

FINANČNÉ DERIVÁTY, LS 2014/2015
DOMÁCA ÚLOHA: OPAKOVANIE NUMERICKÝCH METÓD

- Úlohu môžete riešiť samostatne alebo v dvojiciach.
- Riešenie budeme využívať na cvičení, preto pri rozdelení riešenia pri riešení v dvojici je potrebné, aby si každý prečítal riešenia všetkých častí.
- Odovzdávanie: mailom na adresu¹ `beata.ulohy@gmail.com` do stredy 22. 4. 2015 so subjectom `derivaty 2015 - numerika - meno/mena`.

1. **Numerické riešenie rovnice vedenia tepla.** Uvažujme rovnicu vedenia tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad x \in [-L, L], t \in (0, T]$$

so začiatočnou podmienkou $u(x, 0) = u_0(x)$ pre $x \in [-L, L]$ a okrajovými podmienkami $u(-L, t) = \phi(t)$, $u(L, t) = \psi(t)$ pre $t \in (0, T]$.

Uvažujme diskretizáciu s časovým krokom k a priestorovým krokom h .

- Zaveďte označenie, ktoré bude pri odvodení numerických schém používať.
- Odvodte explicitnú a implicitnú schému na riešenie RVT.
- Pri použití explicitnej schémy nemôžeme zvoliť k, h ľubovoľne. Aká podmienka musí byť splnená a prečo (stručne - čo sa stane, ak splnená nie je)?
- Implicitnú schému zapíšte v maticovom tvare

$$Au^{(m)} = b,$$

kde $u^{(m)}$ je vektor približného riešenia na m -tej časovej vrstve (okrem krajných bodov, v ktorých sú dané okrajové podmienky - teda sa nepočítajú v numerickej schéme), A je matica (napíšte explicitne, aké sú jej prvky) a b je vektor pravej strany.

2. **Numerické riešenie sústavy lineárnych rovníc**

- Aké vlastnosti má vektorová norma (teda norma vektora z \mathbb{R}^n)?
- Aké vlastnosti má maticová norma (teda norma reálnej matice rozmeru $n \times n$)? Uveďte príklad maticovej normy, príklad matice (nejakej malej, aby sa výpočet dal spraviť ručne) a výpočet zvolenej normy pre túto maticu
- Vo všeobecnosti (pre ľubovoľnú maticovú a vektorovú normu) nemusí platiť nerovnosť $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$. Napíšte príklad dvojice maticovej a vektorovej normy, pre ktoré táto nerovnosť platí (s referenciou na skriptá alebo inú literatúru). Kde sme - v súvislosti s numerickými metódami - využili túto nerovnosť?
- Uvažujme iteračnú schému na riešenie sústavy $Ax = b$ v tvare $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + \omega$, kde T je iteračná matica a ω je vektor. Čo musí spĺňať matica T , aby táto iteračná schéma konvergovala?
- Môže sa stať, že postupnosť vektorov v \mathbb{R}^n (napr. postupnosť iterácií z predchádzajúceho bodu) konverguje v nejakej norme, ale nekonverguje v inej norme? Zdôvodnite.
- Dokážte, že Gauss-Seidelova metóda aplikovaná na sústavu z implicitnej schémy riešenia rovnice vedenia tepla konverguje. Sformulujte použité kritérium (bez dôkazu, stačí referencia) a dokážte, že je splnené.

¹Poznámka (17.4.2015): opravená e-mailová adresa