Parciálne diferenciálne rovnice, ZS 2011/2012
Príklady na precvičenie 1

1. Ukážte, že funkcia $u(x,y,z) = \phi(x^2 - y^2, \ln y - z)$ je riešením rovnice

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

2. (a) Ukážte, že funkcia $u(x,y) = \phi(\frac{x}{y})$ je riešením rovnice

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

   (b) Nájdite také riešenia, ktoré spĺňajú
   - $u_1(1,y) = y^3$,
   - $u_2(x,x^2) = \sin x$,
   - $u_3(x,2) = \ln(1+x^2)$.

3. Nech $u = u(x,z,y)$ je riešením rovnice

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 2u.$$

   Dokážte, že potom pre každé $t > 0$ platí $u(tx,ty,tz) = t^2 u(x,y,z)$.
   Návod: Definujte funkciu $F(t) = \frac{u(tx,ty,tz)}{t^2}$ a vypočítajte jej deriváciu.

4. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

   ktoré má tvar $u(x,y,z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5. Určte konštanty a, b tak, aby rovnica

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5(2x^2 + 3y^2)$$

   mala riešenie v tvare $u(x,y) = f(2x^2 + 3y^2)$ a nájdite toto riešenie.