PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE, ZS 2009/2010
ELIPTICKÉ PDR

1. Nájdite riešenie rovníc:

   (a) Rovnica
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
   so začiatočnými podmienkami
   $$u(x,0) = 1, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (b) Rovnica
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0,1), t > 0$$
   so začiatočnými podmienkami
   $$u(x,0) = x(1-x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -1, \quad x \in [0,1]$$
   a nulovými okrajovými podmienkami
   $$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

2. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
   so začiatočnými podmienkami
   $$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Pre každý bod $x \in \mathbb{R}$ vypočítajte $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

3. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
   so začiatočnými podmienkami
   $$u(x,0) = \phi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
   kde ϕ, ψ sú funkcie s kompaktným nosičom[1]. Definujme:
   $$F_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx, \quad F_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx.$$
   Dokážte:

   (a) Súčet $F_1(t) + F_2(t)$ je nezávislý od času.
   (b) Existuje také $t_0 > 0$, že pre $t > t_0$ platí $F_1(t) = F_2(t)$.

[1]Nosič funkcie f je uzáver množiny $\{x : f(x) \neq 0\}$. Komaktný nosič znamená, že existuje také $R > 0$, že $f(x) = 0$, ak $|x| > R$.