Cvičenia z PDR 2007/2008

Príklady na precvičenie 1
(k cvičeniu z 20.9.2007)

1. Ukážte, že funkcia $z(x,y) = \sin y + f(\sin x - \sin y)$ je riešením rovnice

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y}\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

2. Ukážte, že funkcia $u(x,y,z) = x\phi\left(\frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^2}\right)$ je riešením rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

3. (a) Ukážte, že funkcia $u(x,y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ je riešením rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

   (b) Nádite také riešenia, ktoré spĺňajú:
   - $u_1(1,y) = y^3$,
   - $u_2(x,x^2) = \sin x$,
   - $u_3(x,2) = \ln(1+x^2)$.

4. Uvažujme rovnicu

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

s neznámou funkciou $z = z(x,y)$. Spravme transformáciu premenných

$$u = x + 2y + 2, \quad v = x - y - 1$$

a zaveďme novu funkciu $f = f(u,v)$ tak, že

$$z(x,y) = f(u,v) = f(u(x,y), v(x,y)).$$

Akú rovnicu spĺňa $f(u,v)$?

5. Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3,$$

ktoré má tvar $u(x,y) = f(s)$, kde $s = 2x^2 + y^2$. Nakreslite jeho vrstevnice.