

Lelandov model (zahrnutie transakčných nákladov)

:: Lelandov model (zahrnutie transakčných nákladov) ::

- Lelandov model (*Hayne E. Leland: Option Pricing and Replication with Transactions Costs, 1985*)
- Bid a ask cena akcie: S_{bid} , S_{ask} - definujeme
 - $S = (S_{bid} + S_{ask})/2$
 - $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Transakčné náklady na jednu transakciu: $(c/2)S$
- Aké by malo byť c ? Zrátajme si na ukážku, čomu sa rovná pre tieto akcie: (Ide o bid a ask ceny iba v jednom konkrétnom okamihu, pre presnejší odhad by sme potrebovali viac dát.)

Microsoft Corporation (NasdaqGS: MSFT)	
Real-Time: 29.69 ↑ 0.32 (1.09%) 10:59AM ET	
Last Trade:	29.69
Trade Time:	10:43am ET
Change:	↑ 0.32 (1.09%)
Prev Close:	29.37
Open:	29.50
Bid:	29.68 x 38300
Ask:	29.69 x 28700
1y Target Est:	33.69
Day's Range:	29.40 - 29.78
52wk Range:	16.26 - 31.50
Volume:	14,514,476
Avg Vol (3m):	56,277,100
Market Cap:	260.39B
P/E (ttm):	16.36
EPS (ttm):	1.82
Div & Yield:	0.52 (1.80%)

Google Inc. (NasdaqGS: GOOG)	
Real-Time: 567.59 ↑ 2.39 (0.42%) 10:56am ET	
Last Trade:	567.11
Trade Time:	10:42am ET
Change:	↑ 1.91 (0.34%)
Prev Close:	565.20
Open:	567.86
Bid:	566.82 x 200
Ask:	567.16 x 200
1y Target Est:	671.81
Day's Range:	565.27 - 568.35
52wk Range:	319.09 - 629.51
Volume:	627,229
Avg Vol (3m):	3,383,210
Market Cap:	180.33B
P/E (ttm):	27.78
EPS (ttm):	20.41
Div & Yield:	N/A (N/A)

Amazon.com, Inc. (NasdaqGS: AMZN)	
Real-Time: 132.31 ↑ 0.52 (0.39%) 11:01AM ET	
Last Trade:	132.14
Trade Time:	10:46AM ET
Change:	↑ 0.35 (0.27%)
Prev Close:	131.79
Open:	132.45
Bid:	132.11 x 200
Ask:	132.15 x 200
1y Target Est:	161.74
Day's Range:	131.40 - 132.69
52wk Range:	67.00 - 145.91
Volume:	1,249,006
Avg Vol (3m):	10,125,000
Market Cap:	58.74B
P/E (ttm):	64.74
EPS (ttm):	2.041
Div & Yield:	N/A (N/A)

• PDR pre ceny derivátov:

- Replikačné portfólio v Black-Scholesovom modeli: 1 opcia, δ , akcií spojité obchodovanie.
- V prípade transakčných nákladov: 1 opcia, δ akcií, portfólio meníme v intervaloch dĺžky Δt , počet transakcií je $|\Delta\delta|$
- Zmena hodnoty portfólia:

$$\Delta\pi = \Delta V + \delta\Delta S - \frac{c}{2}S|\Delta\delta|$$

- Na cvičení odvodíme rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

• Pre call a put opciu:

- Definujeme Lelandovo číslo

$$Le = \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

- Pre Lelandovo číslo z intervalu (0,1) dostávame cenu call, resp. put opcie pomocou Black-Scholesovho vzorca s upravenou volatilitou:

$$\sigma_{TC}^2 = (1 - Le)\sigma^2$$

Dôkaz: dosadíme do rovnice, využívame, že cena call a put opcie v Black-Scholesovom modeli je konvexná funkcia premennej S.

:: Cvičenia (1) ::

1. Dokážte, že prítomnosť transakčných nákladov znižuje cenu opcie.
2. Napíšte funkciu, ktorá počíta hodnotu Lelandovho čísla (v závislosti of volatility akcie, konštanty c, intervalu medzi dvoma zaisteniami portfólia). Napíšte funkciu, ktorá overí podmienku, že Lelandovo číslo je z intervalu (0,1). Ak je splnená, vypočíta hodnotu call a put opcie za prítomnosti transakčných nákladov (parametre: cena akcie, expiračná cena, volatilita, čas do expirácie, úroková miera, konštanty c, interval medzi dvoma zaisteniami portfólia).
3. Zvoľte si parametre akcie a opcie, a úrokovú mieru - vstupy potrebné do Lelandovho modelu. Aké časy medzi dvoma zmenami portfólia sú prípustné? Pre jeden z nich vypočítajte cenu opcie a porovnajte ju s Black-Scholesovou cenou.

:: Modelovanie bid-ask spreadov pomocou Lelandovho modelu ::

- Cenu z predchádzajúceho odvodenia môžeme považovať za **ponuku na kúpu opcie**.
- Ak chceme odvodiť **ponuku na predaj**, uvažujeme portfólio, v ktorom dlhujeme jednu opciu. Toto portfólio hedžujeme. Rovnakým postupom dostaneme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(1 + \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Cenu call, resp. put opcie znovu dostaneme pomocou Black-Scholesovho vzorca, pričom upravená volatilita je:

$$\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$$

- To znamená, že upravené volatility sú:

$$\sigma^2(1 + Le) = \sigma_{ask}^2, \quad \sigma^2(1 - Le) = \sigma_{bid}^2$$

a rozdiel medzi ask a bid cenou je

$$V^{ec}(S, t; \sigma(1 + Le)^{\frac{1}{2}}) - V^{ec}(S, t; \sigma(1 - Le)^{\frac{1}{2}})$$

- Tieto výsledky nám umožňujú **odhadnúť parametre modelu z dát**:

1. Vypočítame implikované bid a ask volatility σ_{bid} a σ_{ask} z bid a ask ceny opcie:

$$V_{real}^{ask} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{ask}), \quad V_{real}^{bid} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{bid})$$

2. Riešením sústavy rovníc vypočítame parametre σ (implikovaná volatilita), Le:

$$\sigma^2(1 + Le) = \sigma_{ask}^2, \quad \sigma^2(1 - Le) = \sigma_{bid}^2$$

3. Z bid a ask ceny akcie vypočítame konštantu c z Lelandovho modelu.

4. Nakoniec vypočítame implikovaný čas medzi dvoma prerovnaniami portfólia pri hedžingu opcie:

$$\Delta t = \frac{2}{\pi} \frac{C^2}{\sigma^2 Le^2}$$

:: Cvičenia (2) ::

1. Použite uvedený postup na odhad parametrov Lelandovho modelu pomocou niektorej z nasledovných call opcií (dáta sú zo 17. marca 2010):

Options

[Learn more about New Options Symbolology](#) » [Go](#)

View By Expiration: [Mar 10](#) | **[Apr 10](#)** | [Jul 10](#) | [Oct 10](#) | [Jan 11](#) | [Jan 12](#)

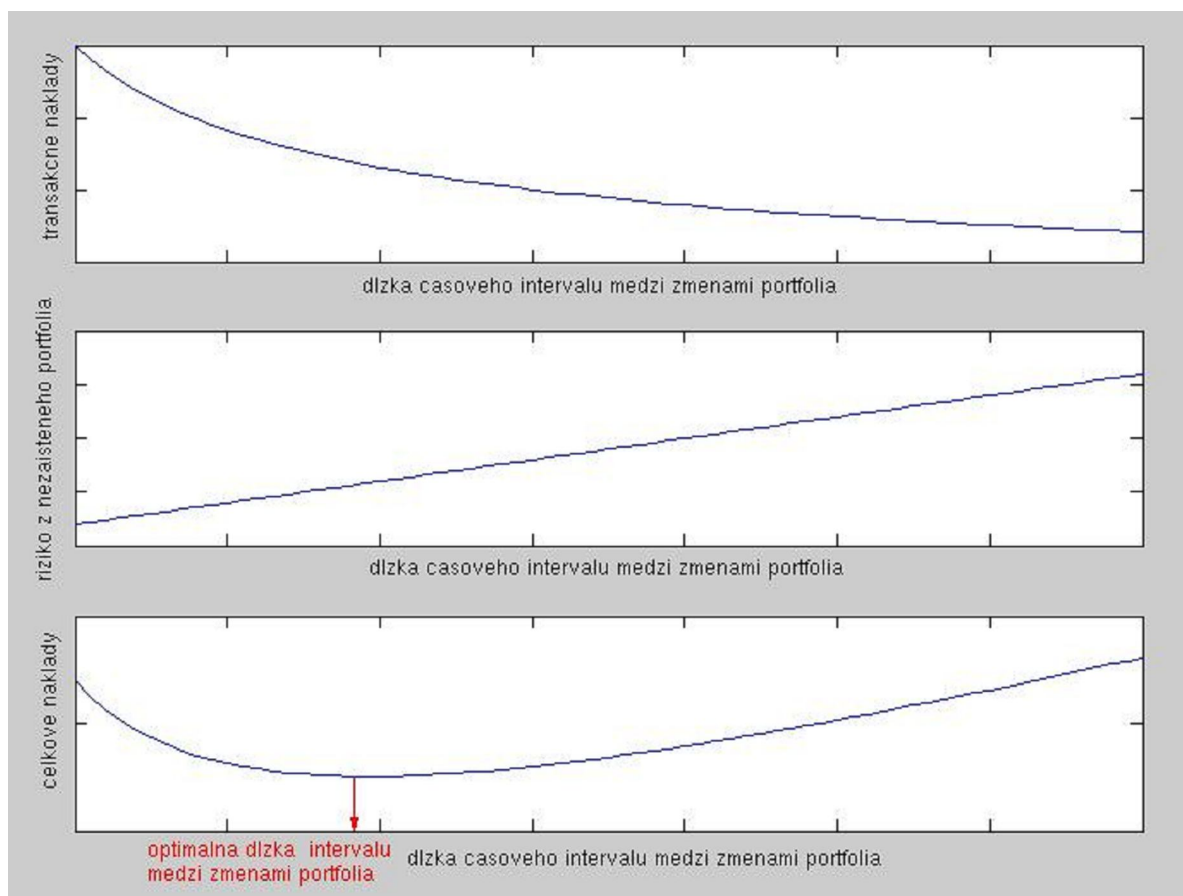
CALL OPTIONS							Expire at close Fri, Apr 16, 2010
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
50.00	ZQN100417C00050000	68.20	0.00	81.75	82.65	0	178
55.00	ZQN100417C00055000	72.70	0.00	76.75	77.40	0	104
60.00	ZQN100417C00060000	68.15	0.00	71.75	72.40	0	89
65.00	ZQN100417C00065000	68.04	0.00	66.75	67.40	0	89
70.00	ZQN100417C00070000	61.64	0.00	61.90	62.40	7	245
75.00	ZQN100417C00075000	53.85	0.00	56.75	57.45	0	419
80.00	QZN100417C00080000	52.20	0.00	52.00	52.30	11	591
85.00	QZN100417C00085000	43.40	0.00	47.00	47.40	0	552
90.00	QZN100417C00090000	41.74	0.00	42.10	42.50	7	1,300
95.00	QZN100417C00095000	35.00	0.00	37.10	37.40	2	938
100.00	QZN100417C00100000	32.00	↑ 0.20	32.15	32.70	2	1,841
105.00	QZN100417C00105000	26.15	0.00	27.30	27.80	23	623
110.00	QZN100417C00110000	22.40	0.00	22.50	22.60	18	1,426
115.00	QZN100417C00115000	18.05	↑ 0.37	17.80	17.90	16	1,965
120.00	QZN100417C00120000	13.30	↑ 0.15	13.35	13.45	59	6,689
125.00	QZN100417C00125000	9.15	↑ 0.15	9.20	9.30	98	5,748
130.00	QZN100417C00130000	5.85	↑ 0.20	5.80	5.90	359	10,493
135.00	QZN100417C00135000	3.25	↑ 0.05	3.25	3.30	427	10,688
140.00	QZN100417C00140000	1.64	↑ 0.04	1.63	1.66	414	10,463
145.00	QZN100417C00145000	0.76	↑ 0.01	0.75	0.78	104	5,372
150.00	QZN100417C00150000	0.37	↑ 0.02	0.33	0.37	61	4,849
155.00	QZN100417C00155000	0.20	0.00	0.15	0.17	23	2,314
160.00	QZN100417C00160000	0.11	0.00	0.07	0.09	80	3,019
165.00	QZN100417C00165000	0.03	↓ 0.05	0.01	0.06	1	1,600
170.00	QZN100417C00170000	0.04	0.00	N/A	0.05	100	1,137
175.00	QZN100417C00175000	0.05	0.00	N/A	0.04	160	1,102
180.00	QZN100417C00180000	0.03	0.00	N/A	0.04	0	1,135
185.00	QZN100417C00185000	0.03	0.00	N/A	0.03	0	651
190.00	QZN100417C00190000	0.03	0.00	N/A	0.03	0	1,212
195.00	QZN100417C00195000	0.04	0.00	N/A	0.03	0	2,115
200.00	QZN100417C00200000	0.09	0.00	N/A	0.03	0	262
210.00	QZN100417C00210000	0.04	0.00	N/A	0.03	0	3,418

PUT OPTIONS							Expire at close Fri, Apr 16, 2010	
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int	
<u>50.00</u>	<u>ZQN100417P00050000</u>	0.03	0.00	N/A	0.03	0	953	
<u>55.00</u>	<u>ZQN100417P00055000</u>	0.01	0.00	N/A	0.03	1	523	
<u>60.00</u>	<u>ZQN100417P00060000</u>	0.04	0.00	N/A	0.03	0	244	
<u>65.00</u>	<u>ZQN100417P00065000</u>	0.05	0.00	N/A	0.04	0	1,079	
<u>70.00</u>	<u>ZQN100417P00070000</u>	0.04	0.00	N/A	0.04	1	773	
<u>75.00</u>	<u>ZQN100417P00075000</u>	0.06	0.00	N/A	0.05	0	924	
<u>80.00</u>	<u>QZN100417P00080000</u>	0.04	↓ 0.02	0.03	0.05	10	2,076	
<u>85.00</u>	<u>QZN100417P00085000</u>	0.05	↓ 0.01	0.04	0.05	1	3,790	
<u>90.00</u>	<u>QZN100417P00090000</u>	0.10	0.00	0.07	0.09	78	2,543	
<u>95.00</u>	<u>QZN100417P00095000</u>	0.13	↓ 0.01	0.11	0.13	15	6,487	
<u>100.00</u>	<u>QZN100417P00100000</u>	0.18	↓ 0.02	0.17	0.19	18	7,977	
<u>105.00</u>	<u>QZN100417P00105000</u>	0.26	↓ 0.03	0.26	0.28	58	4,397	
<u>110.00</u>	<u>QZN100417P00110000</u>	0.41	↓ 0.06	0.42	0.44	52	5,017	
<u>115.00</u>	<u>QZN100417P00115000</u>	0.69	↓ 0.05	0.69	0.72	84	12,026	
<u>120.00</u>	<u>QZN100417P00120000</u>	1.20	↓ 0.04	1.20	1.23	180	7,835	
<u>125.00</u>	<u>QZN100417P00125000</u>	2.12	↓ 0.09	2.11	2.14	273	7,400	
<u>130.00</u>	<u>QZN100417P00130000</u>	3.60	↓ 0.30	3.65	3.75	345	9,423	
<u>135.00</u>	<u>QZN100417P00135000</u>	6.10	↓ 0.30	6.10	6.20	126	2,536	
<u>140.00</u>	<u>QZN100417P00140000</u>	9.45	↓ 0.35	9.45	9.60	29	1,958	
<u>145.00</u>	<u>QZN100417P00145000</u>	13.50	↓ 0.60	13.55	13.70	3	1,207	
<u>150.00</u>	<u>QZN100417P00150000</u>	18.70	↑ 0.25	18.10	18.25	1	587	
<u>155.00</u>	<u>QZN100417P00155000</u>	23.35	0.00	22.95	23.10	1	623	
<u>160.00</u>	<u>QZN100417P00160000</u>	28.35	0.00	27.90	28.05	11	311	
<u>165.00</u>	<u>QZN100417P00165000</u>	33.55	0.00	32.65	33.00	18	214	
<u>170.00</u>	<u>QZN100417P00170000</u>	36.45	0.00	37.30	38.30	11	155	
<u>175.00</u>	<u>QZN100417P00175000</u>	55.75	0.00	42.30	43.30	0	54	
<u>180.00</u>	<u>QZN100417P00180000</u>	61.45	0.00	47.30	48.40	0	16	
<u>195.00</u>	<u>QZN100417P00195000</u>	73.15	0.00	62.30	63.30	0	10	
<u>200.00</u>	<u>QZN100417P00200000</u>	70.60	0.00	67.60	68.25	1	9	

Highlighted options are in-the-money.

:: Poznámky ::

- Ako voliť dĺžku intervalu medzi dvoma nasledujúcimi zmenami portfólia? Existujú modely (RAPM - Risk Adjusted Pricing Methodology), ktoré berú do úvahy dve veci:
 - transakčné náklady - tie sa klesajú, keď rastie dĺžka časového intervalu medzi dvoma nasledujúcimi zmenami portfólia
 - riziko z nezabezpečeného portfólia - ak rastie dĺžka tohto časového intervalu, vzniká stále väčšie riziko z výkyvov cien na trhu, keďže naše portfólio sa vzdáľuje od replikačného portfólia zo spojitého modelu
 Dá sa to znázorniť nasledovne:



- Rovnica na oceňovanie derivátov v Lelandovom modeli s transakčnými nákladmi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

nie je lineárna. To znamená, že napríklad súčet, rozdiel, alebo nejaká iná kombinácia riešení už nie je riešením. Z toho vyplýva, že cena kombinovaných stratégií sa už nedá vypočítať tak, že oceníme každú opciu zvlášť a výsledok zložíme. (To sa dá len pri lineárných rovniciach, ako je napríklad pôvodná Black-Scholesova rovnica.) Nemožnosť takéhoto výpočtu sa dá vidieť aj z nasledovnej úvahy:

Ak oceníme každú opciu samostatne, zarátavame tak transakčné náklady vznikajúce z udržiavania každého replikačného portfólia zvlášť. Ak nemáme transakčné náklady, nevadí, že udržiavame akoby dve replikačné portfólia. Môže sa stať, že v jednom akcie kupujeme a v druhom predávame. Žiadne náklady z toho však nevznikajú. V prípade transakčných nákladov to už nie je pravda. Vtedy treba portfólio uvažovať ako celok, a v prípade uvedenej situácie nerobiť zbytočné transakcie.

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

- [Vzorová písomka, 2009]
 - (2.5 b.) Uvažujme transakčné náklady podľa Lelandovho modelu. Predpokladajme, že rozdiel medzi bid a ask cenou akcie je pol percenta ich priemernej hodnoty. Volatilita akcie je 0.6. Dnešná hodnota akcie je 140 USD. Úroková miera je pol percenta. Uvažujme call opciu s expiračnou cenou 150 USD a expiráciou o štvrt roku. Uveďte jeden prípustný čas medzi dvoma zmenami portfólia (Lelandovo číslo je medzi nulou a jednotkou) a príslušnú bid a ask cenu opcie.
- [Písomka, 2009]

4. Predpokladajme, že rozdiel medzi ask a bid hodnotou akcie je štvrt' percenta ich priemernej hodnoty. Volatilita akcie je 0.5. Dnešná hodnota akcie je 100 USD. Uvažujeme call opciu s expiračnou cenou 120 USD a expiráciou o rok.
- (a) [1 bod] Pre aké časy medzi dvoma zmenami portfólia pri hedžingu je Lelandovo číslo medzi nulou a jednotkou? Čas vyjadrite v hodinách, predpokladajte, že burza je počas pracovných dní otvorená sedem hodín.

- (b) [1 bod] Zvoľte si jeden prípustný čas a vypočítajte bid a ask cenu opcie.

5. Vyberte si jednu put opciu firmy MSFT z cvičenia

- (a) [1 bod] Vypočítajte pomocou Lelandovho modelu implikovanú volatilitu a implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia.

Použité dáta (všetky vstupné dáta - tak, aby sa výpočet dal zopakovať):

Výsledok:

Poznámka: Teraz sme na cvičení pracovali s opciami firmy AMZN, takže pri riešení tejto úlohy si vyberte niektorú z týchto put opcií.

3. Uvažujme rozdiel bid a ask ceny opcie ako funkciu ceny akcie S . (Ostatné parametre - volatilita akcie, parameter c charakterizujúci transakčné náklady, úroková miera, expiračná cena a čas expirácie opcie - sú konštantné).
- Znázorníte graficky tento rozdiel pre zvolené hodnoty parametrov.
 - Pre akú cenu akcie je tento rozdiel maximálny? Vypočítajte analyticky pre všeobecné hodnoty parametrov.