PÍSOMNÁ ČASŤ SKÚŠKY - UKÁŽKA

1. *(spolu 12 bodov)* Zakrúžkujte správnu odpoveď, dôkazy vašich tvrdení nepíšte. **Správna odpoveď +2 body, nesprávne odpoveď -2 body, žiadna odpoveď 0 bodov.**

   (a) Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je otvorená, ohraničená a súvislá množina. Rozhodnite, či sú nasledovné funkcie harmonické na množine Ω:

$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)$, kde $u(x)$ je harmonická funkcia na množine Ω.	áno - nie
$\int_\Omega \Gamma(\xi - x)d\xi$, kde x je bod z množiny Ω a Γ je fundamenálne riešenie Laplaceovej rovnice v $\mathbb{R}^3$	áno - nie
lineárna funkcia	áno - nie

   (b) Rozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé.

Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ($x \in \mathbb{R}, t > 0$), ktoré spĺňa $u(x,0) = \phi(x)$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Ak $\phi(x) \geq 0$ a $\psi(x) \geq 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, tak aj $u(x,t) \geq 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.	áno - nie
Nech Ω je otvorená, ohraničená a súvislá množina v $\mathbb{R}^n$. Nech $\Delta u(x) = 0$ $x \in \Omega$. Potom pre každé $x \in \Omega$ platí $u(x) \geq \min_{\xi \in \Omega} u(\xi)$	áno - nie
Neexistuje také riešenie $u(x,y)$ rovnice $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x,0) = x$, ktoré je definované pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.	áno-nie

2. *(8 bodov)* Nech Ω je otvorená, ohraničená a súvislá množina v $\mathbb{R}^3$. Nech funkcia u spĺňa $-u(x) \leq 0$ pre každé $x \in \Omega$ (takého funkcie sa nazývajú subharmonické). Dokážte, že ak guľa $B(x,\rho)$ je obsiahnutá v Ω, tak

$$u(x) \leq \frac{1}{3\omega_3 \rho^2} \int_{\partial B(x,\rho)} u \, dS,$$

   kde $3\omega_3$ je povrch jednotkovej gule v $\mathbb{R}^3$.

3. *(5 bodov)* Uvažujme zákon zachovania hmoty v jednorozmernom prípade, hmota je unášaná rýchlosťou $v(x)$. Hustotu hmoty v čase t v bode x označme $\rho(x,t)$. Vieme, že je riešením rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0.$$

   Predpokladajme, že rýchlosť v je konštantná a že začiatočné rozloženie hmoty je dané funkciou $\rho(x,0) = e^{-x^2}$. Pre každý čas t určte bod x, v ktorom funkcia $\rho(x,t)$ nadobúda maximum.

4. *(5 bodov)* Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

   ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $u(x,0) = x^2$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

ÚSTNA ČASŤ SKÚŠKY - UKÁŽKA

1. *(5 bodov)* Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0,1), t > 0$$
zo začiatočnými podmienkami
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]$$
a nulovými okrajovými podmienkami
$$u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$
Určte všetky časy t, v ktorých sa riešenie bude zhodovať so začiatočnou podmienkou $u(x,0)$.

2. *(10 bodov)* Dokážte alebo nájdite kontrapríklad:
Nech Ω je otvorená, ohraničená a súvislá množina v $\mathbb{R}^n$. Nech $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$. Potom pre každé $x \in \Omega$ platí $u(x) \leq \max_{\xi \in \Omega} u(\xi)$

3. *(15 bodov)* Existuje v okolí bodu $(1,1)$ riešenie rovnice
$$(x^3 - 3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x^2 y - y^3)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
ktoré spĺňa $u(1,y) = \sin y$? Svoje tvrdenie dokážte.

   Bez dôkazu môžete použiť, že integrál príslušného charakteristického systému je $I(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$.

VZORCE

1. $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t)u_0(s)ds$, kde $G(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}$
2. pre $n \geq 3$: $\Gamma(r) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} r^{2-n}$, kde $n\omega_n$ je povrch jednotkovej gule
3. pre $n = 2$: $\Gamma(r) = \frac{1}{2\pi}\ln(r)$
4. pre $n \geq 3$: $\frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) = \frac{1}{n\omega_n}|\xi - x|^{1-n}$, kde $\vec{n}$ je vektor vonkajšej normály k povrchu gule $B(x, |\xi - x|)$ v bode ξ
5. $\int_\Omega u\, \Delta v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{dv}{d\vec{n}}\, dS$
6. $\int_\Omega (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{dv}{d\vec{n}} - v\frac{du}{d\vec{n}}\right)\, dS$
7. $u(x) = \int_\Omega \Gamma(\xi - x) f(\xi) d\xi - \int_{\partial\Omega} \Gamma(\xi - x)\frac{du}{d\vec{n}}(\xi) dS + \int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{d\Gamma}{d\vec{n}}(\xi - x) dS$
8. $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-at) + \phi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$.
9. $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$