Stochastické diferenciálne rovnice

:: Stochastické diferenciálne rovnice ::

- Nenáhodná funkcia môže byť zadaná ako riešenie **obyčajnej diferenciálnej rovnice** - máme daný vzťah medzi diferenciálom funkcie a diferenciálom času. Napr. *dx(t)=x(t) dt*, spolu so začiatočnou podmienkou *x(0)* určuje (deterministickú, t.j. nenáhodnú) funkciu *x(t)*.

- Analógia pre náhodné funkcie - vzťah medzi diferenciálom funkcie, diferenciálom času a diferenciálom Wienerovho procesu *dw*. Takto dostávame **stochastické diferenciálne rovnice**. Ich riešením je náhodná funkcia. Napríklad:
    - *dx=2dt+3dw*, začiatočná podmienka *x(0)=0* - toto je Brownov pohyb: *x(t)=2t+3w(t)*
    - *dx=2dt+3dw*, začiatočná podmienka *x(0)=1* - posunutý Brownov pohyb, začína z jednotky: *x(t)=1+2t+3w(t)*
    - *dx=10[1-x(t)] dt + 0.25 dw(t), x(0)=0.5* - tiež sa dá zapísať explicitne, ale toto vyjadrenie je komplikovanejšie. Dobrú predstavu o priebehu takéhoto procesu však dostaneme pomocou simulácií jeho trajektórií.

- Pozrime sa teda na proces tvaru

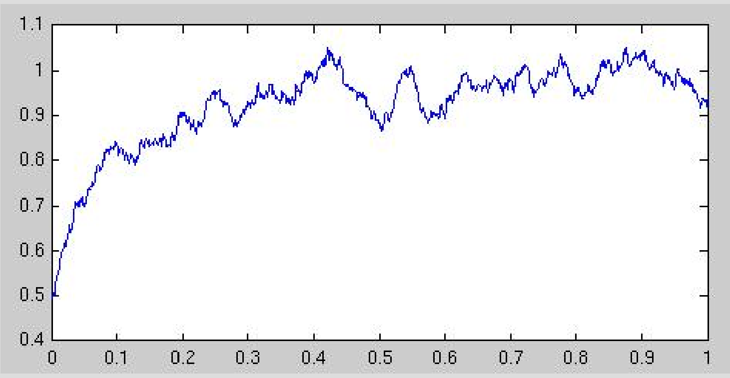
$$dx(t) = \kappa(\theta - x(t))dt + \sigma dw(t)$$

kde κ, θ, σ sú kladné konštanty. Takýto proces sa nazýva **Ornstein-Uhlenbeckov proces**.

Najjednoduchším pôsobom, ako získať aproximáciu riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice je nahradiť diferenciály diferenciami (analógia Eulerovej metódy pre obyčajné diferenciálne rovnice, pri stochastických diferenciálnych rovniciach sa nazýva **Euler-Marujamova metóda**):

```
kappa=10; theta=1; sigma=0.25; % parametre procesu
x0=0.5 % zaciatocna hodnota

dt=0.001; % casovy krok
n=1000;   % pocet krokov

% Eulerova schema
x(1)=x0;
for i=1:n
    dw=sqrt(dt)*randn;
    dx=kappa*(theta-x(i))*dt+sigma*dw;
    x(i+1)=x(i)+dx;
end;

t=0:dt:n*dt; % cas

plot(t,x)
```

Ukážka:

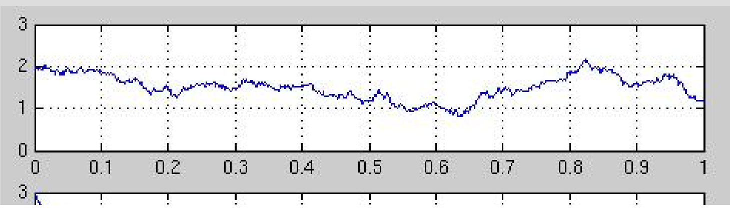


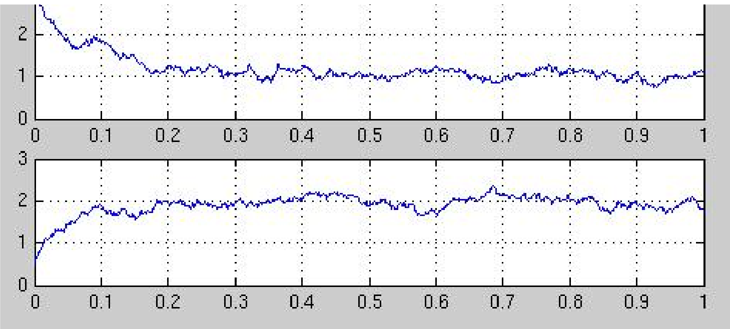
- Terminológia: Deterministická časť procesu (pri časovom diferenciáli *dt*) sa nazýva **drift**, stochastická časť (pri diferenciáli Wienerovho procesu *dw*) sa nazýva **volatilita**.

:: Cvičenia (1) ::

1. Zakreslite niekoľko realizácií Orstein-Uhlenbeckovho procesu so zvolenými parametrami.. Všímajte si, ako závisí typický priebeh procesu od parametrov.

   Priraďte nasledujúce hodnoty parametrov k ich trajektóriám:
    - κ = 20, θ = 1, σ = 1
    - κ = 2, θ = 1, σ = 1
    - κ = 20, θ = 2, σ = 1





2. Ornstein-Uhlenbeckov proces sa používa napríklad pri modelovaní úrokových mier. **Vašíčkov model** predpokladá, že okamžitá úroková miera (prakticky - úroková miera na krátky čas) sa riadi Ornstein-Uhlenbeckovym procesom.

   V článku *Athanasios Episcopos: Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 10 (2000) 199-212* autor odhadoval modely úrokových mier. Všeobecný model, ktorým sa zaoberal, je

   $$\mathrm{d}r_t = (\alpha + \beta r_t)\mathrm{d}t + \sigma r_t^{\gamma}\mathrm{d}W_t$$

   Špeciálnou voľbou niektorých parametrov dostávame konkrétne modely, jedným z nich je aj Vašíčkov model. Výsledky pre Nový Zéland (odhady parametrov pre mesačné dáta od apríla 1986 do apríla 1998 sú v nasledujúcej tabuľke:

   Table 3 (Continued)

Country	Model[b]	α	β	σ^2	γ
New Zealand	Unrestricted	0.0045	−0.048	0.0034	0.7815
		(2.1021)	(−2.1597)	(1.9698)	(7.2141)
	Vasicek	0.0046	−0.0487	0.0001	0
		(1.8959)	(−2.2584)	(8.3736)	
	CIR SR	0.0041	−0.0447	0.0010	0.5
		(2.026)	(−2.2176)	(8.5626)	
	BR-SC	0.005	−0.0536	0.0096	1
		(8.3841)	(−6.9255)	(13.5641)	
	CIR VR	0	0	0.1215	1.5
				(20.8112)	
	CEV	0	−0.0038	0.0030	0.7567
			(−0.4781)	(2.0131)	(7.1676)

   Zdroj: (Episcopos, 1998)

   - Proces je v inom tvare, ako sme definovali Ornstein-Uhlenbeckov proces. Vyjadrite ho pomocou parametrov κ, θ, σ. K akej hodnote sa dlhodobo približuje úroková miera?
   - Vygenerujte priebeh vývoja úrokovej miery na základe odhadnutých parametrov Vašíčkovho modelu. Zakreslite do jedného grafu niekoľko možných priebehov, štartujúcich z rovnakej začiatočnej hodnoty.

:: Itóova lema ::

Kijoši Itó (1915 - 2008), zakladateľ teórie stochastických diferenciálnych rovníc.

- Životopis na stránke Inamori Foundation
- Životopis na "The MacTutor History of Mathematics archive"

- Na predchádzajúcom cvičení sme mali predpis procesu (geometrický Brownov pohyb - cena akcie) *x(t)* zadaný explicitne v tvare *x(t)*=.... Na začiatku tohto cvičenia sma pracovali s iným zápisom - pomocou diferenciálov sme definovali Ornestein-Uhlenbeckov proces. Teraz si ukážeme ich vzájomný vzťah.

- Pre nenáhodnú funkciu vieme derivovaním napísať obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa. Napr. pre $x(t)=t^2$ platí $dx(t) = 2\,t\,dt$. Naopak, pre zadanú obyčajnú diferenciálnu rovnicu vieme v niektorých prípadoch napísať explicitné riešenie.

- Ako derivovať náhodnú funkciu? Uvažujme funkciu $f = f(t,w)$, kde *w* je Wienerov proces a počítajme rozvoj:

  $$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial w}dw + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(dw)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial w}(dt)(dw) + \dots$$

  Tu si treba uvedomiť, že $(dw)^2 \sim dt$, a teda máme:

  toto je vlastne $\boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}dt}$

  $$df = \boxed{\frac{\partial f}{\partial t}dt} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial w}dw} + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2} + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(dw)^2} + \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial w}(dt)(dw) + \dots}$$

  všetky tieto členy majú

všetky tieto členy majú
rád vyšší ako *dt, dw*
a tie do diferenciálu nepratria

To znamená, že

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial w}dw + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}dt$$

- Vo všeobecnosti dostávame takýmto postupom **Itóovu lemu**:

  Nech x je proces daný rovnicou

  $$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw$$

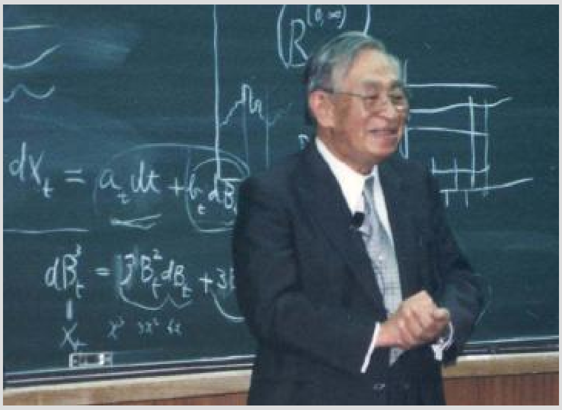
  a f(t,x) je hladká funkcia. Potom f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

  $$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw$$

- Ukážky použitia Itóovej lemy pri oceňovaní derivátov:
  - Vývoj ceny akcie je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou pre *S*. Cena derivátu *V* závisí od času *t* a od ceny akcie *S*. Itóova lema dáva predpis pre stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa cena derivátu *V(t,S)*. Táto rovnica sa využije pri odvodzovaní ceny derivátu.
  - Vývoj okamžitej úrokovej miery *r* je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou (napríklad Ornstein-Uhlenbeckov proces vo Vašičkovom modeli). Cena derivátu *V* závisí od času *t* a od okamžitej úrokovej miery *r*. Ďalej je postup analogický: Itóova lema dáva predpis pre stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa cena derivátu *V(t,r)*. Táto rovnica sa využije pri odvodzovaní ceny derivátu.

::Cvičenia (2) ::

1. Dopočítajte diferenciál $d(B^3)$ z výpočtu z obrázku, kde *B* je Wienerov proces.



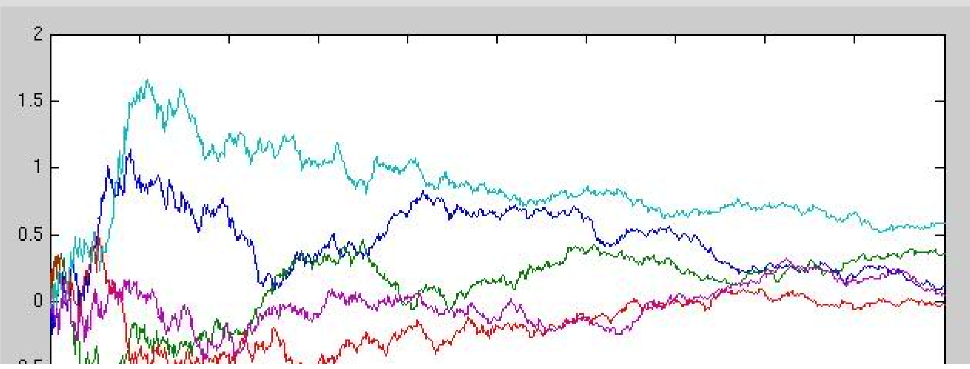
2. Vypočítajte diferenciály nasledovných funkcií:
   - $x_1(t)=2+2t+\exp(w(t))$,
   - $x_2(t)=3\exp(2 + w(t))$,
   - $x_3(t)=-2\exp(-10\, t + 2\, w(t))$.

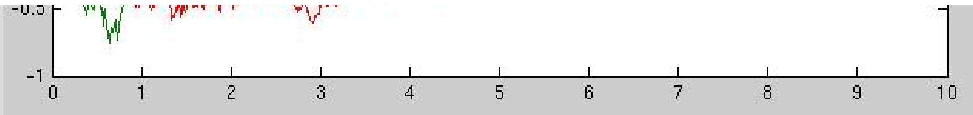
3. Na predchádzajúcom cvičení sme uvažovali vývoj pre cenu akcie v reálnej miere $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$ a v rizikovo neutrálnej miere $S(t) = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w(t)}$. Napíšte ich diferenciál.
4. Cena akcie je daná stochastickou diferenciálnou rovnicou $dS = \mu S dt + \sigma S dw$. Vyjadrite ju v explicitnom tvare - t.j. vyriešte túto stochastickú diferenciálnu rovnicu.

5. Uvažujme proces

   $$X(t) = \frac{w(t)}{1+t}$$

   Na obrázku je niekoľko realizácií tohto procesu.





- Vygenerujte niekoľko trajektórií a zobrazte podobný obrázok.
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu procesu v čase t. V ktorom čase je disperzia maximálna?
- Dokážte, že tento proces vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dX(t) = -\frac{1}{1+t}X(t)dt + \frac{1}{1+t}dw(t)$$

:: Ďalšie príklady na precvičnie ::

1. Nech náhodný proces *S(t)* vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ a *n* je prirodzené číslo. Dokážte, že aj proces $S(t)^n$ sa riadi geometrickým Brownovym pohybom.

2. Ukážte, že proces $x(t) = \sin(a + w(t))$ kde $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ je daná konštanta, vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici
$$dx(t) = -\frac{1}{2}x(t)dt + \sqrt{1 - x(t)^2}dw(t),$$
ktorá má byť splnená pre časy *t* vyhovujúce nerovnosti
$$t < T = \inf\{s : a + w(s) \notin [-\pi/2, \pi/2]\}$$
Kde ste pri dôkaze využili toto ohraničenie na čas *t*?

3. Nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice
$$dx(t) = x(t)dw(t), \quad x(0) = x_0$$
Návod: Je to špeciálny prípad geometrického Brownovho pohybu.

4. Ukážte, že funkcia
$$x(t) = \left(x_0^{1/3} + \frac{1}{3}w(t)\right)^3$$
je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice
$$dx(t) = \frac{1}{3}x(t)^{1/3}dt + x(t)^{2/3}dw(t), \quad x(0) = x_0$$
Nájdite ďalšie riešenie tejto rovnice v prípade, že *x(0)=0*.

5. Ukážte, že funkcia
$$x(t) = \mathrm{tg}(t + w(t))$$
je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice
$$dx(t) = (1 + x(t))(1 + x(t)^2)dt + (1 + x(t)^2)dw(t)$$

6. Použitím substitúcie
$$x(t) = e^{y(t)}$$
nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice
$$dy(t) = -\frac{1}{2}e^{-2y(t)}dt + e^{-y(t)}dw(t), \quad y(0) = y_0$$

Cvičenia z finančných derivátov, 2011
Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/