

Black-Scholesov vzorec, implikovaná volatilita, delta opcie

:: Cena európskej call a put opcie ::

• Call opcia:

```
function [v]=call(S,E,r,sigma,tau)
d1=(log(S/E)+(r+0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
d2=(log(S/E)+(r-0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
v=S*normcdf(d1)-E*exp(-r*tau)*normcdf(d2)
```

• Príklad:

Úroková miera je jedno percento. Aká je cena call opcie s expiračnou cenou 120 USD a s expiračným časom pol roka, ak dnešná cena akcie je 100 USD a volatilita akcie σ je 0.3?

```
>> call(100,120,0.01,0.3,0.5)
ans =
    2.6056
```

• Put opcia: dá sa oceniť napríklad pomocou put-call parity:

- o Uvažujme portfólio zložené z mínus jednej call opcie, jednej put opcie (na tú istú akciu, s rovnakou expiračnou cenou E a rovnakým expiračným časom) a jednej príslušnej akcie.
 - o V čase expirácie je hodnota portfólia E.
 - o Preto ak do expirácie zostáva čas τ , hodnota portfólia je $Ee^{-r\tau}$ - cenu callu poznáme, takže môžeme vyjadriť cenu putu.
- Z linearity Black-Scholesovej rovnice vyplýva, že ak je koncová podmienka derivátu lineárnou kombináciou call a put opcií, rovnakou lineárnou kombináciou cien call a put opcií dostaneme cenu tohto derivátu.

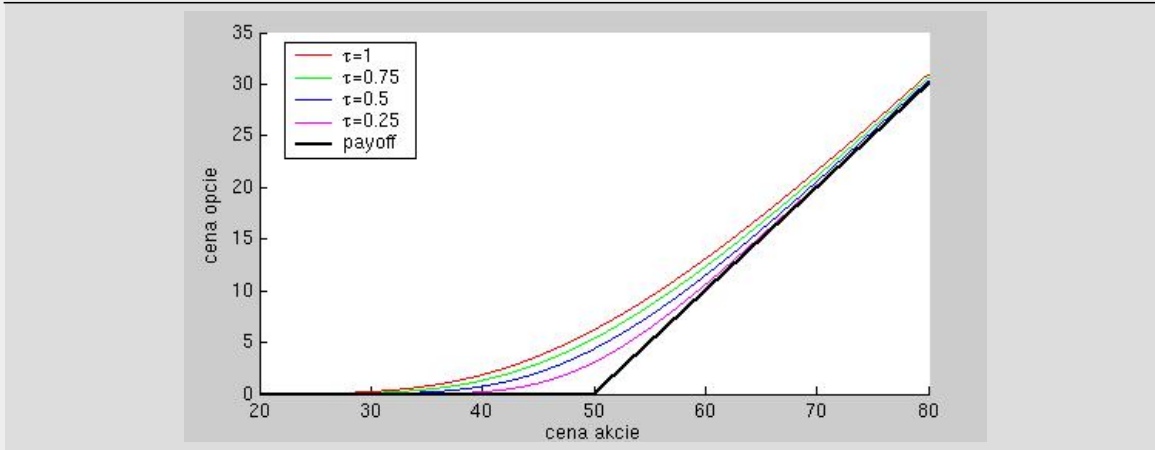
:: Cvičenia (1) ::

1. Vypočítajte cenu európskej call opcie s expiráciou o pol roka, ktorej expiračná cena je 50 USD. Dnešná cena akcie je 41 USD, jej volatilita je 0.3. Úroková miera je pol percenta.
2. Upravte funkciu `call` tak, aby ste mohli pracovať s vektorovými argumentmi a kresliť napríklad takéto grafy:

```
S=0:0.1:100;
plot(S,call(S,50,0.01,0.25,1));
```

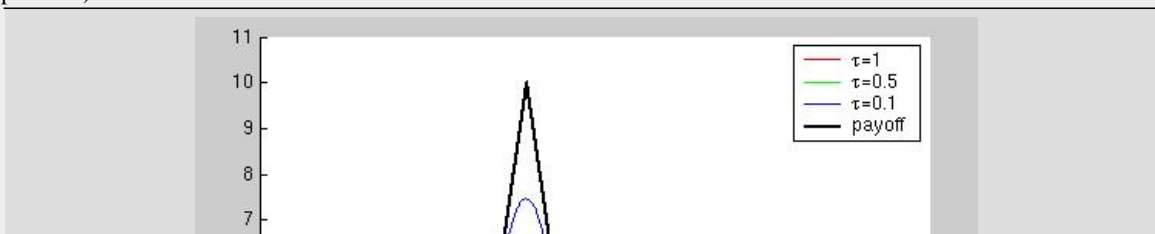
Nakreslite graf s cenou akcie na x-ovej osi, na ktorom bude payoff call opcie a jej ceny pre niekoľko časov do expirácie.

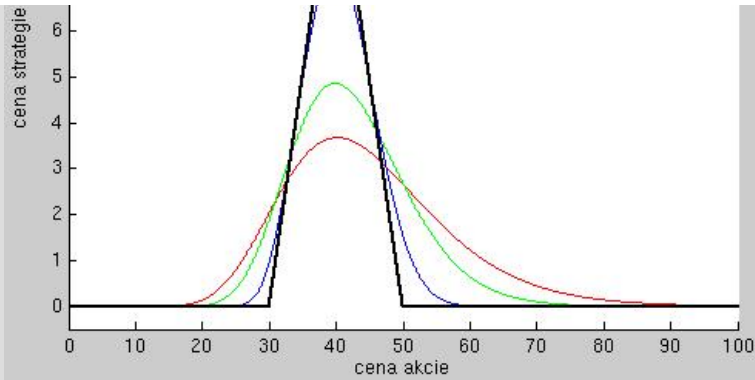
Ukážka výstupu:



3. Napíšte funkciu, ktorá počíta cenu putu. Vypočítajte cenu put opcie s expiračnou cenou 105 USD a s expiračným časom pol roka, ak dnešná cena akcie je 100 USD a volatilita akcie σ je 0.3.
4. Zostrojte stratégiu typu butterfly pre zvolené parametre. Znovu nakreslite graf s cenou akcie na x-ovej osi, na ktorom bude payoff stratégie a jej ceny pre niekoľko časov do expirácie.

Ukážka výstupu pre nasledovné dáta: expiračné ceny 30, 40, 50 USD; volatilita akcie 0,25; úroková miera 0,01 (t.j. 1 percento).





5. Analýza reálnych cien opcii.

- o V súbore [ibm.txt](#) si stiahnite denné dáta cien akcie firmy IBM a odhadnite z nich parameter σ geometrického Brownovho pohybu - tzv. **historickú volatilitu**.
- o Túto odhadnutú volatilitu budeme teraz dosadzovať do Black-Scholesovho vzorca. Uvažujme nasledujúce dáta zo 7. marca 2011 pre ceny akcie a call opcii:

International Business Machines Corp. (IBM) On Mar 7: **159.93** 0.00 (

Options

View By Expiration: Mar 11 | **Apr 11** | Jul 11 | Oct 11 | Jan 12 | Jan 13

Call Options		Expire at close Friday, April 15, 2011					
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
105.00	IBM110416C00105000	59.00	0.00	N/A	N/A	1	1
110.00	IBM110416C00110000	50.30	0.00	N/A	N/A	36	50
115.00	IBM110416C00115000	45.35	0.00	N/A	N/A	13	102
120.00	IBM110416C00120000	40.35	0.00	N/A	N/A	33	35
125.00	IBM110416C00125000	35.40	0.00	N/A	N/A	45	104
130.00	IBM110416C00130000	29.60	0.00	N/A	N/A	13	76
135.00	IBM110416C00135000	26.40	0.00	N/A	N/A	1	130
140.00	IBM110416C00140000	20.45	0.00	N/A	N/A	19	306
145.00	IBM110416C00145000	15.80	0.00	N/A	N/A	256	2,475
150.00	IBM110416C00150000	11.50	0.00	N/A	N/A	264	5,325
155.00	IBM110416C00155000	7.55	0.00	N/A	N/A	533	5,536
160.00	IBM110416C00160000	4.15	0.00	N/A	N/A	671	6,200
165.00	IBM110416C00165000	1.95	0.00	N/A	N/A	2,464	6,303
170.00	IBM110416C00170000	0.78	0.00	N/A	N/A	3,846	4,883
175.00	IBM110416C00175000	0.28	0.00	N/A	N/A	500	3,626
180.00	IBM110416C00180000	0.10	0.00	N/A	N/A	177	1,862
185.00	IBM110416C00185000	0.05	0.00	N/A	N/A	196	463
190.00	IBM110416C00190000	0.02	0.00	N/A	N/A	13	166

- o Za bezrizikóvú úrokovú mieru zoberieme výnos 3-mesačných Treasury bonds:

US Treasury Bonds Rates

Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.09	0.09	0.11	0.13
6 Month	0.14	0.13	0.15	0.16
2 Year	0.73	0.69	0.64	0.74
3 Year	1.23	1.20	1.12	1.22
5 Year	2.22	2.19	2.10	2.25
10 Year	3.53	3.51	3.39	3.63
30 Year	4.64	4.62	4.48	4.73

- o Na výpočet času zostávajúceho do expirácie môžete využiť takýto výpočet (zohľadňuje soboty a nedele, prípadné sviatky treba odpočítať samostatne):

```
% pocet pracovnych dni medzi x,y vo formate 'mm/dd/yy'
x=datenum('03/01/11');
y=datenum('03/31/11');

pocDni=0;
for i=x+1:y
    den=weekday(i); % 1=nedela, 2=pondelok, ...
    if (den>1)&&(den<7) pocDni=pocDni+1; end;
end;
```

- o Vypočítajte Black-Scholesove ceny týchto opcií a porovnajte ich s reálnymi trhovými cenami. Aké sú rozdiely v centoch? Aké sú relatívne rozdiely v percentách?

:: Implikovaná volatilita ::

- Implikovaná volatilita je taká hodnota volatility sigma, ktorej dosadením do Black-Scholesovho vzorca dostaneme trhovú cenu opcie.
- Závislosť ceny call opcie od volatility:
 - o Cena call opcie je rastúcou funkciou volatility.
 - o Ak volatilita konverguje k nule, limita ceny call opcie je $\max(0, S - E \cdot \exp(-r \tau))$.
 - o Ak, naopak, volatilita ide do nekonečna, limita ceny opcie je aktuálna cena akcie S.
 - o Ak je teda trhovú cenu call opcie z intervalu $(\max(0, S - E \cdot \exp(-r \tau)), S)$, tak implikovaná volatilita existuje a je jednoznačne určená.
- Je viacero možností, ako implikovanú volatilitu prakticky vypočítať, tu je jedna z nich:

Definujeme funkciu [rozdiel.m](#), ktorej parametrom je sigma a vracia rozdiel medzi skutočnou a Black-Scholesovou cenou. Ostatné parametre výpočtu sú definované ako globálne premenné:

```
Command Window
>> help rozdiel

vstup: sigma = volatilita (rocna, ako desatinne cislo, t.j. 0.3 = 30%)
vystup: rozdiel ceny europskej call opcie
        podľa Black-Scholesovho vzorca a realnej ceny

--- Globálne premenné: ---
s = cena akcie
e = expiracna cena
tau = expiracia (v rokoch)
r = uroková miera (p.a., ako desatinne cislo, t.j. 0.01 = 1%)
v = cena opcie
```

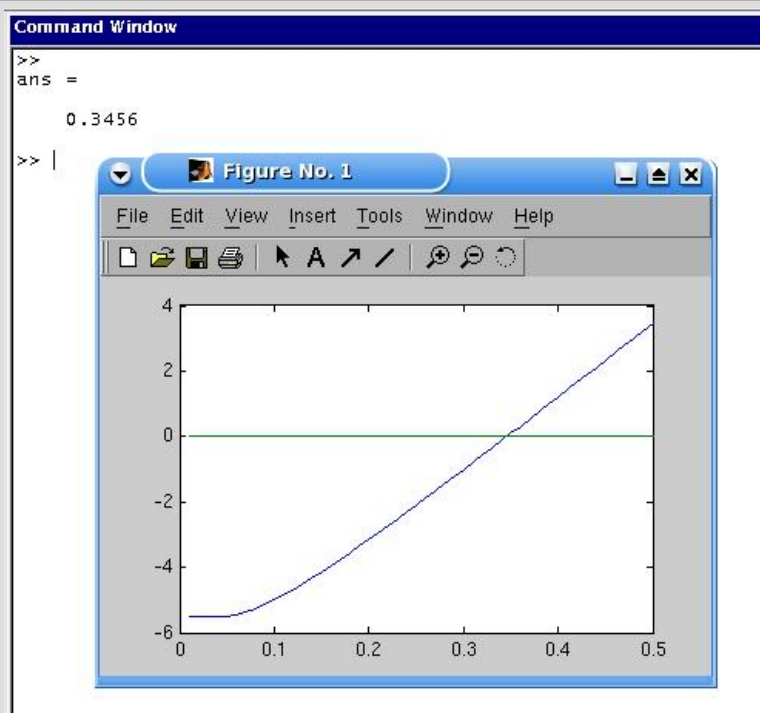
Príklad použitia:

```
global s;
global e;
global tau;
global r;
global v;

s=85.2;
e=80;
r=0.01;
tau=0.5;
v=11.12;

% hladame nulovy bod tejto funkcie
sig=0.01:0.01:0.5;
plot(sig,rozdiel(sig),sig,zeros(1,length(sig)));
fzero(@rozdiel,0.4);
```

Výstup:

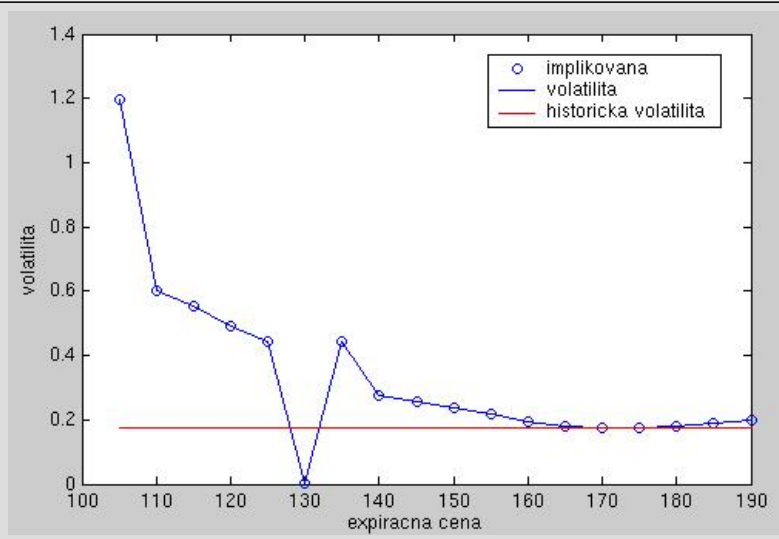


:: Implikovaná volatilita ::

1. Vyčítajte implikovanú volatilitu pre opcie na akcie IBM z cvičenia (1)/5. Zakreslite ich do grafu v závislosti od expiračnej ceny

a pridajte do grafu historickú volatilitu.

Výstup:



:: Závislosť ceny call opcie od ceny akcie ::

- Na základe grafu môžeme vysloviť niekoľko hypotéz:
 - V je rastúca funkcia S
 - Ak $S \rightarrow 0$, tak $V \rightarrow 0$.
 - Ak $S \rightarrow \infty$, tak sa cena opcie približuje k payoff diagramu, takže by mohlo platiť

$$V \sim S - E \text{ pre } S \rightarrow \infty,$$
$$\text{t.j. } \frac{V}{S - E} \rightarrow 1 \text{ pre } S \rightarrow \infty$$

- Interpretácia:
 - Ak sa cena akcie blíži k nule, znižuje sa pravdepodobnosť, že opciu uplatníme - opcia sa stáva bezcennou.
 - Ak $S \rightarrow \infty$, tak
 - Opcia sa zrejme bude realizovať, teda v čase expirácie dostaneme akciu a zaplatíme E, po odúčtovaní tejto platby na súčasnú hodnotu vyslovíme hypotézu
- $$V \sim S - Ee^{-rt} \text{ pre } S \rightarrow \infty$$
- Taká istá úvaha ako predtým, len dodáme, že pre $S \rightarrow \infty$ je E (aj súčasná hodnota) zanedbateľná, takže očakávame
- $$V \sim S \text{ pre } S \rightarrow \infty$$
- Ak je vyššia súčasná cena akcie, zvyšuje sa pravdepodobnosť, že ju uplatníme a dosiahneme zisk. Rovnako sa zvyšuje pravdepodobnosť vysokých cien akcie, a teda vysokého zisku z realizácie opcie.
- Matematicky:
 - Vypočítame limitu V pre $S \rightarrow 0$ a ukážeme, že sa rovná 0.
 - Platia všetky tri navrhnuté aproximácie pre $S \rightarrow \infty$ (vypočítame limity). Graficky sa presvedčíme, že sa líšia kvalitou aproximácie pre konečné hodnoty S.
 - Derivácia V podľa S je $N(d_1)$, čo je vždy kladné číslo. Teda V je rastúcou funkciou premennou S.

:: Delta opcie ::

- Derivácia ceny opcie podľa ceny akcie, ktorú sme počítali, má väčší význam, ako ukázať rastúcu závislosť. **Pri odvodení Black-Scholesovho vzorca vystupuje ako počet akcií, ktoré kúpime pri hedžovaní jednej predanej opcie a nazýva sa delta opcie.**

:: Cvičenia (3) ::

- Nakreslite graf závislosti delty call opcie od aktuálnej ceny akcie. Nakreslite do jedného grafu deltu pre rôzne časy do expirácie. V čom sa líšia?
- Na základe hedžovania predanej opcie vysvetlite priebeh grafu z predchádzajúcej úlohy - znamienko, monotónnosť, priebeh pre tau blízke nule.

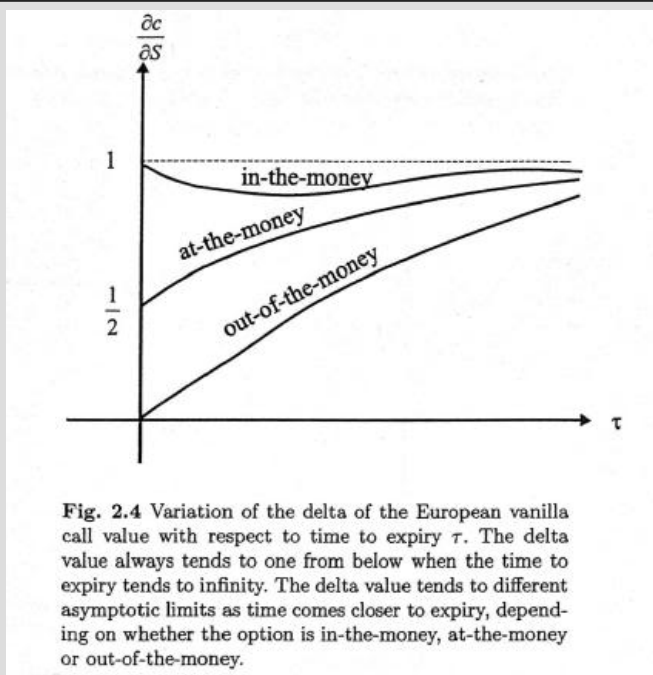
:: ďalšie príklady na precvičenie ::

- Vypočítajte hodnotu stratégie, ktorá pozostáva z kúpy call opcie s nízkou expiračnou cenou a predaja call opcie s vyššou expiračnou cenou s tou istou dobou splatnosti. Výpočet ceny stratégie realizujte pre nasledovné dáta: cena akcie 55 USD, volatilita akcie 0.4, úrok jeden a pol percenta, expiračná doba 3 mesiace, expiračné ceny sú 50 a 60 USD.
- Uvažujme call opciu na s expiračnou cenou 15 USD, ak dnešná cena akcie je 9 USD. Pre ktoré z nasledujúcich cien opcie -- 2 USD, 5 USD, 7 USD, 10 USD, 15 USD -- existuje implikovaná volatilita? Pre ktorú z nich je implikovaná volatilita najvyššia? Ako sa dá táto otázka zodpovedať bez výpočtu všetkých implikovaných volatilit?
- Implikovaná volatilita pre put opcie:** Pre aký interval cien put opcií existuje? Je v týchto prípadoch určená jednoznačne?

Zrealizujte výpočet implikovanej volatility pre konkrétnu put opciu.

4. **Delta pre put opcie.** Vypočítajte deltu put opcie. Nakreslite graf jej závislosti od aktuálnej ceny akcie. Vysvetlite priebeh tohto grafu - znamienko, monotónnosť, priebeh pre tau blízke nule.

5. Dokážte nasledovné tvrdenie o delte call opcie:



Zdroj: Y.Kwok: *Mathematical Methods for Financial Derivatives*.

6. V súbore [msft.txt](#) je vývoj cien akcie firmy MSFT a opcií na tieto akcie. Formát:

dátum a čas	bid, ask cena akcie	opcia: rok a mesiac expirácie, expiračná cena, typ opcie	bid, ask cena opcie
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 25.00 CALL	0.95 1.10
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 25.00 PUT	0.05 0.15
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 27.50 CALL	0.05 0.10
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 27.50 PUT	1.50 1.65
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 30.00 CALL	0 0.05
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 30.00 PUT	3.90 4.10
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 32.50 CALL	0 0.05
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 32.50 PUT	6.40 6.60
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 35.00 CALL	0 0.05
Mar 20 2003 09:59	25.94 25.95	03 Mar 35.00 PUT	8.90 9.10

Zvoľte si deň a načítajte dáta o vývoji akcie počas tohto dňa. Zvoľte si opciu a načítajte dáta o vývoji ceny tejto opcie v danom dni. V súbore [msft-call-apr-25.txt](#) sú tieto hodnoty pre call opciu s expiračnou cenou 25 USD a expiráciou v apríli (bid cena akcie, ask cena akcie, bid cena opcie, ask cena opcie).

- o Vypočítajte implikovanú volatilitu pre každú minútu. Budete potrebovať úrokovú mieru, dáta o úrokových mierach z 20. marca 2003 sú napr. na stránke <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/20030324/>. Zobrazte priebeh implikovanej volatility.
- o Vypočítajte pre každú minútu deltu opcie, pričom za volatilitu budete dosadzovať implikovanú volatilitu z danej minúty. Zobrazte priebeh delty.

Cvičenia z finančných derivátov, 2011
Beáta Stehliková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/>