

# Lelandov model (zahrnutie transakčných nákladov)

## :: Lelandov model (zahrnutie transakčných nákladov) ::

- Lelandov model (Hayne E. Leland: *Option Pricing and Replication with Transactions Costs*, 1985)
- Bid a ask cena akcie:  $S_{bid}$ ,  $S_{ask}$  - definujeme
  - $S = (S_{bid} + S_{ask})/2$
  - $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Transakčné náklady na jednu transakciu:  $(c/2)S$
- Aké by malo byť  $c$ ? Zrátajme si na ukážku, čomu sa rovná pre tieto akcie: (Ide o bid a ask ceny iba v jednom konkrétnom okamihu, pre presnejší odhad by sme potrebovali viac dát.)

| <b>Amazon.com, Inc.</b> (NasdaqGS: AMZN)             |                        |
|--|------------------------|
| <b>REAL-TIME 176.42 ↓ -3.59 (-1.99%) 10:02AM EDT</b> |                        |
| Last Trade:  | <b>178.76</b>          |
| Trade Time:  | <b>9:46AM EDT</b>      |
| Change:  | <b>↓ 1.25 (0.69%)</b>  |
| Prev Close:  | <b>180.01</b>          |
| Open:  | <b>178.04</b>          |
| Bid:   | <b>178.76 x 300</b>    |
| Ask:   | <b>178.84 x 100</b>    |
| 1y Target Est:                                       | <b>190.52</b>          |
| Day's Range:   | <b>177.05 - 178.91</b> |
| 52wk Range:  | <b>105.80 - 191.60</b> |
| Volume:  | <b>732,471</b>         |
| Avg Vol (3m):  | <b>5,399,260</b>       |
| Market Cap:  | <b>80.62B</b>          |
| P/E (ttm):   | <b>70.66</b>           |
| EPS (ttm):   | <b>2.53</b>            |
| Div & Yield:   | <b>N/A (N/A)</b>       |

| <b>Yahoo! Inc.</b> (NasdaqGS: YHOO)                 |                       |
|---|-----------------------|
| <b>REAL-TIME 16.15 ↓ -0.47 (-2.83%) 10:04AM EDT</b> |                       |
| Last Trade:   | <b>16.36</b>          |
| Trade Time:   | <b>9:48AM EDT</b>     |
| Change:   | <b>↓ 0.26 (1.56%)</b> |
| Prev Close:   | <b>16.62</b>          |
| Open:   | <b>16.34</b>          |
| Bid:  | <b>16.37 x 2000</b>   |
| Ask:  | <b>16.38 x 5000</b>   |
| 1y Target Est:                                      | <b>18.55</b>          |
| Day's Range:  | <b>16.21 - 16.40</b>  |
| 52wk Range:   | <b>12.94 - 18.68</b>  |
| Volume:   | <b>1,865,183</b>      |
| Avg Vol (3m):                                       | <b>23,054,300</b>     |
| Market Cap:   | <b>21.42B</b>         |
| P/E (ttm):  | <b>18.18</b>          |
| EPS (ttm):  | <b>0.90</b>           |
| Div & Yield:  | <b>N/A (N/A)</b>      |

| <b>Microsoft Corporation</b> (NasdaqGS: MSFT)       |                       |
|---|-----------------------|
| <b>REAL-TIME 24.94 ↓ -0.43 (-1.69%) 10:04AM EDT</b> |                       |
| Last Trade:   | <b>25.13</b>          |
| Trade Time:   | <b>9:48AM EDT</b>     |
| Change:   | <b>↓ 0.24 (0.94%)</b> |
| Prev Close:   | <b>25.37</b>          |
| Open:   | <b>25.08</b>          |
| Bid:  | <b>25.11 x 7300</b>   |
| Ask:  | <b>25.12 x 13000</b>  |
| 1y Target Est:                                      | <b>33.57</b>          |
| Day's Range:  | <b>25.01 - 25.16</b>  |
| 52wk Range:   | <b>22.73 - 31.58</b>  |
| Volume:   | <b>4,040,278</b>      |
| Avg Vol (3m):                                       | <b>59,064,700</b>     |
| Market Cap:   | <b>211.17B</b>        |
| P/E (ttm):  | <b>10.73</b>          |
| EPS (ttm):  | <b>2.34</b>           |
| Div & Yield:  | <b>0.64 (2.50%)</b>   |

### • PDR pre ceny derivátov:

- Replikačné portfólio v Black-Scholesovom modeli: 1 opcia,  $\delta$  akcií (podľa delta hedžingu) spojité obchodovanie.
- V prípade transakčných nákladov: 1 opcia,  $\delta$  akcií (podľa delta hedžingu), portfólio meníme v intervaloch dĺžky  $\Delta t$ , počet transakcií je  $|\Delta\delta|$
- Zmena hodnoty portfólia:

$$\Delta\pi = \Delta V + \delta\Delta S - \frac{c}{2}S|\Delta\delta|$$

- Na prednáške:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left( 1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

### • Pre call a put opciu:

- Definujeme Lelandovo číslo

$$Le = \frac{c}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\sigma\sqrt{\Delta t} \sqrt{\pi}$$

- o Pre Lelandovo číslo z intervalu (0,1) dostávame cenu call, resp. put opcie pomocou Black-Scholesovho vzorca s upravenou volatilitou:

$$\sigma_{TC}^2 = (1 - Le)\sigma^2$$

Dôkaz: dosadíme do rovnice, využijeme, že cena call a put opcie v Black-Scholesovom modeli je konvexná funkcia premennej S.

## :: Cvičenia (1) ::

1. Napište funkciu, ktorá počíta hodnotu Lelandovho čísla (v závislosti of volatility akcie, konštanty c, intervalu medzi dvoma zaisteniami portfólia). Napište funkciu, ktorá overí podmienku, že Lelandovo číslo je z intervalu (0,1). Ak je splnená, vypočíta hodnotu call a put opcie za prítomnosti transakčných nákladov (parametre: cena akcie, expiračná cena, volatilita, čas do expirácie, úroková miera, konštanta c, interval medzi dvoma zaisteniami portfólia).
2. Zvoľte si parametre akcie a opcie, a úrokovú mieru - vstupy potrebné do Lelandovho modelu. Aké časy medzi dvoma zmenami portfólia sú prípustné? Pre jeden z nich vypočítajte cenu opcie a porovnajte ju s Black-Scholesovou cenou.

## :: Modelovanie bid-ask spread pomocou Lelandovho modelu ::

- Cenu z predchádzajúceho odvodenia môžeme považovať za **ponuku na kúpu opcie**.
- Ak chceme odvodiť **ponuku na predaj**, uvažujeme portfólio, v ktorom dlhujeme jednu opciu. Toto portfólio hedžujeme. Rovnakým postupom dostaneme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(1 + \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Cenu call, resp. put opcie znovu dostaneme pomocou Black-Scholesovho vzorca, pričom upravená volatilita je:

$$\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$$

- To znamená, že upravené volatility sú:

$$\sigma^2(1 + Le) = \sigma_{ask}^2, \quad \sigma^2(1 - Le) = \sigma_{bid}^2$$

a rozdiel medzi ask a bid cenou je

$$V^{ec}(S, t; \sigma(1 + Le)^{\frac{1}{2}}) - V^{ec}(S, t; \sigma(1 - Le)^{\frac{1}{2}})$$

- Tieto výsledky nám umožňujú **odhadnúť parametre modelu z dát**:

1. Vypočítame implikované bid a ask volatility  $\sigma_{bid}$  a  $\sigma_{ask}$  z bid a ask ceny opcie:

$$V_{real}^{ask} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{ask}), \quad V_{real}^{bid} = V^{ec}(S_{real}, t; \sigma_{bid})$$

2. Riešením sústavy rovníc vypočítame parametre  $\sigma$  (implikovaná volatilita), Le:

$$\sigma^2(1 + Le) = \sigma_{ask}^2, \quad \sigma^2(1 - Le) = \sigma_{bid}^2$$

3. Z bid a ask ceny akcie vypočítame konštantu c z Lelandovho modelu.

4. Nakoniec vypočítame implikovaný čas medzi dvoma prerovnaniami portfólia pri hedžingu opcie:

$$\Delta t = \frac{2}{\pi} \frac{C^2}{\sigma^2 Le^2}$$

## :: Cvičenia (2) ::

1. Použite uvedený postup na odhad parametrov Lelandovho modelu pomocou niektorej z nasledovných call opcií (dáta sú zo 18. 4 2011|):

View By Expiration: Apr 11 | **May 11** | Jun 11 | Jul 11 | Oct 11 | Jan 12 | Jan 13

**Call Options** Expire at close Friday, May 20, 2011

| Strike | Symbol              | Last  | Chg    | Bid   | Ask   | Vol | Open Int |
|--------|---------------------|-------|--------|-------|-------|-----|----------|
| 120.00 | AMZN110521C00120000 | 57.95 | ↓ 5.95 | 57.25 | 58.00 | 10  | 17       |
| 130.00 | AMZN110521C00130000 | 48.05 | ↓ 2.50 | 48.45 | 48.75 | 10  | 45       |
| 135.00 | AMZN110521C00135000 | 43.10 | ↓ 8.00 | 43.55 | 43.85 | 10  | 12       |
| 140.00 | AMZN110521C00140000 | 38.20 | ↓ 2.30 | 38.65 | 38.95 | 10  | 41       |
| 145.00 | AMZN110521C00145000 | 35.55 | 0.00   | 33.10 | 33.50 | 3   | 141      |
| 150.00 | AMZN110521C00150000 | 28.55 | ↓ 2.15 | 29.15 | 29.40 | 11  | 323      |
| 155.00 | AMZN110521C00155000 | 23.22 | ↓ 3.13 | 24.60 | 24.80 | 2   | 209      |
| 160.00 | AMZN110521C00160000 | 19.15 | ↓ 2.35 | 20.25 | 20.45 | 1   | 729      |
| 165.00 | AMZN110521C00165000 | 16.25 | ↓ 1.15 | 16.25 | 16.35 | 42  | 425      |
| 170.00 | AMZN110521C00170000 | 11.60 | ↓ 1.90 | 11.85 | 12.00 | 7   | 862      |
| 175.00 | AMZN110521C00175000 | 9.37  | ↓ 0.88 | 9.25  | 9.45  | 248 | 2,130    |

|               |                     |             |               |      |      |     |       |
|---------------|---------------------|-------------|---------------|------|------|-----|-------|
| <b>180.00</b> | AMZN110521C00180000 | <b>6.80</b> | <b>↓ 0.55</b> | 6.70 | 6.85 | 266 | 3,538 |
| <b>185.00</b> | AMZN110521C00185000 | <b>4.50</b> | <b>↓ 0.65</b> | 4.55 | 4.65 | 137 | 4,534 |
| <b>190.00</b> | AMZN110521C00190000 | <b>3.00</b> | <b>↓ 0.45</b> | 2.98 | 3.05 | 37  | 4,578 |
| <b>195.00</b> | AMZN110521C00195000 | <b>1.90</b> | <b>↓ 0.24</b> | 1.92 | 1.94 | 83  | 6,428 |
| <b>200.00</b> | AMZN110521C00200000 | <b>1.20</b> | <b>↓ 0.21</b> | 1.20 | 1.23 | 50  | 1,903 |
| <b>205.00</b> | AMZN110521C00205000 | <b>0.76</b> | <b>↓ 0.13</b> | 0.74 | 0.77 | 86  | 1,385 |
| <b>210.00</b> | AMZN110521C00210000 | <b>0.54</b> | 0.00          | 0.46 | 0.49 | 463 | 1,357 |
| <b>215.00</b> | AMZN110521C00215000 | <b>0.37</b> | 0.00          | 0.27 | 0.32 | 629 | 902   |
| <b>220.00</b> | AMZN110521C00220000 | <b>0.19</b> | <b>↓ 0.05</b> | 0.19 | 0.25 | 3   | 453   |
| <b>225.00</b> | AMZN110521C00225000 | <b>0.17</b> | 0.00          | 0.14 | 0.24 | 153 | 1,166 |
| <b>230.00</b> | AMZN110521C00230000 | <b>0.15</b> | 0.00          | 0.08 | 0.19 | 35  | 294   |
| <b>235.00</b> | AMZN110521C00235000 | <b>0.07</b> | 0.00          | N/A  | 0.15 | 4   | 254   |
| <b>240.00</b> | AMZN110521C00240000 | <b>0.16</b> | 0.00          | N/A  | 0.13 | 3   | 3     |
| <b>245.00</b> | AMZN110521C00245000 | <b>0.12</b> | 0.00          | N/A  | 0.10 | 10  | 10    |

| Put Options   |                     |              |               |       |       |     |          | Expire at close Friday, May 20, 2011 |  |
|---------------|---------------------|--------------|---------------|-------|-------|-----|----------|--------------------------------------|--|
| Strike        | Symbol              | Last         | Chg           | Bid   | Ask   | Vol | Open Int |                                      |  |
| <b>95.00</b>  | AMZN110521P00095000 | <b>0.04</b>  | 0.00          | N/A   | 0.25  | 37  | 39       |                                      |  |
| <b>100.00</b> | AMZN110521P00100000 | <b>0.11</b>  | 0.00          | N/A   | 0.25  | 7   | 83       |                                      |  |
| <b>105.00</b> | AMZN110521P00105000 | <b>0.05</b>  | <b>↓ 0.05</b> | N/A   | 0.05  | 7   | 127      |                                      |  |
| <b>110.00</b> | AMZN110521P00110000 | <b>0.04</b>  | 0.00          | N/A   | 0.12  | 133 | 86       |                                      |  |
| <b>115.00</b> | AMZN110521P00115000 | <b>0.07</b>  | 0.00          | N/A   | 0.25  | 9   | 126      |                                      |  |
| <b>120.00</b> | AMZN110521P00120000 | <b>0.07</b>  | 0.00          | N/A   | 0.15  | 90  | 184      |                                      |  |
| <b>125.00</b> | AMZN110521P00125000 | <b>0.08</b>  | <b>↓ 0.01</b> | N/A   | 0.10  | 8   | 219      |                                      |  |
| <b>130.00</b> | AMZN110521P00130000 | <b>0.14</b>  | 0.00          | 0.11  | 0.14  | 60  | 871      |                                      |  |
| <b>135.00</b> | AMZN110521P00135000 | <b>0.19</b>  | <b>↓ 0.02</b> | 0.18  | 0.28  | 1   | 289      |                                      |  |
| <b>140.00</b> | AMZN110521P00140000 | <b>0.28</b>  | 0.00          | 0.30  | 0.36  | 24  | 936      |                                      |  |
| <b>145.00</b> | AMZN110521P00145000 | <b>0.51</b>  | <b>↑ 0.14</b> | 0.48  | 0.54  | 10  | 1,322    |                                      |  |
| <b>150.00</b> | AMZN110521P00150000 | <b>0.81</b>  | <b>↑ 0.14</b> | 0.76  | 0.79  | 3   | 2,491    |                                      |  |
| <b>155.00</b> | AMZN110521P00155000 | <b>1.28</b>  | <b>↑ 0.25</b> | 1.16  | 1.21  | 26  | 2,844    |                                      |  |
| <b>160.00</b> | AMZN110521P00160000 | <b>1.94</b>  | <b>↑ 0.35</b> | 1.81  | 1.85  | 14  | 4,733    |                                      |  |
| <b>165.00</b> | AMZN110521P00165000 | <b>2.91</b>  | <b>↑ 0.48</b> | 2.74  | 2.78  | 65  | 5,812    |                                      |  |
| <b>170.00</b> | AMZN110521P00170000 | <b>4.05</b>  | <b>↑ 0.47</b> | 4.00  | 4.10  | 41  | 4,255    |                                      |  |
| <b>175.00</b> | AMZN110521P00175000 | <b>6.20</b>  | <b>↑ 1.00</b> | 5.75  | 5.85  | 137 | 6,620    |                                      |  |
| <b>180.00</b> | AMZN110521P00180000 | <b>8.15</b>  | <b>↑ 0.70</b> | 8.05  | 8.15  | 104 | 2,761    |                                      |  |
| <b>185.00</b> | AMZN110521P00185000 | <b>11.25</b> | <b>↑ 1.15</b> | 11.00 | 11.10 | 55  | 1,780    |                                      |  |
| <b>190.00</b> | AMZN110521P00190000 | <b>14.95</b> | <b>↑ 1.95</b> | 14.40 | 14.50 | 154 | 1,592    |                                      |  |
| <b>195.00</b> | AMZN110521P00195000 | <b>19.15</b> | <b>↑ 1.95</b> | 18.00 | 18.15 | 4   | 334      |                                      |  |
| <b>200.00</b> | AMZN110521P00200000 | <b>22.75</b> | <b>↑ 1.20</b> | 22.45 | 22.75 | 5   | 273      |                                      |  |
| <b>205.00</b> | AMZN110521P00205000 | <b>27.85</b> | <b>↑ 2.85</b> | 27.25 | 27.50 | 1   | 52       |                                      |  |
| <b>210.00</b> | AMZN110521P00210000 | <b>30.75</b> | 0.00          | 31.75 | 32.05 | 20  | 92       |                                      |  |
| <b>215.00</b> | AMZN110521P00215000 | <b>33.45</b> | 0.00          | 36.55 | 36.95 | 2   | 39       |                                      |  |
| <b>220.00</b> | AMZN110521P00220000 | <b>37.25</b> | 0.00          | 41.45 | 41.85 | 1   | 146      |                                      |  |
| <b>225.00</b> | AMZN110521P00225000 | <b>45.05</b> | 0.00          | 46.45 | 47.35 | 15  | 36       |                                      |  |
| <b>250.00</b> | AMZN110521P00250000 | <b>72.10</b> | <b>↑ 5.70</b> | 71.05 | 72.70 | 10  | 10       |                                      |  |

### :: Poznámka - nelineárnosť PDR ::

- Rovnica na oceňovanie derivátov v Lelandovom modeli s transakčnými nákladmi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left( 1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

nie je lineárna. To znamená, že napríklad súčet, rozdiel, alebo nejaká iná kombinácia riešení už nie je riešením. Z toho vyplýva, že cena kombinovaných stratégií sa už nedá vypočítať tak, že oceníme každú opciu zvlášť a výsledok zložíme. (To sa dá len pri lineárnych rovniciach, ako je napríklad pôvodná Black-Scholesova rovnica.)

- Nemožnosť takého výpočtu sa dá vidieť aj z nasledovnej úvahy: Ak oceníme každú opciu samostatne, zarátavame tak transakčné náklady vznikajúce z udržiavania každého replikačného portfólia zvlášť. Ak nemáme transakčné náklady, nevadí, že udržiavame akoby dve replikačné portfóliá. Môže sa stať, že v jednom akcie kupujeme a v druhom predávame. Žiadne náklady z toho však nevznikajú. V prípade transakčných nákladov to už nie je pravda. Vtedy treba portfólio uvažovať ako celok, a v prípade uvedenej situácie nerobiť zbytočné transakcie.

### :: Ďalšie príklady na precvičenie ::



1. [Vzorová písomka, 2009]

5. (2.5 b.) Uvažujme transakčné náklady podľa Lelandovho modelu. Predpokladajme, že rozdiel medzi bid a ask cenou akcie je pol percenta ich priemernej hodnoty. Volatilita akcie je 0.6. Dnešná hodnota akcie je 140 USD. Úroková miera je pol percenta. Uvažujme call opciu s expiračnou cenou 150 USD a expiráciou o štvrt roka. Uveďte jeden prípustný čas medzi dvoma zmenami portfólia (Lelandovo číslo je medzi nulou a jednotkou) a príslušnú bid a ask cenu opcie.

2. [Písomka, 2009]

4. Predpokladajme, že rozdiel medzi ask a bid hodnotou akcie je štvrt percenta ich priemernej hodnoty. Volatilita akcie je 0.5. Dnešná hodnota akcie je 100 USD. Uvažujme call opciu s expiračnou cenou 120 USD a expiráciou o rok.

(a) [1 bod] Pre aké časy medzi dvoma zmenami portfólia pri hedžingu je Lelandovo číslo medzi nulou a jednotkou? Čas vyjadrite v hodinách, predpokladajte, že burza je počas pracovných dní otvorená sedem hodín.

(b) [1 bod] Zvoľte si jeden prípustný čas a vypočítajte bid a ask cenu opcie.

5. Vyberte si jednu put opciu firmy MSFT z cvičenia

(a) [1 bod] Vypočítajte pomocou Lelandovho modelu implikovanú volatilitu a implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia.

Použitá dáta (všetky vstupné dáta - tak, aby sa výpočet dal zopakovať):

Výsledok:

Poznámka: Teraz sme na cvičení pracovali s opciami firmy AMZN, takže pri riešení tejto úlohy si vyberte niektorú z týchto put opcií.

3. Uvažujme rozdiel bid a ask ceny opcie ako funkciu ceny akcie  $S$ . (Ostatné parametre - volatilita akcie, parameter  $c$  charakterizujúci transakčné náklady, úroková miera, expiračná cena a čas expirácie opcie - sú konštantné).

- o Značíte graficky tento rozdiel pre zvolené hodnoty parametrov.
- o Pre akú cenu akcie je tento rozdiel maximálny? Vypočítajte analyticky pre všeobecné hodnoty parametrov.

---

Cvičenia z finančných derivátov, 2011  
Beáta Stehliková, FMFI UK Bratislava

E-mail: [stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk](mailto:stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk)

Web: <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/>

---

