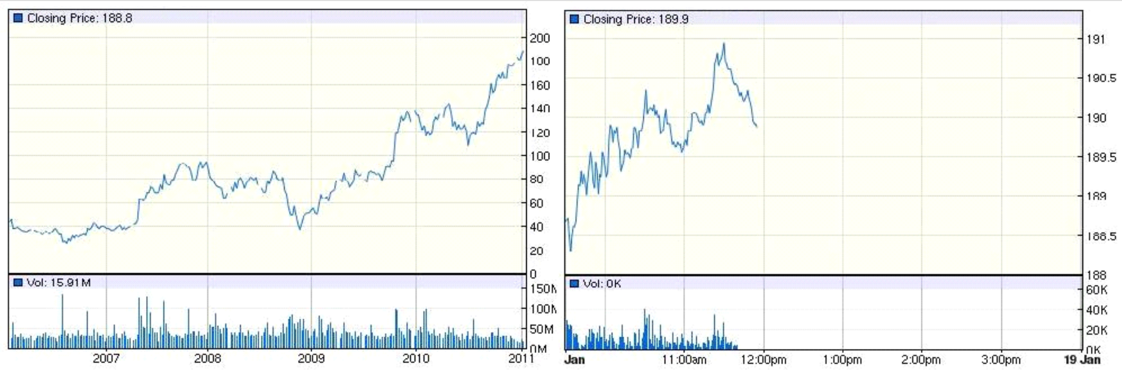
Náhodné procesy, modelovanie cien akcií

:: Stochastický vývoj finančných veličín ::

- Z priebehov cien akcií (ako aj iných finančných veličín - úrokových mier, výmenných kurzov, ...) vidíme, že ich priebeh sa nedá popísať deterministickou funkciou. Preto sa na ich modelovanie používajú náhodné procesy.

- Vľavo: trend (vývoj ceny počas piatich rokov), vpravo: fluktuácie (vývoj ceny počas niekoľkých hodín):



Zdroj: http://finance.google.com

:: Wienerov proces a Brownov pohyb ::

- Základným náhodným procesom, z ktorého sú ostatné odvodené, je **Wienerov proces**. Pripomeňme si jeho definíciu:
  *Náhodný proces $\{W(t), t \geq 0\}$ sa nazýva **Wienerov proces**, ak*
  - *prírastky $W(t+\Delta t)$ - $W(t)$ majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a s disperziou Δt,*
  - *pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ sú prírastky $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa predchádzajúceho bodu,*
  - *$W(0)=0$,*
  - *trajektórie sú spojité.*

  Ďalej bude *w* všade označovať Wienerov proces.

- **Ako získame realizáciu Wienerovho procesu?**
  - Budeme generovať aproximáciu - hodnoty v diskrétnych bodoch typu (čas, hodnota), ktoré pospájame.
  - Hodnoty budú v bodoch $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$, kde Δt je dostatočne malý časový krok.
  - Hodnota v čase 0 je 0.
  - Prírastok na intervale $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ je náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a varianciou Δt.

  V Matlabe:

```
%------------------------------
% SIMULACIA WIENEROVHO PROCESU
%------------------------------

T=1;         % do casu T
dt=0.001;    % casovy krok dt
t=(0:dt:T);  % vektor casov, v ktorych generujeme hodnoty procesu
n=length(t);

w(1)=0;              % Wienerov proces zacina z nuly
for i=1:n-1          % prvu hodnotu mame, potrebujeme zvysnych n-1
  dw=sqrt(dt)*randn; % prirastok dw; randn ~ N(0,1) => dw ~ N(0,dt)
  w(i+1)=w(i)+dw;    % nova hodnota = povodna + prirastok
end;

plot(t,w);  % vykreslime priebeh
```

  Poznamenajme, že na zrýchlenie výpočtov v Matlabe sa dajú využiť funkcie pre prácu s vektormi (namiesto cyklov):

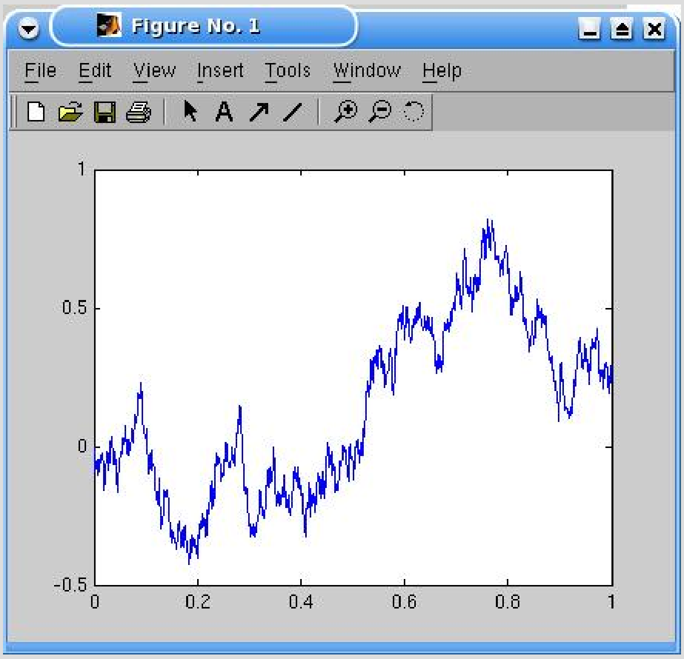
```
%-------------------------------------------
% RYCHLEJSIA SIMULACIA WIENEROVHO PROCESU
%-------------------------------------------

T=1;        % do casu T
dt=0.001;   % casovy krok dt
t=(0:dt:T); % vektor casov, v ktorych generujeme hodnoty procesu
n=length(t);

dw=sqrt(dt)*randn(n-1,1); % vektor prirastkov - nezavisle N(0,dt)
w=[0;cumsum(dw)];         % zaciname z nuly, dalej kumulativne sucty dw

plot(t,w);  % vykreslime priebeh
```

Ukážka výstupu:



- Ak k násobku Wienerovho procesu pridáme lineárny trend:

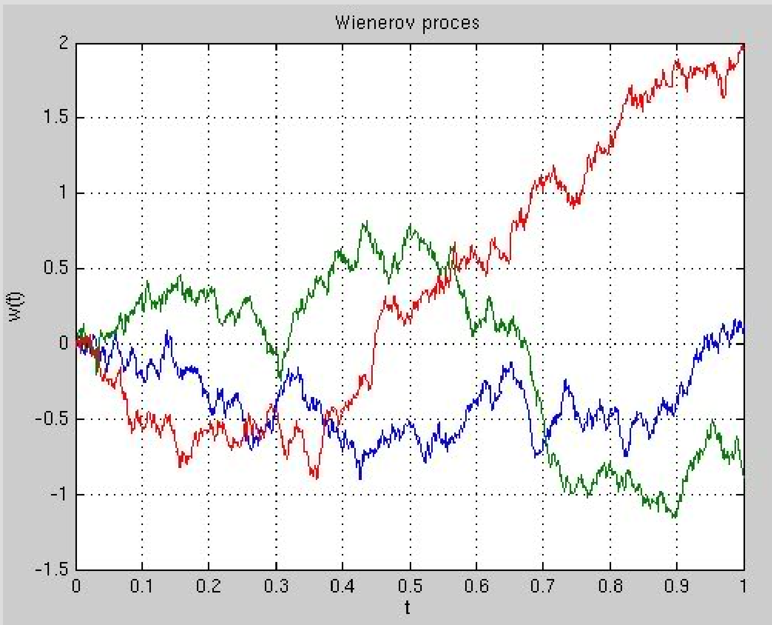
$$x(t) = \mu t + \sigma w(t)$$

  dostávame proces, ktorý sa nazýva **Brownov pohyb.**

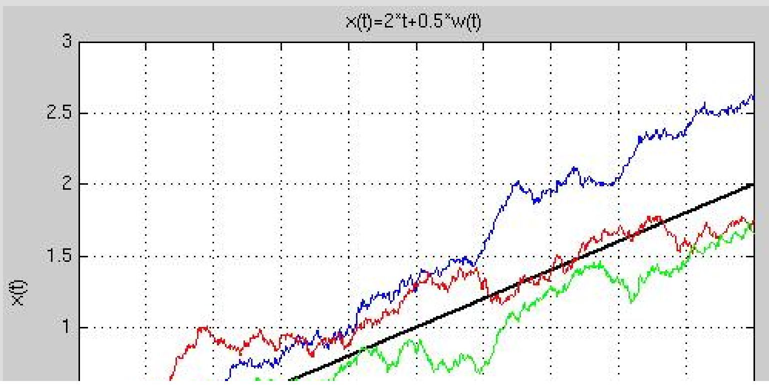
  Ak je parameter σ nulový, grafom je priamka. Pre nenulovú hodnotu σ sa k tomuto lineárnemu trendu pridávajú náhodné fluktuácie.

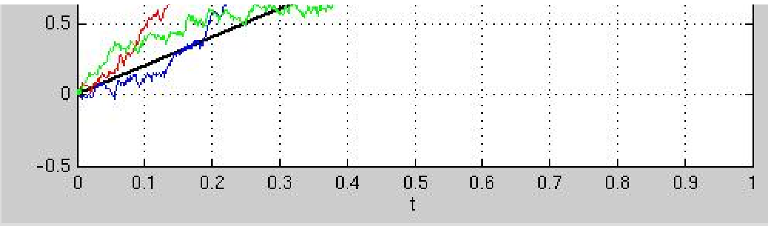
:: Cvičenia (1) ::

1. Nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií Wienerovho procesu.
   Ukážka výstupu:



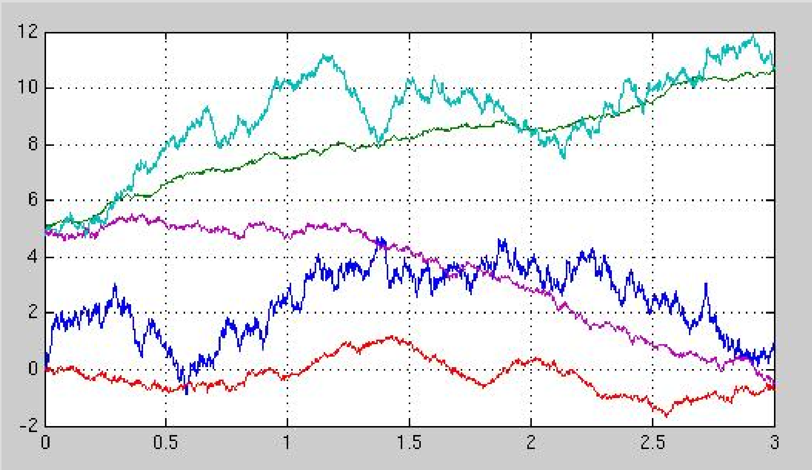
2. Nakreslite do jedného grafu niekoľko realizácií Brownovho pohybu so zvolenými parametrami. Do toho istého grafu zakreslite strednú hodnotu tohto procesu.
   Ukážka výstupu:





3. Priraďte procesy
   - $x_1(t)=w(t)$
   - $x_2(t)=3*w(t)$
   - $x_3(t)=5+2*t+w(t)$
   - $x_4(t)=5+2*t+0.5*w(t)$
   - $x_5(t)=5-3*t+w(t)$

   k ich realizáciám na grafe:



4. Definujme proces $m(t)=max(w(s), s\leq t)$, t. j. maximum Wienerovho procesu na intervale [0,t]. Zobrazte do jedného grafu trajektóriu Wienerovho procesu a trajektóriu procesu *m(t)* (počítaného z tejto realizácie Wienerovho procesu).
   Ukážka výstupu:

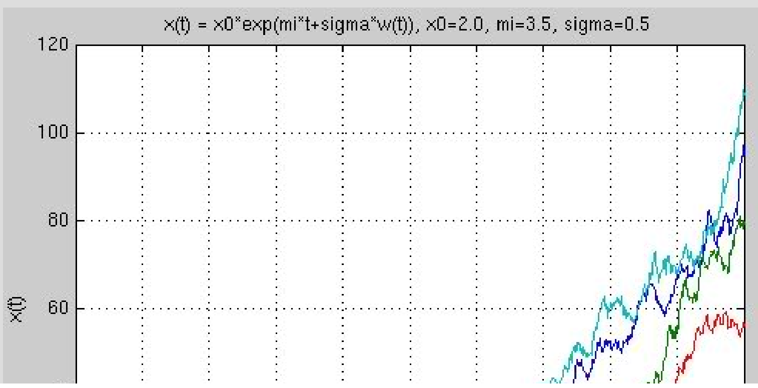
:: Geometrický Brownov pohyb ::

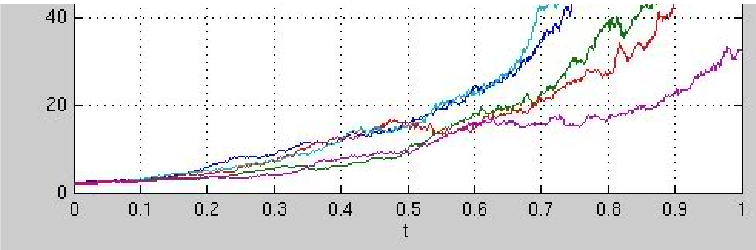
- **Geometrický Brownov pohyb** je proces definovaný vzťahom

$$x(t) = x_0 \, e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

  pričom x_0 predstavuje hodnotu procesu v čase 0.

- Ukážka trajektórií geometrického Brownovho pohybu:





:: Modelovanie cien akcií pomocou geometrického Brownovho pohybu ::

- Cenu akcie *S* modelujeme geometrickým Brownovym pohybom:
$$S(t) = S_0\, e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

- Na výpočet výnosov sa používa veličina
$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}},$$
pričom posledná aproximácia vyplýva z toho, že
$$\ln(1+x) \approx x \text{ pre } x \approx 0$$

- Ak sa cena akcie *S* riadi geometrickým Brownovym pohybom, tak pre výnosy dostávame
$$v_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t)) \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$
teda výnosy sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením a uvedenými parametrami.

- **Ako získať parametre geometrického Brownovho pohybu z dát** - odhadom parametrov normálneho rozdelenia z výnosov:
  - Zo súboru goog.txt načítame dáta do Matlabu. Ide o denné dáta cien akcie firmy Google v rokoch 2009 a 2010, na začiatku súboru sú najstaršie dáta.

```
s=load('goog.txt');
dt=1/252;             % denne data, cas sa v modeli pocita v rokoch
```

  Priebeh ceny je nasledovný:

  - Definujeme výnosy - napríklad takto:

```
n=length(s);
for i=1:n-1
  v(i)=log(s(i+1)/s(i));
end;
% alebo vektorovo namiesto cyklu:
% v=log(s(2:n)./s(1:n-1));
```

  - Vieme, že tieto výnosy majú normálne rozdelenie. Ďalej vieme, že strednú hodnotu normálneho rozdelenia odhadujeme aritmetickým priemerom a disperziu výberovou disperziou. Vypočítame teda priemer a výberovú disperziu vektora v - budú to odhady veličín $\mu\Delta t$ a $\sigma^2\Delta t$

```
miDelta=mean(v);   % odhad mi*dt
s2Delta=var(v);    % odhad (sigma^2)*dt
```

  - Nakoniec vypočítame odhady samotných parametrov μ a σ^2:

```
mi=miDelta/dt;              % odhad parametra mi
sigma=sqrt(s2Delta/dt);    % odhad parametra sigma
```

  - Dostaneme:

```
>> mi
```

```
mi =

    0.3225

>> sigma

sigma =

    0.2877
```

:: Black-Scholesov model a Monte Carlo simulácie ::

- Z finančnej matematiky poznáte **Black-Scholesov model** a oceňovanie derivátov **pomocou rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti a strednej hodnoty**:
  - Predpokladajme, že cena akcie *S* sa vyvíja podľa geometricého Brownovho pohybu $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma W(t)}$ a že derivát má v čase expirácie *T* hodnotu $\bar{V}(S)$.
  - Treba si uvedomiť, že dnešná cena derivátu nie je stredná hodnota $\bar{V}(S)$ (resp. odúročená stredná hodnota, ak úroková miera nie je nulová). Derivát nie je jednoduchá "stávka", v ktorej dostaneme $\bar{V}(S)$, pričom *S* má určité pravdepodobnostné rozdelenie. Máme totiž možnosť obchodovať aj so samotnou akciou.
  - Dá sa dokázať, že cena derivátu je odúročená stredná hodnota, ale pri inej - tzv. rizikovo neutrálnej - pravdepodobnostnej miere. Cena akcie sa aj pri tejto pravdepodobnosti riadi geometrickým Brownovym pohybom, ale namiesto driftu μ máme $r - (\sigma^2/2)$, kde *r* je bezriziková úroková miera. Volatilita σ zostáva rovnaká.
  - To znamená, že pre cenu $V(S,t)$ platí:
  $$V(S,t) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}} \left[\bar{V}(S)\right]$$
  kde *Q* je spomínaná rizikovo neutrálna miera.

- Vieme, že **strednú hodnotu náhodnej premennej môžeme aproximovať aritmetickým priemerov jej realizácií**. Ak teda spravíme *N* simulácií vývoja ceny akcie a označíme S_i cenu akcie v čase expirácie v i-tej simulácii, tak môžeme aproximovať strednú hodnotu $E^{\mathbb{Q}}\left[\bar{V}(S)\right]$:
$$E^{\mathbb{Q}}\left[\bar{V}(S)\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{V}(S_i)$$
a takisto cenu derivatu:
$$V(S,t) \approx e^{-r(T-t)} \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{V}(S_i)\right]$$
Táto aproximácia konverguje k presnej cene derivátu, ak *N* ide do nekonečna.

- Vyskúšajme si to **na príklade európskej call opcie**.
  - Zadajme parametre akcie a opcie, ktorú budeme oceňovať:

```
% PARAMETRE
mi=0.35;     % parameter z geom. BP
sigma=0.30;  % parameter z geom. BP
s0=150;      % aktualna cena akcie

E=175;       % expiracna cena opcie
tau=1/2;     % tau = T-t = cas do expiracie, t.j. pol roka

r=0.01       % bezrizikova urokova miera, t.j. 1 percento
```

  - V čase expirácie teda máme:

```
Z=randn;                      % N(0,1)
wT=sqrt(tau)*Z;               % Wienerov proces v case T

% v RN miere, preto "r-0.5*sigma^2" namiesto "mi"
sT=s0*exp((r-0.5*sigma^2)*tau+sigma*wT);  % akcia v case T

vT=max(0,sT-E);               % opcia v case T
```

  - Toto budeme opakovať v cykle a budeme počítať priebežnú hodnotu aproximácie ceny opcie:

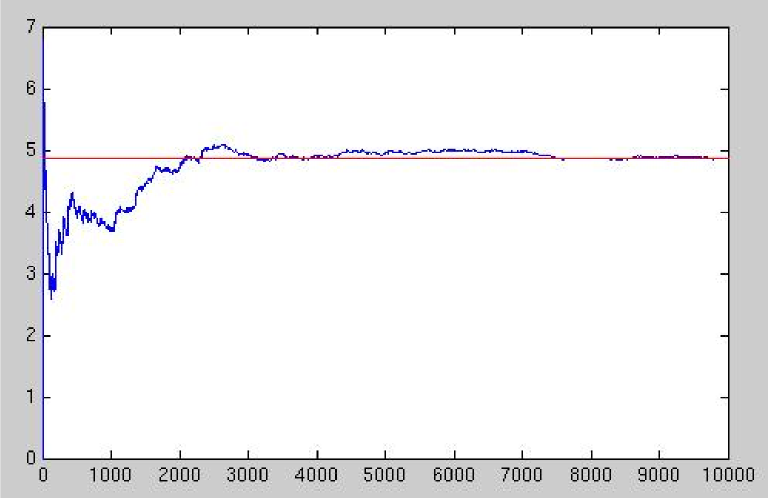
```
N=10000;           % pocet simulacii
sum=0;            % pomocna premenna na vypocet priemeru

for i=1:N
  % ------------------------
  % z predchadzajuceho bodu:
  Z=randn;
  wT=sqrt(tau)*Z;
  sT=s0*exp((r-0.5*sigma^2)*tau+sigma*wT);
  vT=max(0,sT-E);
  % ------------------------
  sum=sum+vT;
  priemer=sum/i;                 % priemer z prvych i hodnot
  cena(i)=exp(-r*tau)*priemer;  % aprox. na zaklade prvych i hodnot
end;
```

  - Na oceňovanie európskej call opcie je známy explicitný vzorec, získané aproximácie teda môžeme porovnať s presnou hodnotou. Cena tejto konkrétnej call opcie je 4,8572 USD.

```
plot(cena); hold on;
vPresne=4.8572;
plot(vPresne*ones(1,N),'r');
```

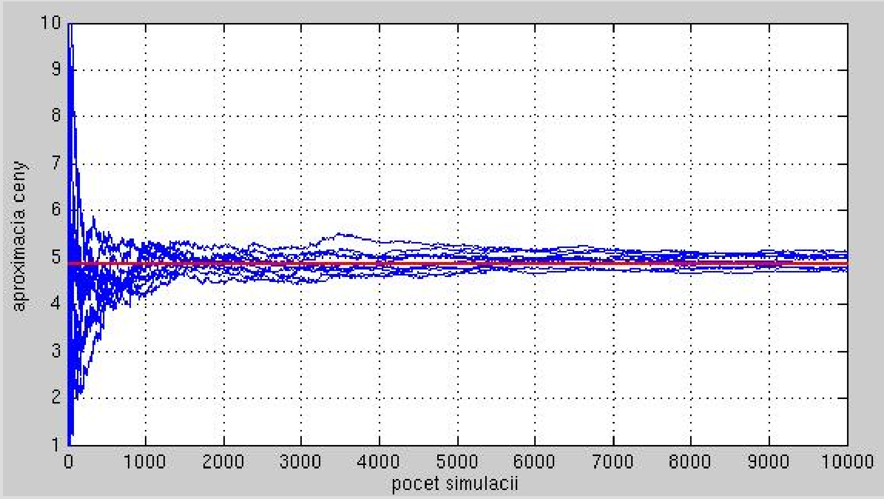
Ukážka výstupu:



:: Cvičenie (2) ::

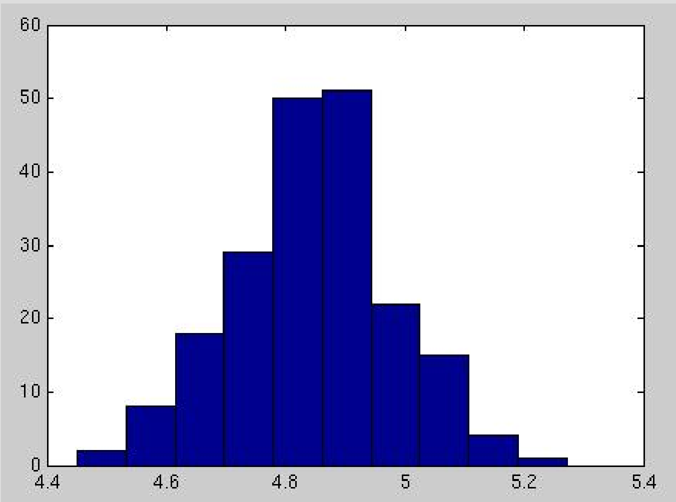
1. Zopakujte simulácie viackrát a zakreslite ich do jedného grafu.

   Ukážka výstupu (zmenšili sme interval zobrazený na y-ovej osi, aby vynikla konvergencia, a nie veľké odchýlky na začiatku):



2. Ako presné sú hodnoty získané z 10000 simulácií? Nakreslite ich histogram.

   Ukážka výstupu (200x sme zopakovali výpočet s N=10000):



   Vyskúšajte pre iné N.

Poznámka:
Existujú metódy na zmenšenie variancie odhadu ceny pomocou simulácií. Jednoduchý úvod do týchto metód je v knihe *[R. Seydel: Tools for computational finance. Springer 2006]* v kapitole 3.5.4 - *Variance reduction*. Podrobnejšie sa touto témou zaoberá kniha *[P. Glassermann: Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer, 2004]* v kapitole 4 (*Variance reduction techniques*).

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. **Prírastky a ich rozdelenie**
   a. Definujme proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, ktorého prírastky $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ majú strednú hodnotu $(\Delta t)^2$ a disperziu Δt. Ďalej od procesu $Y(t)$ požadujeme, aby pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ boli prírastky $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné. Ukážte, že tieto predpoklady vedú k sporu, t. j. takýto proces neexistuje.
   b. Definujme proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, ktorého prírastky $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ majú nulovú strednú hodnotu a konštantnú nenulovú disperziu. Ďalej od procesu $Y(t)$ požadujeme, aby pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ boli prírastky $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné. Ukážte, že tieto predpoklady vedú k sporu, t. j. takýto proces neexistuje.
   c. Definujme proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, ktorého prírastky $Y(t+\Delta t) - Y(t)$ majú nulovú strednú hodnotou a disperziu $(\Delta t)^2$. Ďalej od procesu $Y(t)$ požadujeme, aby pre každé delenie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ boli prírastky $Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$ nezávislé náhodné premenné. Ukážte, že tieto predpoklady vedú k sporu, t. j. takýto proces neexistuje.

   Návod: Prednáška, slajdy *Additive property of the Brownian motion - mean* a *Additive property of the Brownian motion - variance*.

2. Z prednášky:

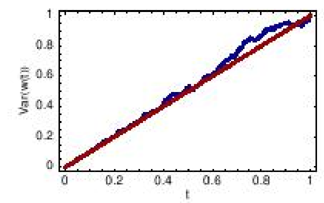
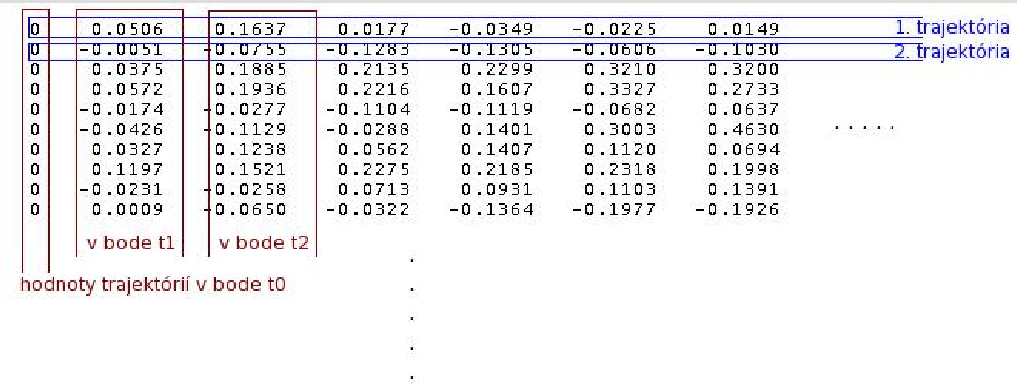


Figure: Time dependence of the variance $Var(W(t))$ for 1000 random realizations of a Wiener process $\{W(t), t \geq 0\}$.

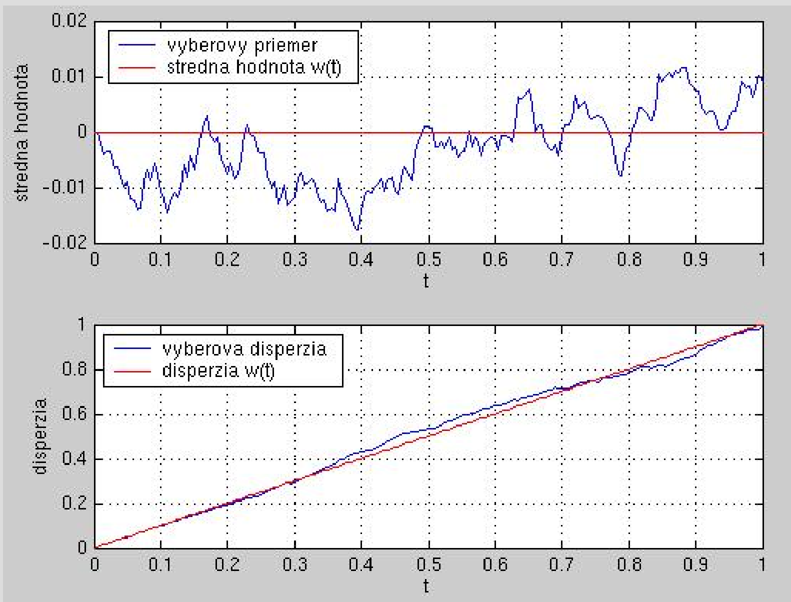
Spravíme podobný obrázok pre varianciu a tiež pre strednú hodnotu:

- Zvoľte si delenie intervalu [0,1] a vytvorte maticu, v ktorej budú hodnoty 1000 trajektórií Wienerovho procesu v týchto bodoch.
  Ukážka výstupu:

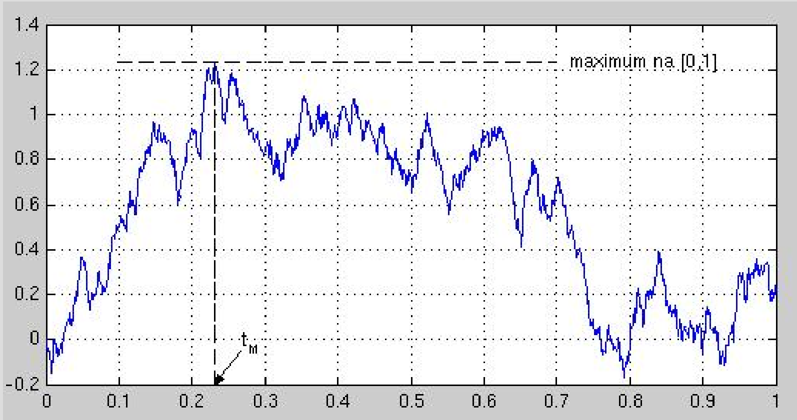


0	0.0506	0.1637	0.0177	-0.0349	-0.0225	0.0149	1. trajektória
0	-0.0051	-0.0755	-0.1283	-0.1305	-0.0606	-0.1030	2. trajektória
0	0.0375	0.1885	0.2135	0.2299	0.3210	0.3200	
0	0.0572	0.1936	0.2216	0.1607	0.3327	0.2733	
0	-0.0174	-0.0277	-0.1104	-0.1119	-0.0682	0.0637	
0	-0.0426	-0.1129	-0.0288	0.1401	0.3003	0.4630	.....
0	0.0327	0.1238	0.0562	0.1407	0.1120	0.0694	
0	0.1197	0.1521	0.2275	0.2185	0.2318	0.1998	
0	-0.0231	-0.0258	0.0713	0.0931	0.1103	0.1391	
0	0.0009	-0.0650	-0.0322	-0.1364	-0.1977	-0.1926	
hodnoty trajektórií v bode t0	v bode t1	v bode t2	. . . . .				

- Vypočítajte výberový priemer a disperziu trajektórií v každom čase a zakreslite ich do grafu spolu s presnými hodnotami strednej hodnoty a disperzie.
  Ukážka výstupu:

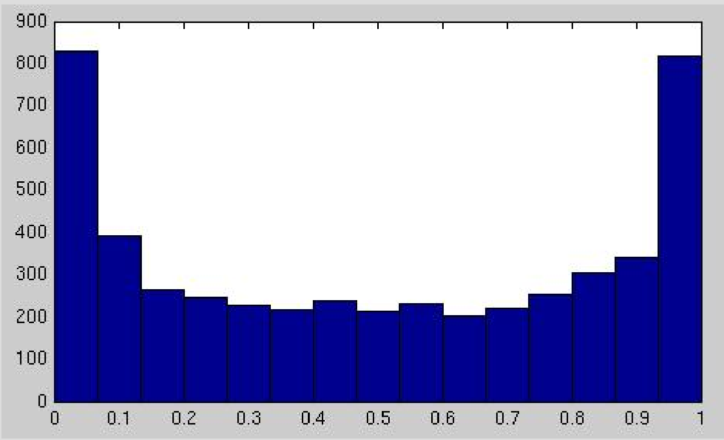


3. Označme t_M čas, v ktorom nadobudol Wienerov proces maximum na časovom intervale [0,1]:

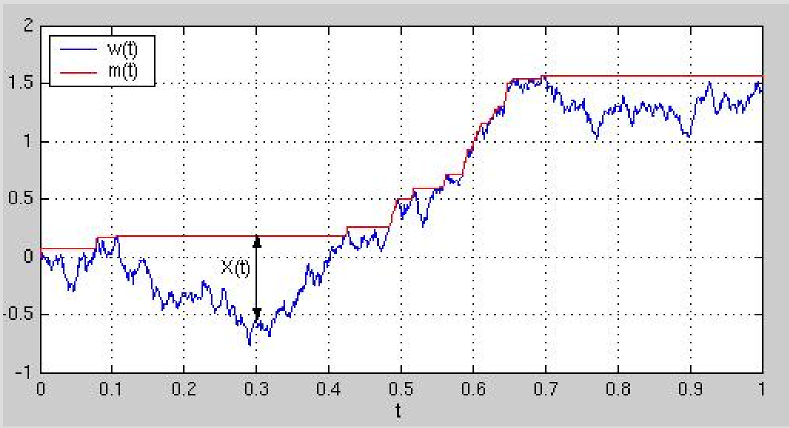


Spravte simulácie a zobrazte histogram náhodnej premennej t_M.

Ukážka výstupu:



4. V cvičení (1)/4 sme definovali proces *m*, najvyššiu hodnotu Wienerovho procesu, ktorú doteraz dosiahol. Definujte teraz proces *X*, ktorý vyjadruje vzdialenosť aktuálnej hodnoty Wienerovho procesu od doteraz dosiahnutého maxima:



Doplňte do takéhoto grafu priebeh procesu *X*.

5. Pripomeňme si definíciu a základné vlastnosti **lognormálneho rozdelenia**:
   - *Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie, ak jej logaritmus* ln(*X*) *má normálne rozdelenie* $N(\mu, \sigma^2)$.
   - *Hustota náhodnej premennej X s lognormálnym rozdelením je*

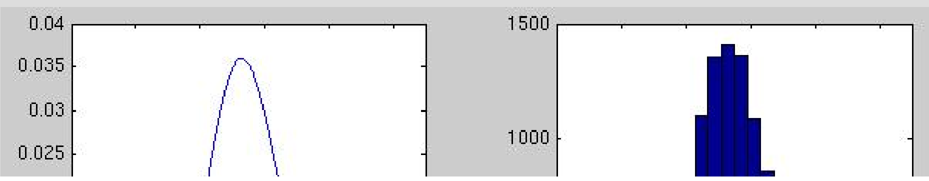
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pre } x > 0 \quad \text{(inak je nulová)}$$

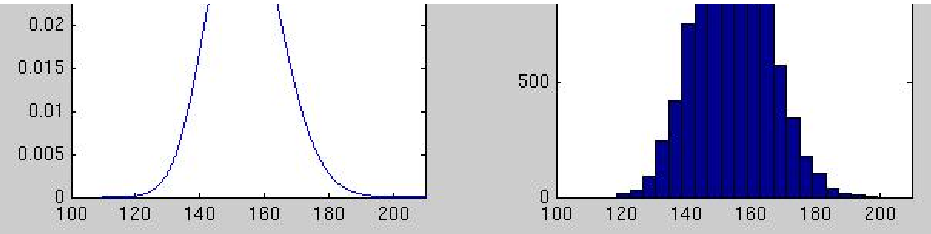
   - *Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej X s lognormálnym rozdelením je*

$$EX = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \ DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

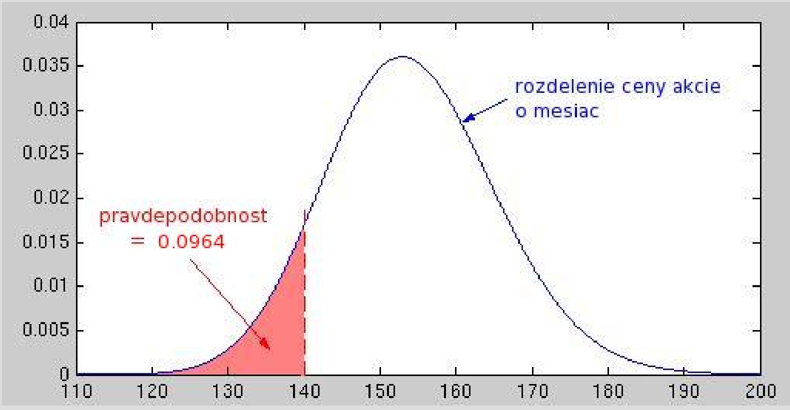
Predpokladajme, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom s parametrami μ = 0.30, σ = 0.25 a že dnešná cena akcie je 150 USD.

a. Nakreslite hustotu rozdelenia ceny akcie o mesiac. Ako kontrolu porovnajte s histogramom vygenerovaných hodnôt ceny akcie v tomto čase.

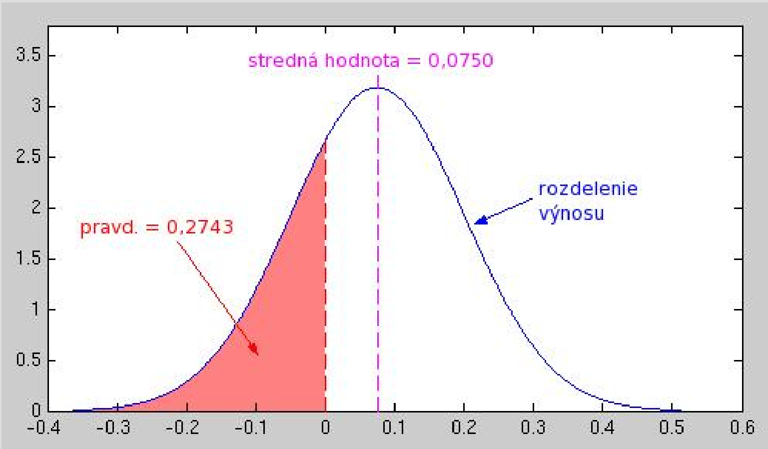




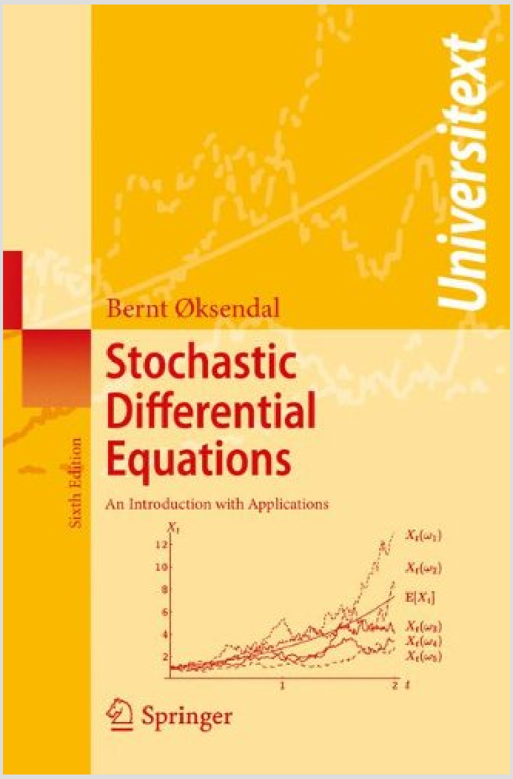
b. Aká je pravdepodobnosť, že o mesiac bude cena akcie menšia ako 140 USD?



c. Nakreslite hustotu rozdelenia štvrťročného výnosu. Aká je stredná hodnota tohto výnosu? Aká je pravdepodobnosť, že bude záporný?



6. Čo si myslíte, čo je na obrázku na obale tejto knihy?



Vytvorte podobný obrázok.

Cvičenia z finančných derivátov, 2011
Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/