Parciálne diferenciálne rovnice, ZS 2011/2012
Príklady na precvičenie 5

Príklady sa nebudú počítať na cvičení, môžete ich prísť konzultovať v pondelok pred cvičením od 14.00 na M266 alebo kedykoľkvej odovzdať na papieri.

1. Nájdite riešenie rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 5u \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-x} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Spravte skúšku, t.j. ukážte, že funkcia, ktorú ste našli, vyhovuje danej rovnici a začiatočnej podmienke.

2. Určte všetky konštanty $A, B \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí nasledujúce tvrdenie:
   Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu &= 0 \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   pričom $u_0(x) > 0$. Potom aj $u(x,t) > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$.

3. Pre aké konštanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ má rovnica

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

   riešenie v tvare $u(x,t) = t^\alpha f(\frac{x}{t^\beta})$?

4. (a) Dokážte nasledujúce tvrdenie:
   Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   pričom $A \le u_0(x) \le B$ pre nejaké konštanty A, B. Potom aj $A \le u(x,t) \le B$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$.

   (b) Ukážte na konkrétnom kontrapríklade, že nasledujúce tvrdenie <u>neplatí</u>:
   Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \textit{pre } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   pričom $f_1(x) \le u_0(x) \le f_2(x)$ pre nejaké funkcie f_1, f_2. Potom aj $f_1(x) \le u(x,t) \le f_2(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$.