)		(0.0059)		

1. Transformujte tieto hodnoty na parametre kapa, theta (parameter sigma je v oboch prípadoch rovnaký).

2. Zvoľte si začiatočnú hodnotu úrokovej miery a nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií ďalšieho vývoja (napr. počas nasledujúceho roka) s časovým krokom jeden deň, spolu s jeho strednou hodnotou.

3. Predpokladajte, že dnešná hodnota úrokovej miery je 4.5 percenta. Aká je stredná hodnota úrokovej miery o týždeň, o mesiac a o rok? Zostrojte pre tieto úrokové miery intervalové odhady (stredná hodnota +/- 2*štandardná odchýlka).

4. Aké je limitné rozdelenie úrokovej miery. Nakreslite graf hustoty tohto limitného rozdelenia. Doplňte do grafu hustoty rozdelenia úrokovej miery o mesiac, o rok, ... - tak, aby ste videli konvergenciu týchto hustôt k limitnej hustote.

5. Jednou z nevýhod Vašíčkovho modelu je možnosť záporných úrokových mier. Vypočítajte pravdepodobnosť zápornej úrokovej miery v nasledovných prípadoch:
    - limitné rozdelenie úrokovej miery
    - úroková miera o mesiac, ak jej dnešná hodnota je 5 percent.
    - úroková miera o mesiac, ak jej dnešná hodnota je pol percenta.
    - úroková miera o týždeň, ak jej dnešná hodnota je 5 percent.
    - úroková miera o týždeň, ak jej dnešná hodnota je pol percenta.

6. Nájdite príklad takých parametrov, aby predchádzajúce pravdepodobnosti záporných úrokových mier boli väčšie (pri takýchto pravdepodobnostiach zrejme nie je model vhodný).

:: Ceny dlhopisov v jednofaktorovom short rate modeli ::

- PDR pre cenu dlhopisu P

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r,t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0$$

  ktorá závisí od okamžitej úrokovej miery tau a od času t. Funkcia lambda sa nazýva trhová cena rizika.

  V čase expirácie je hodnota dlhopisu rovná jednej, teda P(T,r)=1 pre každé r.

- Cenami dlhopisov sú určené úrokové miery:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

:: Ceny dlhopisov vo Vašíčkovom modeli ::

- Uvažujeme konštantnú trhovú cenu rizika, teda funkcia lambda(t,r) sa identicky rovná konštante lambda.
- Zavedieme substitúciu - namiesto času budeme uvažovať čas tau zostávajúci do maturity, t.j.

$$\tau = T - t$$

- Riešenie PDR pre cenu dlhopisu sa potom dá nájsť v tvare

$$P(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$$

  kde funkcie A, B sú:

$$\ln A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa}(1-e^{-\kappa\tau}) - \tau\right]\left[\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right] - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1-e^{-\kappa\tau})^2$$

$$B(\tau) = \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

::Cvičenia (2) ::

Uvažujme prametre Vašíčkovho modelu z predchádzajúceho cvičenia.

1. Zvoľte si hodnotu trhovej ceny rizika. Pre niekoľko hodnôt okamžitej úrokovej miery zakreslite do jedného grafu výnosové krivky. Dokážte, že ak tau ide do nekonečna, tak úrokové miery so splatnosťou tau konvergujú k hodnote

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$$

2. Predpokladjme, že limita výnosových kriviek sa rovná trom štvrtinám limitnej hodnoty okamžitej úrokovej miery. Vypočítajte trhovú cenu rizika.

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. **Odhadovanie parametrov Vašíčkovho modelu.** Podmienené rozdelenie úrokových mier je normálne, preto funkcia vierohodnostije súčin hustôt normálnych rozdelení.

We conclude the section by presenting the maximum-likelihood estimator for the Vasicek model. Rewrite the dynamics (3.11) as

$$dr(t) = [b - ar(t)]dt + \sigma dW^0(t), \tag{3.12}$$

with b and a suitable constants. As usual, by integration we obtain, between two any instants s and t,

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW^0(u). \tag{3.13}$$

As noticed earlier, conditional on $\mathcal{F}_s$, the variable $r(t)$ is normally distributed with mean $r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)})$ and variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})$.

It is natural to estimate the following functions of the parameters: $\beta := b/a$, $\alpha := e^{-a\delta}$ and $V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})$, where δ denotes the time-step of the observed proxies $r_0, r_1, \ldots, r_n$ of r (typically $\delta = 1$ day). The maximum likelihood estimators for α, β and V^2 are easily derived as

$$\widehat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n r_{i-1}\right)^2}, \tag{3.14}$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1}]}{n(1 - \widehat{\alpha})}, \tag{3.15}$$

$$\widehat{V^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1} - \widehat{\beta}(1 - \widehat{\alpha}) \right]^2. \tag{3.16}$$

Zdroj: *Damiano Brigo, Fabio Mercurio: Interest Rate Models - Theory and Practice. Second Edition. Springer, 2007. Kapitola 3.1.2, str. 61-62.*

- Stiahnite si dáta úrokovej miery (napr. 3M treasury bills, Euribor s krátkou dobou splatnosti a pod.) zo zvoleného časového intervalu. Zobrazte ich vývoj.
  Zdroje dát:
  - Federal Reserve Statistical Release
  - Euribor.org
- Odhadnite parametre a transformujte ich na parametre kapa, theta, sigma.
- Pre zvolenú začiatočnú hodnotu úrokovej miery nakreslite do jedného grafu strednú hodnotu jej ďalšieho vývoja a niekoľko simulácií.
- Nájdite limitné rozdelenie úrokovej miery.

2. Otázka o Vašíčkovom modeli z internetového diskusného fóra:

Vasicek Problem - Please Help

My attempts to solve this problem are no where near correct. Could someone please help me understand how to

Let P(r, t, T) denote the price at time t of $1 to be paid with certainty at time T, t
<= T, if the short rate at time t is equal to r.

For the Vasicek model, you are given:

P(0.07, 3, 5) = 0.8654
P(0.06, 1, 3) = 0.9152
P(r*, 2, 4) = 0.8337

Calculate r*.

3. Stiahnite si dáta - trojmesačné výnosy treasury bills od začiatku roka 2008, týždenné dáta.
Link: http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm.
Dáta sú úrokové miery v percentách, preveďte ich na desatinné číslo.
    - Z dát z roku 2008 odhadnite parametre Vašíčkovho modelu.
    - Vypočítajte strednú hodnotu a 95 percentný interval spoľahlivosti na základe posledného pozorovania v roku 2008 pre vývoj úrokovej miery v roku 2009.
    - Nakreslite do jedného grafu - vývoj v roku 2008, strednú hodnotu a interval spoľahlivosti z predchádzajúcej úlohy, tri realizácie vývoja v roku 2009.
    - Nakreslite do jedného grafu - vývoj v roku 2008, strednú hodnotu a interval spoľahlivosti z predchádzajúcej úlohy, a skutočný vývoj v roku 2009.
    - Nájdite limitné rozdelenie úrokovej miery. Aká je pravdepodobnosť zápornej úrokovej miery pri tomto rozdelení?
    - Predpokladajte, že limita výnosových kriviek (pre čas splatnosti idúci do nekonečna) je 2 percentá. Vypočítajte trhovú cenu rizika. Túto trhovú cenu rizika použite pri riešení nasledujúich úloh.
    - Nakreslite výnosové krivky pre niekoľko hodnôt okamžitej úrokovej miery.
    - Nájdite príklad takej okamžitej úrokovej miery, pre ktorú nie je zodpovedajúca výnosová krivka monotónna.
    - Odhadnite, ako bude vyzerať výnosová krivka krivka o mesiac, ak dnešná hodnota okamžitej úrokovej miery je pol percenta. Nakreslite odhadnutú výnosovú krivku spolu s 95 percentným intervalom spoľahlivosti.

Beáta Stehlíková (www)
Cvičenia z finančných derivátov, FMFI UK Bratislava, LS 2009/2010