

PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE, ZS 2011/2012
PRÍKLADY NA PRECVIČENIE 7

Príklady môžete prísť konzultovať v pondelok pred cvičením od 14.00 na M266 alebo kedykoľvek odovzdať na papieri.

1. Nájdite riešenie rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x^2 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= 1 \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

2. Nájdite riešenie rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= t \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= 1 + x \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = t, u(1, t) &= 1 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

3. Nájdite riešenie rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 3t \sin(3\pi x) \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= 1 \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

4. Nech $u(x, t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \quad \text{pre } t > 0.\end{aligned}$$

Dokážte, že funkcia $F(t) = \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$ je nerastúca. (Návod: Pri derivovaní si uvedomte, že $|u(x, t)|^2 = u(x, t)^2$)

5. Nech $u(x, t)$ je riešením rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{pre } x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{pre } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = A, u(1, t) &= B \quad \text{pre } t > 0,\end{aligned}$$

kde A, B sú konštanty. Nájdite limitu $u_L(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$