

CVIČENIA Z PDR 2007/2008

PÍ SOMKA 1 - INFORMÁCIE

- Na písomke budú štyri príklady, na ich vyriešenie bude 1.5 hodiny.
- Môžete používať ľahák A4.
- Typy príkladov, ktoré môžu byť na písomke:

1. *Transformácia parciálnej diferenciálnej rovnice na obyčajnú diferenciálnu rovnicu a jej riešenie*

Príklad: Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5,$$

ktoré má tvar $u(x, y) = f(s)$, kde $s = x^2 + 3y^2$.

2. *Lineárne a kvázilineárne parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu - všeobecné riešenie, riešenie spĺňajúce zadanú okrajovú podmienku.*

Príklad:

- Nájdite riešenie rovnice

$$(z - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

ktoré spĺňa okrajovú podmienku $u(0, y, z) = 2y(y - z)$.

- Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$(2x - 3y) \frac{\partial z}{\partial x} + (3x - z) \frac{\partial z}{\partial y} = y - 2x.$$

3. *Dôkaz alebo výpočet nejakej vlastnosti riešenia pre lineárne a kvázilineárne parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu (integrál, limita).*

Príklad: Ak je hmota unášaná vektorovým poľom $v = (v_1, v_2)$, tak zo zákona zachovania hmoty vyplýva, že jej hustota $\rho(t, x, y)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2 \rho)}{\partial y} = 0.$$

- (a) Nájdite rozdelenie hustoty hmoty v priestore v čase t (t.j. funkciu $\rho(t, x, y)$), ak vektorové pole $v = (-x, -y)$ a rozdelenie hmoty v čase $t = 0$ je $\rho_0(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
- (b) Pre každý bod roviny (x, y) nájdite limitu $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, x, y)$.

4. *Výpočet riešenia pre rovnicu vedenia tepla. (Všetky potrebné integrály sú aj v príkladoch na precvičenie.)*

Príklad: Nájdite riešenie $u(x, t)$ rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= -3e^x.\end{aligned}$$

$$(x \in (-\infty, \infty), t > 0)$$