Black-Scholesov vzorec

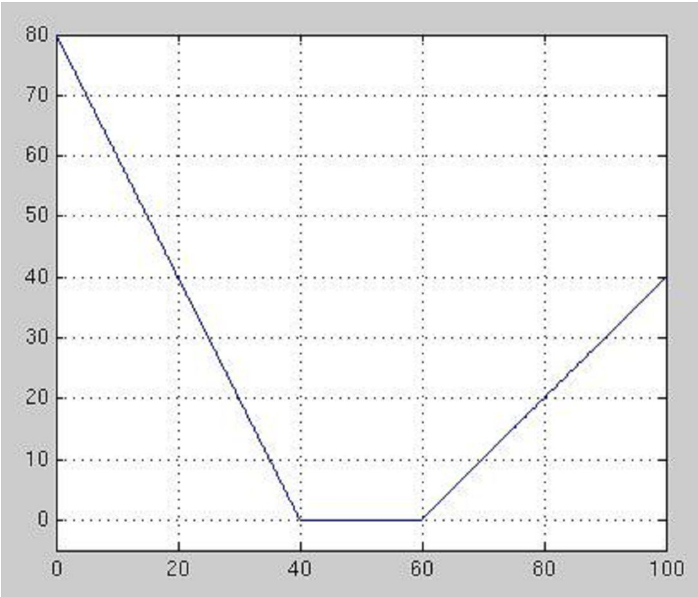
:: Repetitio est mater studiorum ::

Tak ako minulý týždeň, začneme opakovaním. Na začiatku cvičenia teda vypočítame nejaké príklady podobné tým, ktoré sme robili na predchádzajúcich cvičeniach:

1. Nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice $dX(t) = -X(t)dt + e^{-t}dW(t)$.
   Návod: Napíšte stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa proces $Y(t) = e^{t}X(t)$.

2. V súbore orcl.txt sú denné dáta cien akcií (najstaršie sú na začiatku). Predpoklajme, že cena akcie sa riadi procesom $dS = \mu S dt + \sigma S dw$.
   - Odhadnite z dát parametre tohto procesu.
   - Vypočítajte pravdepodobnosť, že o pol roka bude cena akcie aspoň o 30 percent vyššia ako dnes.
   - Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie ročných výnosov.

3. Nájdite stratégiu s nasledovným payoffom:



:: Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica ::

Pripomeňme si, že cena V(S,t) ľubovoľného derivátu európskeho typu spĺňa Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

kde

- *S* je cena akcie,
- *t* je čas
- *T* je čas expirácie derivátu
- *r* je bezriziková úroková miera
- σ je volatilita ceny akcie, o ktorej predpokladáme, že sa riadi geometrickým Brownovym pohybom

Podľa druhu derivátu sa k rovnici pridáva koncová podmienka *V(S,T)* v čase expirácie.

:: Cvičenia (1) ::

1. Dosadením overte, že nasledujúce funkcie sú riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice:

   - $V(S,t) = c\, S$, kde c je kladná konštanta
   - $V(S,t) = c\, e^{-r(T-t)}$ kde c je kladná konštanta

   Aké deriváty predstavujú tieto riešenia?

2. Dokážte:
   - Ak payoff V(S,T) je nezáporný, tak aj V(S,t) je nezáporná funkcia pre každé S > 0, 0 < t < T.
   - Ak payoff V(S,T) je nezáporný a ostro kladný pre S z nejakého intervalu, tak V(S,t) je ostro kladná funkcia pre každé S > 0, 0 < t < T.

   Aká je finančná interpretácia týchto tvrdení?

3. Dokážte, že ak V je riešením Black-Scholesovej PDR, tak aj $S\, \partial V/\partial S$ je riešením. Použite túto vlastnosť riešenia na dôkaz nasledovného tvrdenia: Ak je derivácia payoffu $\partial V/\partial S(S,T) \geq 0$ nezáporná pre každé S > 0, tak aj derivácia $\partial V/\partial S(S,t) \geq 0$ je nezáporná pre každé S > 0, t < T. Aká je jeho interpretácia?

:: Cena európskej call a put opcie ::

- Call opcia:

```
function [v]=call(S,E,r,tau,sigma)
d1=(log(S/E)+(r+0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
d2=(log(S/E)+(r-0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
v=S*normcdf(d1)-E*exp(-r*tau)*normcdf(d2)
```

- Put opcia: dá sa oceniť napríklad pomocou put-call parity.

- Z linearity Black-Scholesovej rovnice vyplýva, že aj je koncová podmienka derivátu lineárnou kombináciou call a put opcií, rovnakou lineárnou kombináciou cien call a put opcií dostaneme cenu tohto derivátu.

:: Cvičenia (2) ::

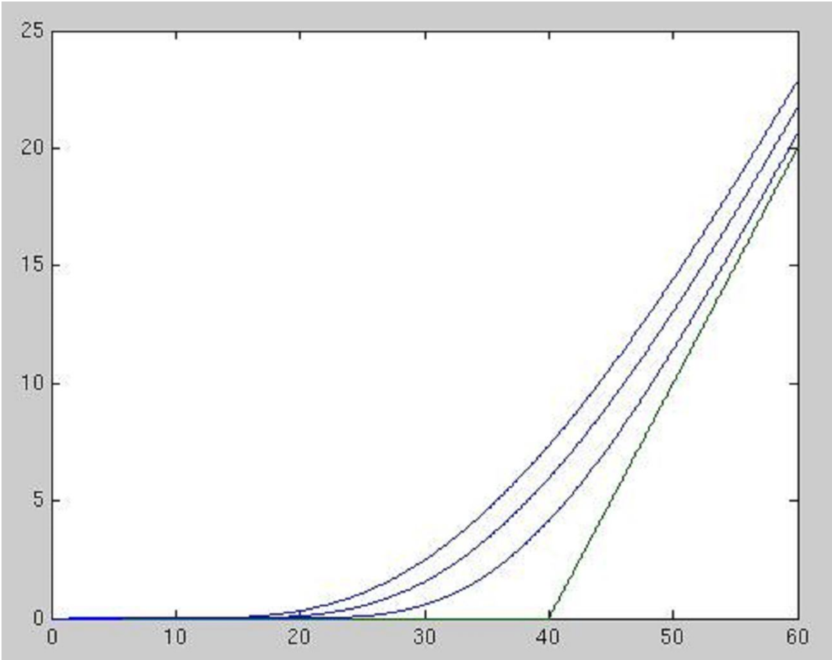
1. Vypočítajte cenu európskej call opcie s expiráciou o pol roka, ktorej expiračná cena je 50 USD. Dnešná cena akcie je 41 USD, jej volatilita je 0.3. Úroková miera je pol percenta.

2. Upravte funkciu `call` tak, aby ste mohli pracovať s vektorovými argumentmi a kresliť napríklad takého grafy:

   ```
   S=0:0.1:100;
   plot(S,call(S,50,0.01,1,0.25));
   ```

   Nakreslite graf s cenou akcie na x-ovej osi, na ktorom bude payoff call opcie a jej ceny pre niekoľko časov do expirácie.

   Ukážka výstupu:



3. Napíšte funkciu, ktorá vracia hodnotu putu a zobrazte podobný graf pre put opciu.

4. Zostrojte stratégiu typu kondor pre zvolené parametre. Znovu nakreslite s cenou akcie na x-ovej osi, na ktorom bude payoff stratégie a jej ceny pre niekoľko časov do expirácie.

5. Dokážte, že ak V je riešením Black-Scholesovej PDR, tak aj $\partial V / \partial E$ je riešením. Použite túto vlastnosť na výpočet ceny binárnej opcie, t. j. opcie s payoffom

$$V(S,T) = \begin{cases} 1 & S \geq E \\ 0 & S < E \end{cases}$$

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. Porovnajte reálne ceny opcií s teoretickými hodnotami z Black-Scholesovho vzorca. Použite volatilitu odhadnutú z historických dát.

2. Vypočítajte hodnotu stratégie, ktorá pozostáva z kúpy call opcie s nízkou expiračnou cenou a predaja call opcie s vyššou expiračnou cenou s tou istou dobou splatnosti. Výpočet ceny stratégie realizujte pre nasledovné dáta: cena akcie 55 USD, volatilita akcie 0.4, úrok jeden a pol percenta, expiračná doba 3 mesiace, expiračné ceny sú 50 a 60 USD.

3. Nájdite všetky riešenia Black-Scholesovej rovnice, ktoré majú tvar V=V(S). Týmto spôsobom nájdete všetky také deriváty, ktoré môže na trhu existovať (a nevytvoria arbitráž), ktorých hodnota závisí len aktuálnej ceny akcie, ale nie od času.

4. Dokážte, ak je druhá derivácia payoffu $\partial^2 V / \partial S^2 (S,T) \geq 0$ nezáporná pre každé S > 0, tak aj druhá derivácia ceny $\partial^2 V / \partial S^2 (S,t) \geq 0$ je nezáporná pre každé S > 0, 0 < t < T.