Numerické riešenie Black-Scholesovej PDR (I.)

:: Prečo numerické riešenie ::

- Načo riešiť rovnicu numericky, keď máme jej explicitné rieenie?
- Explicitné riešenie máme pre európsku call a put opciu. Pre iné deriváty takýto vzorec nemusí existovať. (To je prípad napríklad amerických call a put opcií, ktorými sa ešte budeme zaoberať. A mnohých ďalších.) Riešenie sa však dá nájsť numericky.
- To, že použitie numerických schém vyskúšame najskôr v prípade, v ktorom máme k dispozícii explicitné riešenie, má tú výhodu, že môžeme overiť presnosť získaných numerických výsledkov.

:: Transformácia Black-Scholesovej rovnice ::

- **Black-Scholesova rovnica**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre } S > 0, t \in (0,T)$$

$$V(S,T) = V_0(S) \quad \text{pre } S > 0 \text{ - závisí od typu derivátu}$$

  - je to parabolická PDR, ktorá sa dá transformovať na rovnicu vedenia tepla so zadanou začiatočnou podmienkou.

- **Transformácia premenných**
  - Máme koncovú podmienku čase T (čas expirácie opcie), nie začiatočnú. To vyriešime transformáciou

    $$\tau = T - t$$

    To znamená, že novou premennou, namiesto času t, bude čas zostávajúci do expirácie.
  - Premenná S (cena akcie) je kladná. Premennú, ktorá nadobúda všetky reálne hodnoty dostaneme zlogaritmovaním. Nová premenná teda bude

    $$x = \ln(S/E)$$

    Hodnoty x blízke nule zodpovedajú cenám akcie, ktoré sú blízke expiračnej cene opcie. Záporné hodnoty x predstavujú ceny akcie, ktoré sú nižšie ako je expiračná cena. Analogicky, kladné hodnoty x predstavujú ceny akcie, ktoré sú vyššie ako je expiračná cena. Na transformáciu rovnice by stačila logaritmická transformácia, ale - ako uvidíme neskôr - táto bude výhodnejšia z numerického hľadiska.

- **Transformácia na RVT**
  - Rovnica, ktorú dostaneme týmito transformáciami, je parabolická rovnica, ale už s konštantnými koeficientami. Túto rovnicu vieme transformovať na rovnicu vedenia tepla transformáciou

    $$u(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}V(S,t)$$

    kde konštanty určíme tak, aby po tranformácii vznikla práve RVT. Tá správna voľba konštánt je

    $$\alpha = \frac{r-D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \beta = \frac{r+D}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{(r-D)^2}{2\sigma^2}$$

    Vedie k rovnici

    $$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (-\infty,\infty), \tau \in (0,T)$$

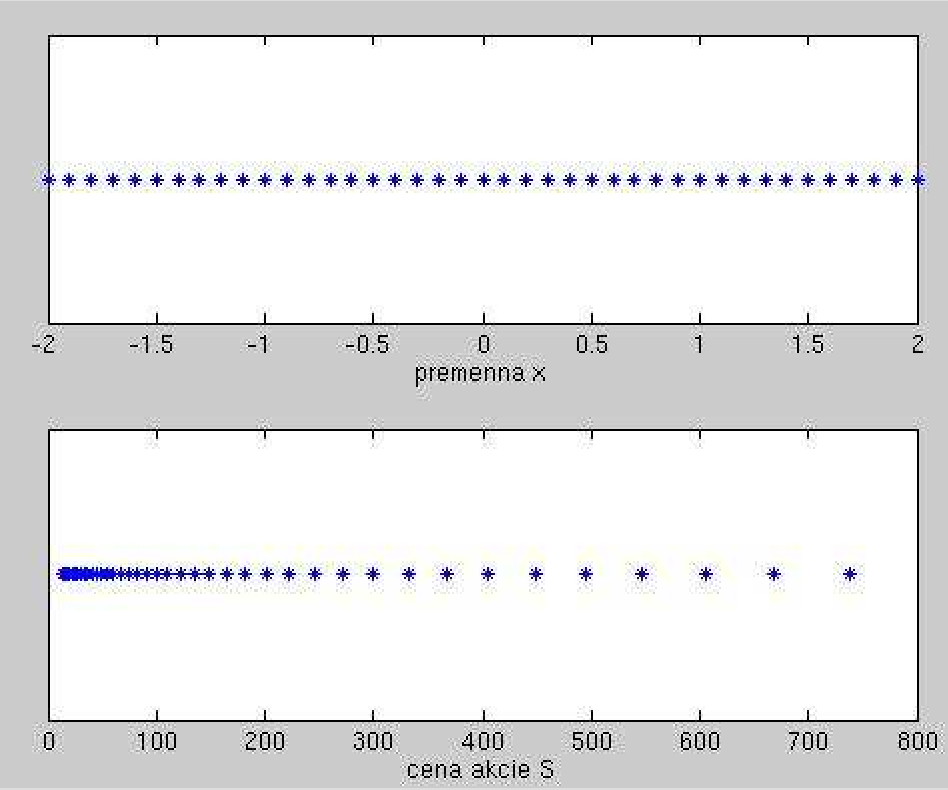
- Transformácia koncovej podmienky:

$$u_0(x) = u(x,0) = e^{\alpha x}V(S,T) = e^{\alpha x}V_0(S) = e^{\alpha x}V_0\left(Ee^x\right)$$

- Vyriešením tejto RVT a spätnou transformáciou dostaneme explicitné Black-Scholesove vzorce, ktoré sme používali v predchádzajúcich cvičeniach. Teraz však chceme túto rovnicu riešiť numericky.

:: Diskretizácia ::

- Premenná x je z neohraničeného intervalu, nadobúda hodnoty od mínus nekonečna do plus nekonečna. Numericky budeme úlohu riešiť pre x z ohraničeného intervalu [-L, L], kde L bude dosť veľké číslo. Na obrázku je delenie intervalu premennej x, a zodpovedajúce delenie pre cenu akcie, ak je expiračná cena 100 USD.



Všimnime si, že tento interval [-L, L] nemusíme meniť pre opciu s inou expiračnou cenou. O vhodné body S sa postará transformácia x = ln(S/E), ktorú sme použili namiesto jednoduchej logaritmickej transformácie x = ln(S).

Kvôli tomu, že sme výpočet obmedzili na ohraničený interval, musíme k rovnici dodať **okrajové podmienky** v krajných bodoch. Krajné body zodpovedajú cenám akcie, ktoré sú veľmi malé, blízke nule (x=-L) a cenám, ktoré sú veľmi veľké a približujú sa k nekonečnu (x=L). Pre takéto limitné hodnoty použijeme aproximácie:

$$
\begin{aligned}
V &\sim 0 \text{ pre } S \sim 0 \\
V &\sim Se^{-D\tau} - Ee^{-r\tau} \text{ pre } S \sim \infty
\end{aligned}
$$

- Ďalej potrebujeme **diskretrizovať RVT**. Sú dve možnosti:

$$u_i^j \approx u(x_i, \tau_j)$$

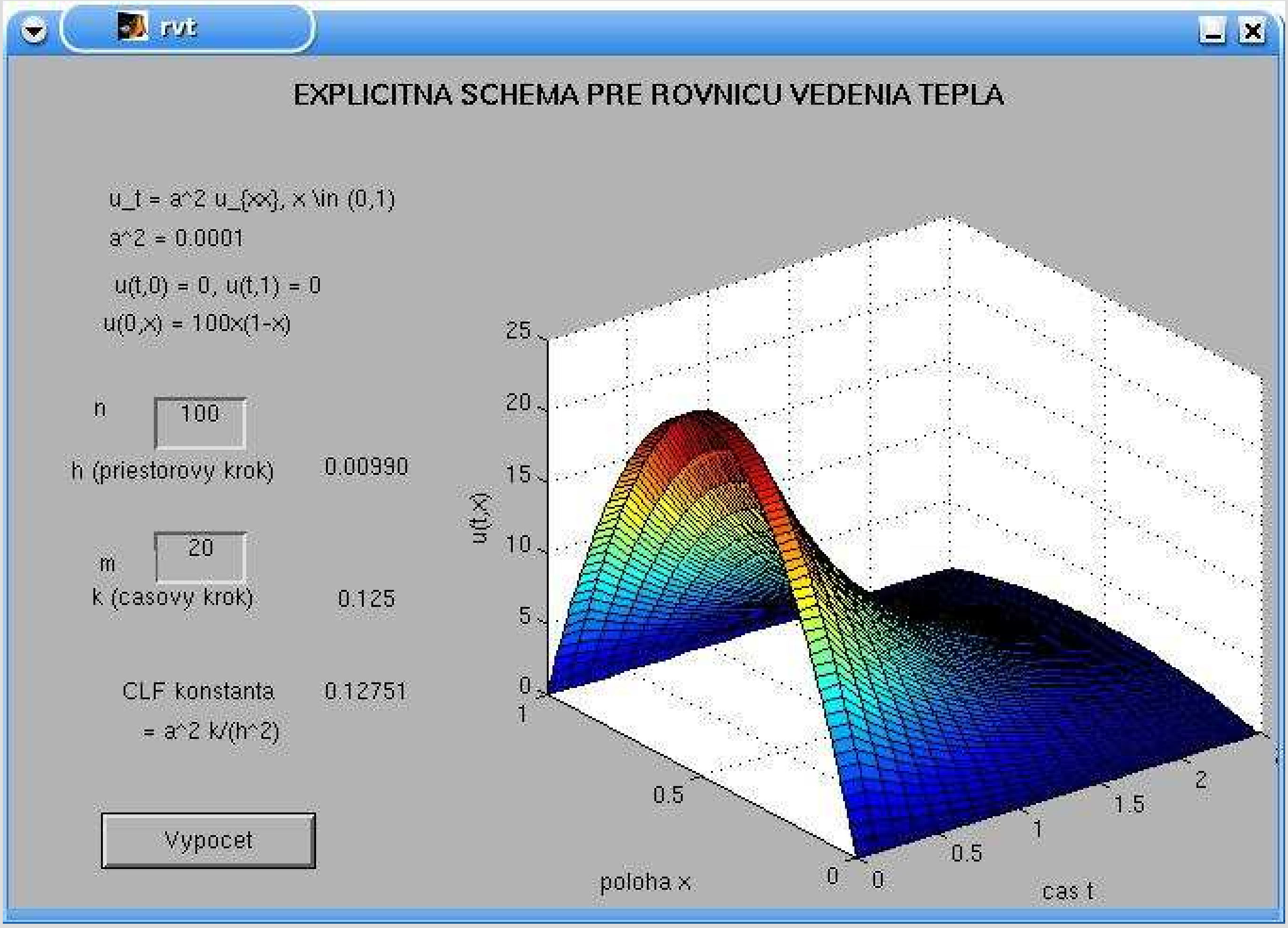
$$1.\quad \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

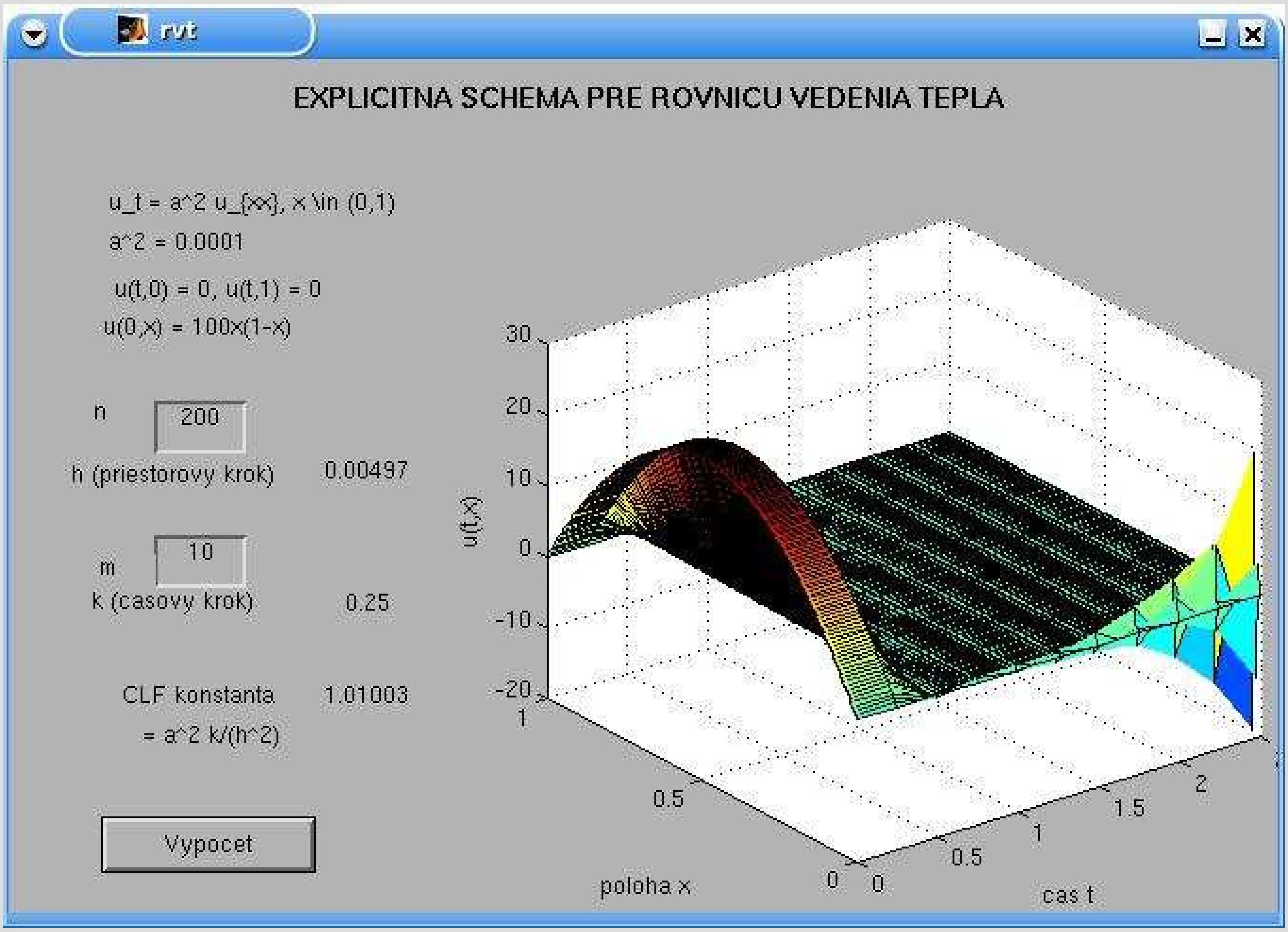
$$2.\quad \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Prvý prístup (**explicitná schéma**) vyzerá byť jednoduchší. Máme začiatočnú podmienku. Z nej vypočítame hodnoty v nasledujúcej časovej vrstve. Tieto použijeme na výpočet riešenia v ďalšej časovej vrstve, atď. Na konvergenciu metódy je však potrebné splnenie podmienky na vzťah časového a priestorového kroku. Táto podmienka môže prakticky viesť k nevyhnutnosti zvoliť veľmi malý časový krok - kvôli konvergencii metódy, nie kvôli tomu, že by sme riešenie potrebovali v mnohých tak blízkych časových okamihoch.

V druhom prístupe (**implicitná schéma**) riešime na každej časovej vrstve sústavu lineárnych rovníc.

- Ukážka numerického výpočtu použitím explicitnej schémy:





Program v Matlabe, vyžadujúci guide, si môžete stiahnuť tu: rvt.m, rvt.fig, spúšťa sa m-súbor. Môžete meniť hodnoty n, m.

:: Implicitná schéma pre call opciu ::

- Zvolíme parametre opcie:

```
E = 100;
r = 0.01;
D = 0.02;
sigma = 0.3;
```

- Zvolíme parameter L, určujúci oblasť, na ktorej budeme riešenie počítať:

```
L = 2;
```

a parametre delenia:

```
% priestorova premenna
n = 20;
h = L/n;
% casova premenna
T = 0.5;
m = 6;
k = T/m;
```

- Definujeme konštanty potrebné na transformáciu rovnice:

```
alfa = (r-D)/(sigma^2) - 0.5;
beta = (r+D)/2 + (sigma^2)/8 + ((r-D)^2)/(2*sigma^2);
```

- Pre riešenie trasformovanej rovnice definujeme okrajové podmienky (tri bodky na konci riadku znamenajú, že príkaz sa má chápať akoby bol napísaný na jednom riadku): :

```
% x = -L, t.j. cena blizka nule
phi = inline('0', 'tau');

% x = L, t.j. cena blizka nekonecnu
psi = inline('E*exp(alfa*L + beta*tau).*(exp(L - D*tau) - exp(-r*tau))',...
             'E','alfa','beta','L','r','D','tau');
```

a začiatočnú podmienku:

```
u0 = inline('E*exp(alfa*x).*max(0, exp(x)-1)', 'E','alfa','x');
```

Použitie:

```
Command Window
>> tau=0.5;
>> phi(tau)

ans =

     0

>> psi(E, alfa, beta, L, r, D, tau)

ans =

  188.6989

>> x=-1;
>> u0(E, alfa, x)

ans =

     0

>> x=1;
>> u0(E, alfa, x)

ans =

   93.2593

>> clear tau; clear x;
>> |
```

- Vytvoríme maticu, do ktorej budeme vkladať riešenie:

  ```
  ries = zeros(m+1, 2*n + 1);
  ```

  a body delenia v čase a v priestore:

  ```
  x = -L:h:L;
  tau = 0:k:T;
  ```

  Úloha pre vás: Vložte do matice okrajové podmienky a začiatocnú podmienku.
  Dostaneme:

```
Command Window

ries =

  Columns 1 through 7

         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 8 through 14

         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 15 through 21

         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 22 through 28

    9.8936   19.5931   29.1254   38.5167   47.7922   56.9762   66.0922
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 29 through 35

   75.1633   84.2118   93.2593  102.3272  111.4364  120.6074  129.8604
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0

  Columns 36 through 41

  139.2152  148.6918  158.3096  168.0882  178.0470  188.2055
         0         0         0         0         0  188.2877
         0         0         0         0         0  188.3699
         0         0         0         0         0  188.4521
         0         0         0         0         0  188.5344
         0         0         0         0         0  188.6166
         0         0         0         0         0  188.6989
```

- Na výpočet každej časovej vrstvy budeme potrebovať vyriešiť sústavu lineárnych rovníc. Definujeme teraz premenné, ktoré obsahujú hodnoty vystupujúce v trojdiagonálnej matici tejto sústavy:

```
a = -0.5*(sigma^2)*k/(h^2);  % pozdlz diagonaly
b = 1 - 2*a;  % na diagonale
```

Pri výpočte prvej časovej vrstvy (teda hodnoty v čase k) máme nasledovnú pravú stranu:

```
ps = ries(1, 2:2*n)';
ps(1) = ps(1) - a*phi(k);
ps(2*n-1) = ps(2*n-1) - a*psi(E, alfa, beta, L, r, D, k);
```

Na riešenie systému rovníc použijeme Gauss-Seidelovu metódu:

Gauss-Seidelova metóda na riešenie systému rovníc $Av = b$:

$$v_i^{q+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} v_j^{q+1} - \sum_{j>i} a_{ij} v_j^q \right)$$

Označenia:
matica $A = (a_{ij})$, pravá strana $b = b_i$, riešenie $v = v_i$
v^q = q-ta iterácia

Môžete použiť funkciu gs.m:

```
Command Window
>> help gs

  ------------------------------------------------------------------------
  Gauss-Seidelova metoda na riesenie symetrickeho trojdiagonalneho systemu
  ------------------------------------------------------------------------

  gs(a,b,ps,v0,eps)

  3-diagonalna matica systemu ma:
  a - pod a nad diagonalou
  b - na diagonale

  ps - prava strana systemu - stlpcovy vektor
  v0 - zaciatocna iteracia - stlpcovy vektor

  v - aproximacia riesenia (prepisuje sa v jednotlivych iteraciach)
  eps - kriterium pre ukoncenie iteracii: norm(Av-ps)<=eps

>>
```

Úlohy pre vás:

- Vypočítajte riešenie na prvej časovej vrstve a vložte ho do matice s riešením (ako začiatočnú aproximáciu riešenia môžete použiť hodnoty z predchádzajúcej časovej vrstvy, zvoľte si kritérium na zastavenie iterácií).
- Transformujte získané riešenie na riešenie Black-Scholesovej rovnice.
- Naprogramujte cyklus, v ktorom sa vypočíta riešenie na každej časovej vrstve.