PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE, ZS 2009/2010
ELIPTICKÉ PDR

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená, ohraničená a súvislá. Riešenie rovnice je spojité do hranice tejto množiny.

1. Nájdite riešenia nasledujúcich úloh:

   (a) Poissonova rovnica

   $$\begin{aligned} \Delta u &= x_1 + x_2 \quad \text{v } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

   kde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$.

   (b) Poissonova rovnica

   $$\begin{aligned} \Delta u &= x_1 x_2 \quad \text{v } \Omega \\ u &= \psi \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

   kde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ a funkcia ψ, definovaná na hranici $\partial\Omega$, je po častiach lineárna a jej hodnoty v uzlových bodoch sú $\psi(0,0) = 1$, $\psi(0,1) = 2$, $\psi(1,1) = 3$, $\psi(1,0) = 4$.

   (c) Poissonova rovnica

   $$\begin{aligned} \Delta u &= 1 \quad \text{v } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

   kde $\Omega = (0,2) \times (0,3)$.

   (d) Poissonova rovnica

   $$\begin{aligned} \Delta u &= 42 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{v } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

   kde $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$.

2. Odvoďte Greenovu reprezentáciu riešenia Poissonovej rovnice $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ v dvojrozmernom prípade.

3. Integrály vystupujúce v Greenovej reprezentácii riešenia majú ustálené názvy:

   - $\int_\Omega \Gamma(\xi - x) f(\xi) d\xi$ sa nazýva Newtonov potenciál s hustotou f,
   - $\int_{\partial\Omega} \sigma(\xi)\Gamma(\xi - x) dS$ sa nazýva potenciál vrstvy s hustotou σ,
   - $\int_{\partial\Omega} \mu(\xi) \frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) dS$ sa nazýva potenciál dvojvrstvy s hustotou μ.

   (V prípade Greenovej reprezentácie riešenia máme $\mu = u$ a $\sigma = \frac{du}{d\vec{n}}$.) Dokážte, že každý potenciál vrstvy a potenciál dvojvrstvy je harmonická funkcia.

4. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Dokážte, že ak pre každý bod $(x, y) \in \Omega$ platí

$$v_{xx} + v_{yy} + xv_x + yv_y > 0,$$

tak funkcia v nemá v žiadnom bode lokálne maximum.

(b) Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + xu_x + yu_y &= 0 \quad \text{v } \Omega, \\ u &= f(x, y) \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé $(x, y) \in \Omega$ platí $u(x, y) \leq \max_{(x,y)\in\partial\Omega} f(x, y)$, t.j. maximum funkcie u sa nadobúda na hranici.
Návod: Definujte funkciu $v_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$.

(c) Dokážte, že úloha z časti (b) má najviac jedno riešenie.

5. Nech $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ je nekonštantná harmonická funkcia na množine $\{(x_1, \ldots x_n) : x_1^2 + \ldots x_n^2 < R^2\}$. Definujme

$$M(r) = \max_{x_1^2 + \ldots x_n^2 = r^2} u(x_1, \ldots x_n)$$

pre $r \in (0, R)$. Dokážte, že funkcia M je rastúca.

6. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \Delta u = f(x) \quad \text{v } \Omega, \\ u + \alpha \frac{du}{d\vec{n}} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\alpha \geq 0$ je konštanta. Dokážte, že úloha má najviac jedno riešenie.
Návod: Nech u_1, u_2 sú riešenia, definujte $w = u_1 - u_2$ a zistite, akú rovnicu w spĺňa. Použite prvú Greenovu formulu a dokážte, že gradient funkcie w sa v kažom bode rovná nule. Potom w sa identicky rovná konštante, zostáva ukázať, že táto konštanta je nula.

7. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega, \\ \frac{du}{d\vec{n}} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nech u_1, u_2 sú riešenia. Dokážte, že $u_1 - u_2 = c$, kde c je konštanta.