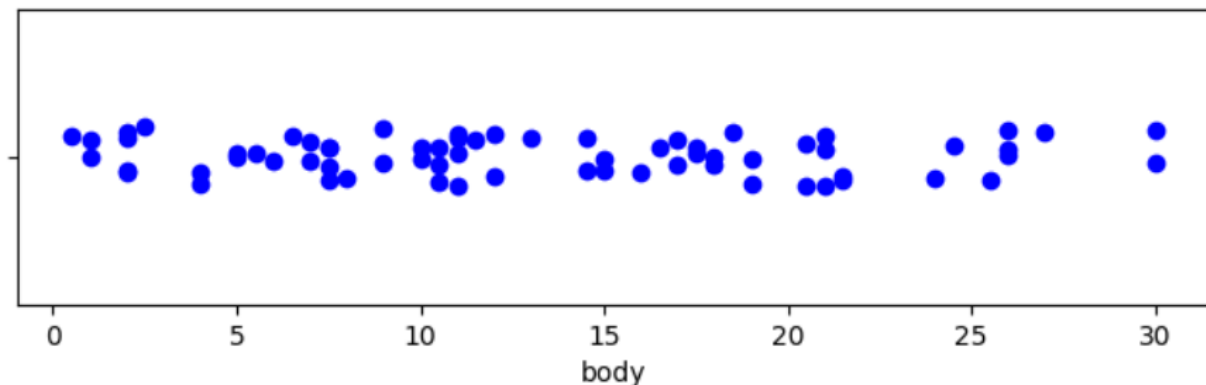


(11) Intervaly spoľahlivosti

1. Testovanie strednej hodnoty počtu bodov z písomky (normálne rozdelené dáta): aké hodnoty sa nezamietnu

Pripomeňme si dáta, s ktorými sme minule pracovali, keď sme sa zaoberali testovaním hypotéz – výsledky priebežnej písomky mali normálne rozdelenie, hypotézu o strednej hodnote 10 aj o strednej hodnote 20 sme zamietli.



Pozrime sa na to, **aké hypotézy o strednej hodnote by sme nezamietli**:

Najskôr numerickým výpočtom:

```
from scipy import stats
import numpy as np

def ttest_mu_range(data, mu_range, alpha=0.05):
    nezamietnute_mu = []

    for mu in mu_range:
        t_stat, p_hodnota = stats.ttest_1samp(data, popmean=mu)
        if p_hodnota > alpha:
            nezamietnute_mu.append(float(mu))

    return nezamietnute_mu
```

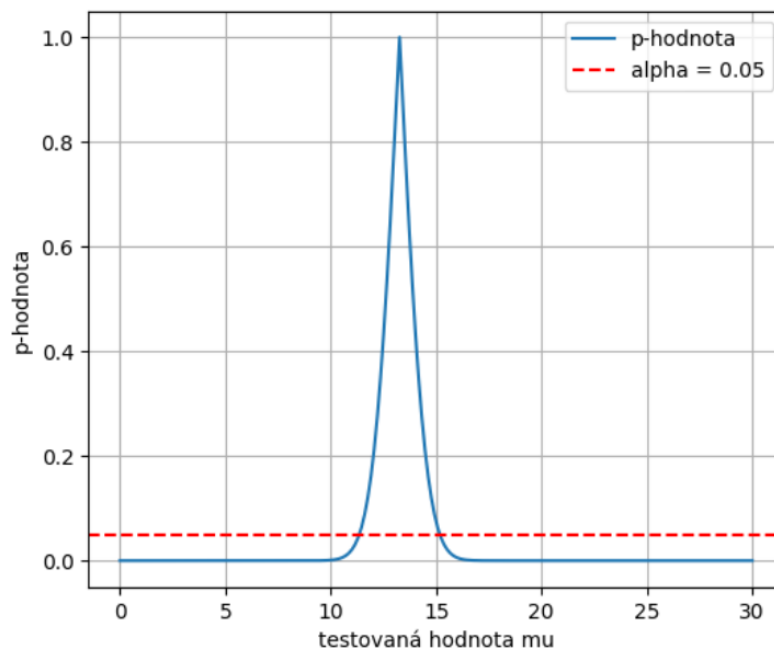
```
mu_range = range(0, 31)
nezamietnute = ttest_mu_range(body, mu_range)
print("Nezamietnute hodnoty mu:")
print(nezamietnute)
```

Nezamietnute hodnoty mu:
[12.0, 13.0, 14.0, 15.0]

```
mu_range = np.arange(11, 16, 0.25)
nezamietnute = ttest_mu_range(body, mu_range)
print("Nezamietnute hodnoty mu:")
print(nezamietnute)
```

Nezamietnute hodnoty mu:
[11.5, 11.75, 12.0, 12.25, 12.5, 12.75, 13.0, 13.25, 13.5, 13.75, 14.0, 14.25, 14.5, 14.75, 15.0]

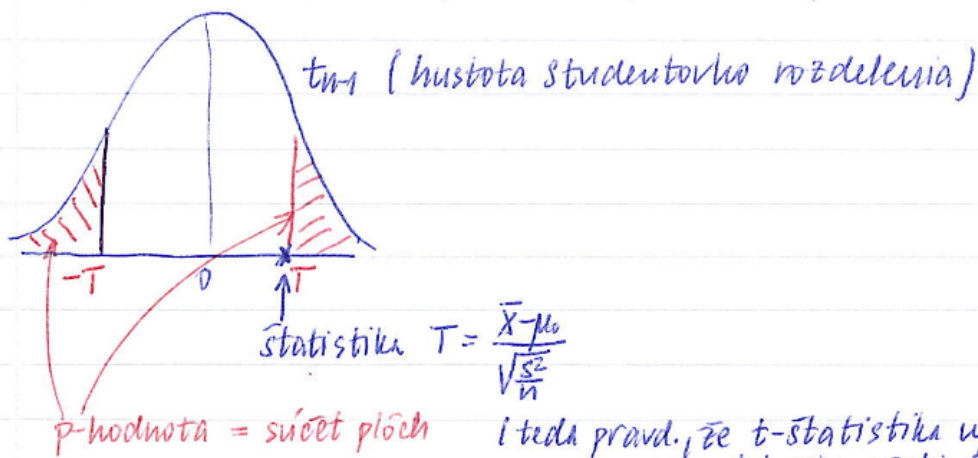
Je prirodzené očakávať, že množina hodnôt, pre ktoré sa hypotéza nezamietne, bude **interval** (ak sa nezamietne hypotéza o strednej hodnote 12, ani o strednej hodnote 12.25, tak sa dá logicky očakávať, že sa nezamietne ani hypotéza o strednej hodnote 12.1). Krajné body intervalu budú také, že je pri nich dosiahnutá p-hodnota rovná 0,05 (resp, nastavenej hodnote použitej pri testovaní).



Kde sa p-hodnota rovná 0,05 (pomocou funkcie `brentq` zo `scipy.optimize`):
11.35370, 15.17572

Analyticky:

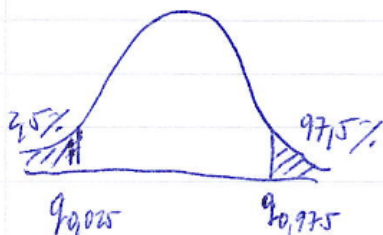
Pripomeňme si princíp počítania p-hodnoty:



i teda pravd., že t-statistika výjde extrémnejšia, t.j. viac vzdialená od nuly ako naša hodnota T)

Analogicky, ak statistika výjde záporná.

P-hodnota bude 0,05, ak sa statistika T rovná 2,5% alebo 97,5% kvantilu t_{n-1} rozdelenia:



To zodpovedá testovaniu hodnotám μ_0 , pre ktoré je:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = q_{0,025}$$

$$\bar{X} - \mu_0 = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \cdot q_{0,025}$$

$$\mu_0 = \bar{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n}} \cdot q_{0,025}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = q_{0,975}$$

$$\bar{X} - \mu_0 = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \cdot q_{0,975}$$

$$\mu_0 = \bar{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n}} \cdot q_{0,975}$$

```
import numpy as np
from scipy.stats import t
```

```
n = len(body)
```

```

priemer = np.mean(body)
s2 = np.var(body, ddof=1)

t_kvantil_1 = t.ppf(0.975, df=n-1)
t_kvantil_2 = t.ppf(0.025, df=n-1)

mu_1 = priemer - t_kvantil_1*np.sqrt(s2/n)
mu_2 = priemer - t_kvantil_2*np.sqrt(s2/n)

print("Hraničné hodnoty mu:")
print(f"{mu_1:.5f}, {mu_2:.5f}")

```

Výstup:

```

Hraničné hodnoty mu:
11.35370, 15.17572

```

2. Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu počtu bodov z písomky (normálne rozdelené dáta, neznáma disperzia)

- Povedzme, že by sme strednú hodnotu nechceli odhadnúť iba jedným číslom - priemerom, ale intervalom.
- Chceme pritom nájsť taký interval, že pri jeho opakovanom výpočte vždy s novými dátami, bude strednú hodnotu obsahovať so zadanou pravdepodobnosťou (dostatočne veľkou, štandardne 0,95). Budeme ho nazývať **intervalom spoľahlivosti pre strednú hodnotu** (napríklad **95-percentný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu**)
- Analogicky sa dá hovoriť o intervale spoľahlivosti pre hocikáký iný parameter. Požiadavka je, že pravdepodobnosť toho, že uvažovaný parameter padne do skonštruovaného intervalu, je 0,95 (respektíve iná zadaná hodnota).

Základom sú dve veci:

- Znalosť pravdepodobnostného rozdelenia štatistiky obsahujúcej parameter, ktorý nás zaujíma (v našom prípade je to t-štatistika z testu o strednej hodnote)
- Kvantily príslušného rozdelenia

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t_{n-1}$$

Z definície kvantilu vyplýva, že

$$P(q_{0.025} \leq T \leq q_{0.975}) = 0,95$$

$$\begin{aligned}
 \text{Potom: } 0,95 &= P \left(q_{0,025} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leq q_{0,975} \right) = \\
 &= P \left(\sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,025} \leq \bar{X} - \mu \leq \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,975} \right) = \\
 &= P \left(-\sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,975} \leq \mu - \bar{X} \leq -\sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,025} \right) = \\
 &= P \left(\bar{X} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,975} \leq \mu \leq \bar{X} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,025} \right)
 \end{aligned}$$

Teda interval $\left[\bar{X} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,975}, \bar{X} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,025} \right]$ obsahuje strednú hodnotu μ s pravdepodobnosťou 0,95.

Keďže Studentovo rozdelenie je symetrické, môžeme tento predpis zjednodušiť:

$$\begin{aligned}
 \text{Zo symetrie: } q_{0,025} &= -q_{0,975}, \text{ takže interval je} \\
 &\left[\bar{X} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,975}, \bar{X} + \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot q_{0,975} \right]
 \end{aligned}$$

Podobne ako je pri testovaní hypotéz štandardne uvažovaná alfa (pravdepodobnosť zamietnutia pravdivej nulovej hypotézy, označovaná ako hladina významnosti) rovná 0,05, tak je pri intervale spoľahlivosti obvyklé konštruovať 95-percentý interval spoľahlivosti. Analogicky však, tak ako je možné uvažovať ľubovoľnú alfu pri testovaní hypotéz, je to možné aj pri intervaloch spoľahlivosti.

Ak nechceme 95%, ale $(1-\alpha)$ 100% interval, tak rovnakým
 $\uparrow$
 zodpovedá α z testovania hypotéz
 (p-hodnota sa porovnáva s α , štandardne
 $\alpha = 0,05$)

postupom ujde, že namiesto kvantilu $q_{0,975}$ potrebujeme kvantil $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

```

import numpy as np
from scipy.stats import t

alpha = 0.05

n = len(body)
priemer = np.mean(body)
s2 = np.var(body, ddof=1)

t_kvantil = t.ppf(1 - alpha/2, df=n-1)

dolna_hranica = priemer - t_kvantil*np.sqrt(s2/n)
horna_hranica = priemer + t_kvantil*np.sqrt(s2/n)

print("95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu:")
print(f"({dolna_hranica:.5f}, {horna_hranica:.5f})")

```

Výsledok:

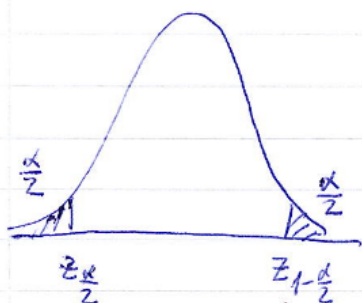
95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu:
 (11.35370, 15.17572)

Súvislosti:

- Ak sa na hladine významnosti *alfa* testuje hypotéza, že sa stredná hodnota rovná **m**, tak
 - táto hypotéza sa zamietne práve vtedy, keď $(1-\alpha)*100\%$ interval spoľahlivosti neobsahuje hodnotu **m**
 - táto hypotéza sa nezamietne práve vtedy, keď $(1-\alpha)*100\%$ interval spoľahlivosti obsahuje hodnotu **m**
- Takže takto súvisí napríklad testovanie na hladine významnosti 0,05 (teda keď hypotézu zamietame pri p-hodnote menšej ako 0,05) a konštrukcia 95-percentného intervalu spoľahlivosti.

3. Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia so známou disperziou

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$



$$1-\alpha = P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq N(0,1) \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) =$$

$$= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu - \bar{X} \leq -z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - \underbrace{z_{\frac{\alpha}{2}}}_{-z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) =$$

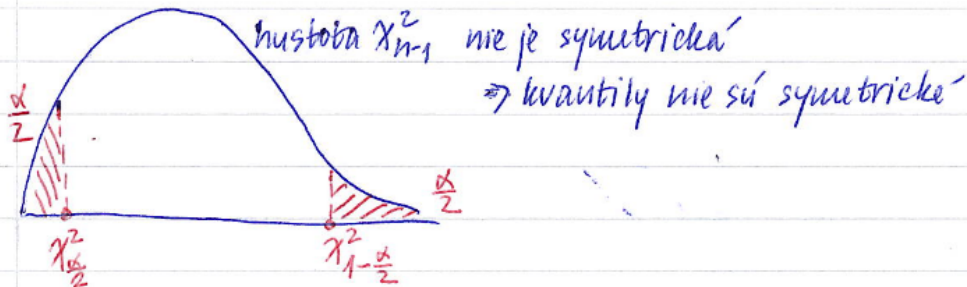
$$= P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

Teda $P\left(\mu \in \left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]\right) = 1-\alpha$, takže

interval spoľahlivosti je $\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$

4. Interval spoľahlivosti pre disperziu normálneho rozdelenia

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$



$$1-\alpha = P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) =$$

$$= P\left(\frac{1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right)$$

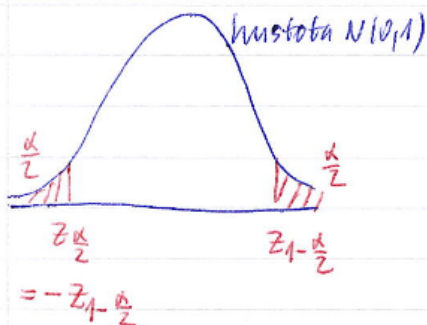
$$\Rightarrow P\left(\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right]\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \text{interval spoľahlivosti pre disperziu je } \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right].$$

5. Interval spoľahlivosti pre pravdepodobnosť úspechu

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{\text{aprox.}}{\sim} N(0,1)$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \stackrel{\text{aprox.}}{\sim} N(0,1)$$



$$1 - \alpha = P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq N(0,1) \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq \hat{p} - p \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p - \hat{p} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= P\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$\Rightarrow$ interval spoľahlivosti pre pravdepodobnosť úspechu p

(približný, pre veľké n) je $\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$

Príklad: (z prednášky o testovaní rozdelení)

Hádzanie eurovou mincou, z 250 pokusov padla hlava 140 krát. Spravíme 95-percentný interval spoľahlivosti pre pravdepodobnosť p padnutia hlavy.

```
from scipy.stats import norm
import numpy as np
```

```
n = 250
k = 140
p_hat = k/n
print(f"Odhad p: {p_hat:.5f}")

alpha = 0.05
z = norm.ppf(1 - alpha/2)
dolna_hranica = p_hat - z*np.sqrt(p_hat*(1 - p_hat)/n)
horna_hranica = p_hat + z*np.sqrt(p_hat * (1 - p_hat)/n)
print(f"95% interval spoľahlivosti pre p: ({dolna_hranica:.5f},
{horna_hranica:.5f})")
```

Odhad p: 0.56000

95% interval spoľahlivosti pre p: (0.49847, 0.62153)