CVIČENIA Z PDR 2005/2006

PARABOLICKÉ ROVNICE
PRÍKLADY NA PRECVIČENIE

1. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\ x \in (-\infty,\infty), t > 0,\\ u(x,0) &= e^{-x},\ x \in (-\infty,\infty),\end{aligned}$$

2. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u - t,\ x \in (-\infty,\infty), t > 0,\\ u(x,0) &= x,\ x \in (-\infty,\infty),\end{aligned}$$

3. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^t,\ x \in (0,1), t > 0,\\ u(x,0) &= 1 + x,\ x \in (0,1),\\ u(0,t) = u(1,t) &= 0,\ t > 0.\end{aligned}$$

4. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\ x \in (0,1), t > 0,\\ u(x,0) &= x,\ x \in (0,1),\\ u(0,t) = \sin t, u(1,t) &= 1,\ t > 0.\end{aligned}$$

5. Dokážte, že pre riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-t},\ x \in (-\infty,\infty), t > 0,\\ u(x,0) &= 0,\ x \in (-\infty,\infty)\end{aligned}$$

platí

$$u(x,t) > 0 \text{ pre všetky } x \in (-\infty,\infty), t > 0.$$

6. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-t},\ x \in (-\infty,\infty), t > 0,\\ u(x,0) &= 0,\ x \in (-\infty,\infty)\end{aligned}$$

a $v(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-2t},\ x \in (-\infty,\infty), t > 0,\\ u(x,0) &= 0,\ x \in (-\infty,\infty).\end{aligned}$$

Dokážte, že

$$u(x,t) > v(x,t) \text{ pre všetky } x \in (-\infty,\infty), t > 0.$$

7. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{e^{-t}}{1+x^2},\ x\in(0,1), t>0,\\ u(x,0) &= \sin\pi x,\ x\in(0,1),\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0,\ t>0.\end{aligned}$$

Vypočítajte $\int_0^1 u(x,t)dx$ pre každý čas t.

8. Funkcie $u_0(x), v_0(x)$ sú nulové mimo intervalu $[-1,1]$ a na intervale $[-1,1]$ pre ne platí

$$u_0(x)=-(x-1)(x+1), v_0(x)=1-|x|.$$

Nech $u(x,t)$, resp. $v(x,t)$ sú riešenia rovnice vedenia tepla na priamke so začatočnými podmienkami $u_0(x)$, resp. $v_0(x)$. Dokážte, že

$$0<v(x,t)<u(x,t) \text{ pre všetky } x\in(-\infty,\infty), t>0.$$

9. Uvažujme rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\ x\in(-\infty,\infty), t>0,\\ u(x,0) &= x^2,\ x\in(-\infty,\infty).\end{aligned}$$

Táto rovnica sa dá vyriešiť dosadením do vzroca a výpočtom integrálu[1]. V tomto príklade nájdeme riešenie iným spôsobom, bez použitia Greenovej funkcie.

(a) Napíšte rovnicu a začiatočnú podmienku, ktorú spĺňa funkcia

$$v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t).$$

(b) Vyriešte rovnicu z predchádzajúcej časti[2] a ukážte, že

$$u(x,t)=x^2+\phi(t).$$

(c) Dosadením do rovnice nájdite funkciu $\phi(t)$ a riešenie $u(x,t)$

[1] DÚ 8, príklad 2

[2] dá sa vyriešiť bez integrovania Greenovej funkcie