

CVIČENIA Z PDR 2007/2008

PRÍKLADY NA PRECVIČENIE - ROVNICA VEDENIA TEPLA NA PRIAMKE

1. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial u}{\partial x^2},$$

$(x \in (-\infty, \infty), t > 0)$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $u(x, 0) = 2x + 4e^{-2x}$.

2. Nájdite riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial u}{\partial x^2} + u,$$

$(x \in (-\infty, \infty), t > 0)$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $u(x, 0) = 3e^x$.

3. Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} = 0,$$

$(x \in (-\infty, \infty), t > 0)$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $u(x, 0) = \max(0, 1 - |x|)$.
Vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ pre každý čas t a nájdite limitu pre $t \rightarrow \infty$.

4. Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0,$$

$(x \in (-\infty, \infty), t > 0)$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $u(x, 0) = e^{-|x|}$. Dokážte, že $0 < u(x, t) < 1$ pre každé $t > 0$ a $-\infty < x < \infty$.

5. Nech $u(x, t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0,$$

$(x \in (-\infty, \infty), t > 0)$, pričom $u(x, 0)$ je charakteristická funkcia intervalu $[0, 1]$. Dokážte, že $0 < u(x, t) < 1$ pre každé $t > 0$ a $-\infty < x < \infty$.

6. Nech funkcie $u_1(x, t)$ a $u_2(x, t)$ spĺňajú

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u_i}{\partial x^2} = 0,$$

pričom

$$|u_1(x, 0) - u_2(x, 0)| \leq \varepsilon$$

pre každé x . Dokážte, že potom pre pre každé $t > 0$ a $-\infty < x < \infty$ platí

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$