Modelovanie úrokových mier - Vašíčkov model

:: Jednofaktorový short rate model ::

- Short rate - okamžitá úroková miera, aproximuje sa úrokovou mierou s krátkoui splatnosťou
- Okamžitá úroková miera sa modeluje stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu(t,r)dt + \sigma(t,r)dw$$

  teda trend vo vývoji úrokovej miery + náhodné fluktuácie okolo trendu
- Jednofaktorový model - jedna stochastická diferenciálna rovnica pre r, t. j. jeden zdroj náhodnosti vo vývoji okamžitej úrokovej miery (jeden Wienerov proces).

:: Vašíčkov model :::

- Stochastická diferenciálna rovnica pre okamžitú úrokovú mieru:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$$

- Vlastnosť **mean-reversion** (priťahovanie k dlhodobej hodnote, k limitnej hodnote) - pre strednú hodnotu platí:

$$dE(r_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt$$

- Volatilita je konštantná, nezávisí teda od aktuálnej hodnoty úrokovej miery

:: Pravdepodobnostné rozdelenie úrokových mier ::

- Podmienené rozdelenie úrokovej miery, ak poznáme jej hodnotu r_0 v čase 0 je normálne rozdelenie $N(\bar{r}_t, \bar{\sigma}_t^2)$ s parametrami

$$\bar{r}_t = \theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}$$
$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$$

- Znalosť tohoto rozdelenia nám umožňuje:
  - Vygenerovať realizáciu procesu pre zadané parametre a začiatočnú hodnotu úrokovej miery.
  - Odhadovať parametre procesu z dát.
- Upozornenie: V literatúre sa požívajú rôzne označenia pre lineárnu funkciu driftu, treba si vždy pozrieť, s akým driftom sa pracuje.

::Cvičenia (1) ::

1. S procesom, ktorý sa vo Vašíčkovom modeli používa na modelovanie okamžitej úrokovej miery, sme sa už zaoberali na druhom cvičení. Zopakujme si závislosť priebehu procesu od parametrov podľa cvičenia(1)/1.

2. Takisto sme spomínali Vašíčkov model a pracovali sme s parametrami z článku *Athanasios Episcopos: Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 10 (2000) 199-212,* kde autor odhadoval modely úrokových mier. Všeobecný model, ktorým sa zaoberal, je

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma} dW_t$$

   Znovu zoberieme parametre pre Nový Zéland:

Table 3 (Continued)

Country	Model[b]	α	β	σ^2	γ
New Zealand	Unrestricted	0.0045	−0.048	0.0034	0.7815
		(2.1021)	(−2.1597)	(1.9698)	(7.2141)
	Vasicek	0.0046	−0.0487	0.0001	0
		(1.8959)	(−2.2584)	(8.3736)	
	CIR SR	0.0041	−0.0447	0.0010	0.5
		(2.026)	(−2.2176)	(8.5626)	
	BR-SC	0.005	−0.0536	0.0096	1
		(8.3841)	(−6.9255)	(13.5641)	
	CIR VR	0	0	0.1215	1.5
				(20.8112)	
	CEV	0	−0.0038	0.0030	0.7567
			(−0.4781)	(2.0131)	(7.1676)

   - Preveďte tieto parametre tak, aby sme proces mali vyjadrený ho pomocou parametrov κ, θ, σ. Zvoľte si začiatočnú hodnotu úrokovej miery a vygenerujte trajektóriu jej ďalšieho vývoja.

   - Na začiatku semestra sme tento proces simulovali Euler-Marujamouvou aproximáciou. Porovnajte rozdelenie úrokovej miery získané touto aproximáciou s presným rozdelením, ak je časový krok 1 deň, 1 týždeň, 1 mesiac. Ďalej budeme požívať presné rozdelenie.

- Predpokladajte, že dnešná hodnota úrokovej miery je 4.5 percenta. Aká je stredná hodnota úrokovej miery o týždeň, o mesiac a o rok? Zostrojte pre tieto úrokové miery intervalové odhady (stredná hodnota +/- 2*štandardná odchýlka).

- Aké je limitné rozdelenie úrokovej miery. Nakreslite graf hustoty tohto limitného rozdelenia. Doplňte do grafu hustoty rozdelenia úrokovej miery o mesiac, o rok, ... - tak, aby ste videli konvergenciu týchto hustôt k limitnej hustote.

- Jednou z nevýhod Vašíčkovho modelu je možnosť záporných úrokových mier. Vypočítajte pravdepodobnosť zápornej úrokovej miery v nasledovných prípadoch:
  - limitné rozdelenie úrokovej miery
  - úroková miera o mesiac, ak jej dnešná hodnota je 5 percent.
  - úroková miera o mesiac, ak jej dnešná hodnota je pol percenta.
  - úroková miera o týždeň, ak jej dnešná hodnota je 5 percent.
  - úroková miera o týždeň, ak jej dnešná hodnota je pol percenta.

- Nájdite príklad takých parametrov, aby predchádzajúce pravdepodobnosti záporných úrokových mier boli väčšie (pri takýchto pravdepodobnostiach zrejme nie je model vhodný).

:: Metóda maximálnej vierohodnosti na odhadovanie parametrov ::

- Podmienené rozdelenie úrokových mier je normálne, preto funkcia vierohodnostije súčin hustôt normálnych rozdelení. Odhady parametrov sa dajú explicitne vyjadriť.

- *Damiano Brigo, Fabio Mercurio: Interest Rate Models - Theory and Practice. Second Edition. Springer, 2007. Kapitola 3.1.2, str. 61-62:*

We conclude the section by presenting the maximum-likelihood estimator for the Vasicek model. Rewrite the dynamics (3.11) as

$$dr(t) = [b - ar(t)]dt + \sigma dW^0(t), \tag{3.12}$$

with b and a suitable constants. As usual, by integration we obtain, between two any instants s and t,

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW^0(u). \tag{3.13}$$

As noticed earlier, conditional on $\mathcal{F}_s$, the variable $r(t)$ is normally distributed with mean $r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)})$ and variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})$.

It is natural to estimate the following functions of the parameters: $\beta := b/a$, $\alpha := e^{-a\delta}$ and $V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})$, where δ denotes the time-step of the observed proxies $r_0, r_1, \ldots, r_n$ of r (typically $\delta = 1$ day). The maximum likelihood estimators for α, β and V^2 are easily derived as

$$\widehat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n r_{i-1}\right)^2}, \tag{3.14}$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1}]}{n(1 - \widehat{\alpha})}, \tag{3.15}$$

$$\widehat{V^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[r_i - \widehat{\alpha} r_{i-1} - \widehat{\beta}(1 - \widehat{\alpha})\right]^2. \tag{3.16}$$

- Môže sa vám hodiť nasledujúci skript, v ktorom sú prepísané tieto vzorce pre odhady: [vasicekMLE.m]

:: Cvičenia (2) ::

1. Ako z týchto odhadov dostaneme odhady parametrov κ, θ, σ? Odvoďte príslušnú transformáciu.

:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

- Stiahnite si dáta úrokovej miery (napr. 3M treasury bills, Euribor s krátkou dobou splatnosti a pod.) zo zvoleného časového intervalu. Zobrazte ich vývoj. Zdroje dát - napríklad:
  - Federal Reserve Statistical Release
  - Euribor.org
- Odhadnite parametre Vašíčkovho modelu a transformujte ich na parametre κ, θ, σ.
- Pre zvolenú začiatočnú hodnotu úrokovej miery nakreslite do jedného grafu strednú hodnotu jej ďalšieho vývoja, intervaly

spoľahlivosti a niekoľko simulácií.

- Nájdite limitné rozdelenie úrokovej miery.

Cvičenia z finančných derivátov, 2011
Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/
