Cvičenia z parciálnych diferenciálnych rovníc
Zimný semester 2010/2011

Príklady na precvičenie
Opakovanie

1. Ukážte, že funkcia $u(x,y,z) = x\,\phi\left(\frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^2}\right)$ je riešením rovnice
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

2. Uvažujme rovnicu
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$
s neznámou funkciou $u = u(x,y)$.
   (a) Ukážte, že funkcia $u(x,y) = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, kde a, b sú konštanty, je riešením rovnice (1).
   (b) Ukážte, že ak funkcia $u(x,y)$ je riešením rovnice (1), tak aj funkcia $v(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ je tiež riešením tejto rovnice.

3. Nech $u = u(x,z,y)$ je riešením rovnice
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 2u.$$
Dokážte, že potom pre každé $t > 0$ platí $u(tx,ty,tz) = t^2 u(x,y,z)$.
Návod: Definujte funkciu $F(x,y,z) = \frac{u(tx,ty,tz)}{t^2}$ a vypočítajte jej deriváciu.

4. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$
ktoré má tvar $u(x,y,z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5. Nájdite riešenie rovnice
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sqrt{x^2+y^2},$$
ktoré má tvar $u(x,y) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

6. Určte konštanty a, b tak, aby rovnica
$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5(2x^2+3y^2)$$
mala riešenie v tvare $u(x,y) = f(s)$, kde $s = 2x^2+3y^2$. Nájdite toto riešenie.