Cvičenie z PDR
Zimný semester 2008/2009

Príklady na precvičenie - parabolické rovnice

1. **Rovnica vedenia tepla na priamke.** Nájdite riešenie rovnice

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

(a) $u(x,0) = e^{-3x}$ pre $x \in \mathbb{R}$.
(b) $u(x,0) = x^2 + 1$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Načrtnite graf začiatočnej podmienky a riešenia v kladnom čase.

2. **Transformácia na RVT.** Nájdite riešenie rovnice

$$u_t - u_{xx} = u - t \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

3. **RVT na priamke - vlastnosti a dôkazy.**

(a) Uvažujme riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že ak graf funkcie $u_0(x)$ je symetrický okolo priamky $x = -1$, tak pre každé $t > 0$ je graf riešenia $u(x,t)$ (ako funkcie premennej x) symetrický okolo priamky $x = -1$.

(b) Uvažujme riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$u_t - a^2 u_{xx} = e^{-t-x^2} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = \max(0, x(1-x)) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každé $t > 0$ a jeho limitu pre $t \to \infty$

(c) Rozhodnite, či je nasledujúce tvrdenie pravdivé. Svoju odpoveď dokážte.
Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$u_t - a^2 u_{xx} = -e^{-t-x^2} \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = \max(0, x(1-x)) \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Potom existuje také $(\tilde{x}, \tilde{t})$, pre ktoré $u(\tilde{x}, \tilde{t}) < 0$.
Návod: Uvažujte integrál $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$.

(d) Rozhodnite, či je nasledujúce tvrdenie pravdivé. Ak áno, dokážte ho. Ak nie, nájdite kontrapríklad.

Nech $u(x,t)$ spĺňa $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$ a súčasne $u_t - b^2 u_{xx} = 0$ pre $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Ak $a \neq b$, tak $u(x,t)$ je konštantná funkcia.

(e) Uvažujme riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážte, že ak je začiatočná podmienka $u_0(x)$ párna, tak pre každé $t > 0$ je funkcia $u(x,t)$ (ako funkcia premennej x) párna.

4. **RVT na ohraničenom intervale - nulové Dirichletove okrajové podmienky.** Nájdite riešenie nasledujúcich rovníc:

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x)\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)\cos(\pi x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = x \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = x(1-x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

(c)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = tx \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = x(1-x) \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

5. **RVT na ohraničenom intervale - nenulové Dirichletove okrajové podmienky.** Nájdite riešenie nasledujúcich rovníc:

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = x \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = 1 \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 1,\ u(1,t) = 2 \quad \text{pre } t > 0$$

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = x + x^2 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = x \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 1,\ u(1,t) = t \quad \text{pre } t > 0$$

6. **RVT na ohraničenom intervale - Neumannove okrajové podmienky.** Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = x \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$

7. **RVT na ohraničenom intervale - limitia riešenia.** Nájdite limitu $\tilde{u}(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$, kde $u(x,t)$ je riešením rovnice

   (a)
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = 2 + x + x^2 \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$u(0,t) = 2,\ u(1,t) = 4 \quad \text{pre } t > 0$$

   (b)
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{pre } x \in (0,1), t > 0$$
$$u(x,0) = 2 + x + x^2 \quad \text{pre } x \in [0,1]$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \text{pre } t > 0$$