

CVIČENIA Z PDR 2007/2008

DÚ Z CVIČENIA 1

PRÍKLADY SA BUDÚ RIEŠIŤ NA CVIČENÍ 27.9.2007

1. Hľadáme riešenia rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

ktoré majú tvar $u(x, y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na cvičení sme odvodili, že $f(r)$ spĺňa obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = 0.$$

Vyriešte túto rovnicu a nájdite príslušnú funkciu $u(x, y)$. Nájdite všeobecné riešenie a jedno konkrétne riešenie $u(x, y)$

Návod: Spravte substitúciu $g(r) = f'(r)$, dostanete ODR prvého rádu.

2. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1,$$

ktoré má tvar $u(x, y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nájdite všeobecné riešenie a jedno konkrétne riešenie $u(x, y)$

3. Na cvičení:

Nech f je hodnota vyrobeného výstupu pri vstupoch $x_1, \dots, x_n$ je $f(x_1, \dots, x_n)$. Ak by sme za jednotkové množstvo každého vstupu platili jeho hraničný produkt, za použité vstupy zaplatíme $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Rovnosť

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = f \tag{1}$$

potom znamená rovnosť hodnoty výstupu a ceny vstupov.

Dokázali sme, že ak f má konštantné výnosy z rozsahu, tak rovnosť (1) platí.

DÚ:

Dokážte opačné tvrdenie: Ak pre nejakú produkčnú funkciu f platí rovnosť (1), tak táto produkčná funkcia má konštantné výnosy z rozsahu.

Návod: Definujte funkciu $F(t) = \frac{f(tx_1, \dots, tx_n)}{t}$ a vypočítajte $F'(t)$.